I. 18

4
OF

Sumo

157-

(149)

1263 3265

Ts 18

H

FRAN. MARIAE. IIVRBI.

PRINCIPI. DICATI.

EVCLIDIS
ELEMENTORVM
LIBRI XV.

Unà cum Scholijs antiquis.

A FEDERICO
COMMANDINO
VRBINATE

NUPER IN LATINVM
conuersus, commentarijsq;ue
quibusdam illustrati.

MDLXXII

PISAVRI, M D LXXII.

Cum Priuilegio Pont. Max.

JACOBVS Christopher German.

C. L. 1572

EVOLVING

ILLUSTRATIONS

BY THE

AMERICAN

SCIENCE SERIES

OF THE

AMERICAN

SCIENCE SERIES

OF THE

AMERICAN

PIRELLA GÖTTSCHE LOWE

CONTEMPORARY

QA.
31
E86
L1572
PB
NMBH
GREGORII XIII. PONT. MAX.
P R I V I L E G I V M.

NOTV PROPRIO &c. Cum, sicut ac
cepimus, dilectus filius Federicus Commandi
nus Laicus Vrbinateſis nonnulla noua opera
haſtenus non impreſſa, videlicet Euclidis ele
mentorū libros quindecim ē greco nuper con
uerſos, & Ariſtarchi librum de magnitudini
bus & diſtantijs Solis & Lunæ, necnon Pap
pi Alexandrini mathematicarum collectionū
libros ſex. Heronis Alexandrini ſpiritualium li
brum. Euclidis opera reliqua. Theodoſii de habitationibus librum, eiuf
dem de diebus & noctibus libros duos. Autolyçi de ortu & occaſu libros
duos. eiufdem de ſphaera, quæ mouetur, librum, & Archimedis opera
omnia, ad publicam & communem omnium ſtudioſorum vtilitatem im
primere ſeu imprimi facere intendat, dubitet quæ ne eiufmodi opera poſt
modum ab alijs ſine eius licentia imprimantur, quod in maximum ſuum
tenderet præiudiciū, Nos propterea eius indemnitati conſulere uolen
tes, eidem Federico, ne prædicta opera omnia & ſingula uel quolibet ip
ſorum per ipſum Federicum, ſeu de eius ordine poſtquam per ordinarios
locorum, & Inquiſitores hereticę prauitatis partium illarum examinata
fuerint, imprimenda, per decem annos, poſt eorundem operum uel cuiuſ
bet ipſorum impreſſionem, à quocunque uel quibuſcunque ſine ipſius Fe
derici licentia imprimi, aut ab ipſis uel alijs uendi, ſeu in eorum apothecis
uel alijs uenalia, præterquam à dicto Federico, uel de eius ordine impres
ſa, aut imprimenda teneri poſſint, concedimus & indulgemus. Inhibentes
omnibus & ſingulis Chriſti fidelibus tam in Italia, quam extra eam exi
ſtentibus, præſertim bibliopolis & librorum impreſſoribus, ſub excommu
nicationis lætæ ſententiæ, in terris uerò Sanctę Ro. Eccleſiæ mediate, uel
immediate ſubiectis, etiam quingentorum ducatorum auri Cameræ Apo
ſtolice applicandorum, & in ſuper amiſſionis librorum pœnis toties ipſo
facto, & abſque alia declaratione incurrendis, quoties contrauentum
fuerit. ne intra decem annos prædictos ab impreſſione dictorum, uel cuius
libet ipſorum reſpectiue computandos dicta opera, uel quodlibet ipſorum
ſine eiufdem Federici expreſſa licentia dictis decem annis durantibus
* imprimere

imprimere, seu ab ipsis, vel alijs præter, quàm à dicto Federico impres-
sa & imprimenda uendere, seu uenalia habere, uel proponere, uel ea, ut
supra, habere audeant. Mandantes uniuersis uenerabilibus fratribus
nostris Episcopis, Archiepiscopis, eorumque Vicarijs in spiritualibus ge-
neralibus & in statu temporali Sanctæ Ro. Ecclesiæ etiam Legatis et Vi-
celegatis Sedis Apostolicæ, aut ipsius status Gubernatoribus, ut quoties
pro ipsius Federici parte fuerint requisiti, uel eorum aliquis fuerit requi-
situs, eidem Federico efficacia defensionis presidio adstantes, præmissa
ad omnem dicti Federici requisitionem contra inobedientes & rebelles per
censuras Ecclesiasticas, etiam sæpius aggravando, & per alia iuris reme-
dia, auctoritate Apostolica exequantur, inuocato etiam ad hoc, si opus
fuerit, auxilio brachij secularis. Et insuper quia difficile admodum esset
presentes ad quodlibet forum deferri, uolumus & Apostolica auctori-
tate decernimus ipsarum transumptis uel exemplis in ipsis operibus impres-
sis plenam & eandem prorsus fidem ubique tam in iudicio, quàm extra
haberi, quæ præsentì originali haberetur. Et cum absolute à censuris
ad effectum presentium, et quod sola signatura sufficiat, præmissis omni-
bus constitutionibus & ordinationibus Apostolicis, ceterisque in contra-
rium facientibus non obstantibus quibuscunque.

Placet V.

Datum Romæ apud Sanctum Marcum Non. Septembr. Anno primo.

ILLVSTRISSIMO ATQVE EXCELLENTISSIMO FRANCISCO MARIAE II VRBINATVM PRINCIPI.

V M mihi in mentem venit Illustrissime Princeps quanta mathematicæ facultatis olim apud veteres illos felicioris certe sæculi, atque ingenij homines, & celebritas, & dignitas fuerit; non possum non vehementer dolere temporũ nostrorũ conditionem, qua nobilis disciplinæ cultus, & splendor squalore immenso, ac tenebris penitus contabescit, dum vnus quisque detestanda auri cupiditate quicquid

certam in se lucri non habet occasionem, statim insolenter abiicit, temereque aspernatur. Exulat iam, publicisq̃ue ferè exclusum est gymnasiis nobile hoc, & pulcherrimum matheseos studium, quo nihil iucundius, ac magis domesticum vniuersa quondam habuit græcia. Non est sanè quòd his temporibus vereare, ne triangulis, tetragonisq̃ue, aut circulis depictas porticus inuerti, aut de huiusmodi rebus loquentes audire cogaris. Tacet omnino, iacet hoc disciplina genus, et quòd in delitijs olim habebatur, nunc quasi rude, & obscurũ passim reijcitur, vsq; adeo auaritia, cæcæq; diuitiarum libido apud nostræ ætatis homines increbuit. minuitur tamen in dies hic dolor meus, tum quòd ab externis magna doctrinæ uiris has artes amanter excitatas, scio diligentissime promoueri: tũ quòd aliquot imperio, ac dignitate florentes iã hæc studia benigne completi, liberaliterq; fouere uideo: uerum enim illud esse quouis tempore homines sunt experti, qualia fuerint eorum, qui summa rerum præsumt, eadem & reliquorũ fore studia. quam ob rem si non ad pristinum dignitatis fastigium, ad honestiorem certe gradũ eas breui peruenturas minime despero. idq; ea præsertim ratione, quòd te Princeps Illustrissime, eximia mentis probitate, singulariq; ornatum prudentia, præclaros omnes animi tui conatus ad compensanda literarum incommoda iam diu conuertisse lætus intueor. neque id iniuria profecto: nam ut illustria, & nunquam interitura memorię exempla tuæ gentis omittam, Patrem habes incomparabilis illustriæ, magnanimitatis, & prudentię Ducem, qui artes ingenuas benignitate fouet, auctoritate defendit, & præmijs ornat. huic te similẽ, ac parem ut prestes necesse est. Age vero quanti est illud ad confirmandã, augendamque indies per egregiam banc voluntatem, quòd non solum

literas diligis, verum etiam quo semper fuisti mentis acumine, tantos in illis progressus facis, ut omnes qui te noscunt, admiratione, ac gaudio afficiantur incredibili. Ut enim de me dicam, quoties summam ingenij tui præstantiam, atque solertiam in percipiendis Euclidis elementis magna cum voluptate sum admiratus? Hoc tu honestissimo, nec unquam satis laudato bonarum artium studio inflammatus nuper vertendi, explanandi quæ Euclidis onus mihi iniunxisti, quod geometrarum omnium facile principem, tu Princeps optime iniquo patiebare animo, nec recte multis in locis conuersum, nec scite figuris ornatum fuisse. præterea vero typographorum ita corruptum negligentia, ut non sine maxima studioforum offensione legi, nedum intelligi posset. Ego vero prouinciam hanc tot difficultatibus impeditam alacri animo suscepi, tum ut optime tuæ voluntatis mandato, quod semper obnixè studui, obtemperarem; tum etiam, ut pro ueteri meo instituto amatores huius disciplinæ quacunque liceret ratione iuuarem. haud enim multis abhinc annis medicina, cui me totum dederam, salutem plurimam dixi, ut his me tantum oblectarer studijs, & in eorum cognitione parum de alijs sollicitus, conquirerem; veterum quæ præstantissima in hoc genere scripta, pro ingenij tenuitate à situ, ac tenebris uindicarem; & meis illustrata commentarijs in lucem, & omnium conspectum non sine aliqua studioforum gratia proferrem. quod partim iam sumus assecuti, partim summis uigilijs diu, noctuque contendimus. Archimedis enim, Ptolemæi, Apollonijs, sereni que excellentium virorum opera nonnulla superioribus annis conuersa à nobis, & explicata quàm accuratissime emisimus. Hoc autem tempore multum laboris, ac diligentie in Pappo, Herone, Theodosio, Autolyco, Aristarcho, & alijs, quorum magna pars nec græce, nec latinæ habetur, ponebamus, cum tuo iussu his depositis studium, operam, laborem, & curam denique omnem ad unum Euclidem conuertimus, ut rem à multis tentatam, Deo iuuante ad finem perduceremus. Nam ut pauca de hac re loquar, Orontius quidem Phineus haud obscuri nominis auctor priores tantum sex libros nulla græci codicis ratione habita edidit. Iacobi uero Peletarij in eadē re labor eo etiā minus probatur, quod Cāpani leditionem ex arabica conuersam lingua, magis, quàm græcam sequi uouerit. Alij autem peracuti sanè ingenij homines æuullos geometricas in priores sex libros conscripserunt, cetera tamen non sunt prosecuti. At Candalla uir & generis nobilitate, & rerum cognitione insignis, licet omnes Elementorum libros, qui postulari à latinis uidebātur, latinos fecerit, locupletaueritque, parum tamen (ut audio) eo nomine commenda-

tur,

tur, quod longius iter ab Euclide auerterit; & demonstrationes, quæ in
græcis codicibus habentur, uelut inelegantes, & mancas suis appostis
reiecerit. An uero, quod ab omnibus requiri dicimus, nostra opera præ-
stiterimus, aliorum erit iudicium. Illud quidem uere affirmare possumus,
nullam à nobis nec impesse, nec laboris, nec ualeitudinis habitam fuisse ra-
tionem, ut hoc geometriæ columen, ac decus non solum expurgatum à me-
dis, & figuris eleganter excultum haberent studiosi, uerum etiam sum-
ma fide conuersum, & scholijs antiquis, commentarijsque quibusdam
nostris illustratū. Hoc igitur quaecumq; ue est meæ industria testimoniū,
nunc tibi magnanime Princeps, cui plurimum debeo, & cupio omnia, do-
no, dicoque, ut quibus possum officijs meam in te fidem, perpetuamque
obseruantiam, non modo nostræ ætatis hominibus declarem, sed ipsi etiā
posteritati testatam literarum monumentis relinquam. & quod semper
uehementissime conatus sum, uere persuadeam, neminem te habere, qui
præstantem animi tui uirtutem, egregiamque doctrinam memoria sem-
piterna apud omnes propagare magis studuerit, ac semper sit ueneratus.
vale, & nos, liberalesque disciplinas, quod facis, tuere, & adiuua.

Federicus Commandinus.

Federici Commandini in elementa Euclidis prolegomena.

Quid plerique interpretum, atque eorum præsertim, quæ
 maxime laudantur, facere solent, ut antequam reuoluen-
 di clarorum virorum monumenta, ac scripta, quæ sibi pro
 reipublice literaria commodo explicanda, exornandaq;
 sumpsere, initium faciant, quædam primo loco differant:
 idem & mihi huius tam præclari operis initio faciendam
 putavi. neque enim dubium est, quin rudis adhuc lectoris
 animus de re vniuersa à principio admonitus, minori pos-
 tea cum labore, ac breviori tempore conformetur ad vnk
 quodque intelligendam. Primum igitur non nulla summa-
 tum de hac tam nobili mathematicarum artium facultate
 dicemus, quæ nam subiecta illis materia sit, tum genera-
 rit, tum particulatim, quis ordo, ac dignitatis gradus, quæ sit earundem definitio, quis or-
 tus. Deinde vero miram ipsarum ad humanos vsus opportunitatem paucis ad modum enarrabi-
 mus. Post de Auctore, videlicet de Euclide ipso, de operis inscriptione, de scopo, ac de ipsius demõ-
 strationibus, deq; eorumq; in his libris complexus est, dispositione, & methodo quedam minime
 inutilia attingemus. Denique summam vniuersæ scilicet doctrinæ eo consilio adiungemus, ut non so-
 lum facilius quicquid de hoc genere præcipit Euclides intelligatur, verum etiam ut fidelius me-
 moriæ mandatum custodiat. Itaque philosophiam omnem, quæ in contemplatione versatur, præ-
 clarissimi philosophorum in tres partes distributam nobis ea dulci ratione tradiderunt, quod ve-
 rum aliæ prorsus materiei quasi labe, ac cæno carentes solæ per se subsistunt, atque intelliguntur:
 aliæ vero diuersam penitus materiam ab his sortitæ, sic materia inmittuntur, ut nullo pacto absque
 illa possint consistere: aliæ denique mediū inter has naturæ, ac dignitatis locum obtinent; tum
 quod omni vacant materia, si accuratori studio veram illarum conditionem inspexeris, tum quod
 materia prædita quodam modo videantur, quia sine aliqua eius adiunctione ob ingenij nostri imbe-
 cillitatem cognosci nequeunt. Hinc triplex illud philosophiæ genus, Diuinum, quod quidem vt
 nomine, ita & re duo reliqua supra quàm dici potest, antecellit; Naturæ, quod tertium est, ac po-
 tæstas ordinis, ac dignitatis habet partes; & medium, quod mathematicum appellatur: quoniam
 solum vere dici, ac sciri potest, ob summam rei subiectæ constantiam, & certam demonstrandi ra-
 tionem: Hoc quidem vt diuinis substantijs inferius est (quid enim tam eximium, vt cum illis compa-
 retur?) ita naturalibus præstat, atque superius est; quæ materia funditus immersa, variam, & mu-
 tabilem eius sequuntur naturam. Hoc primum ab ijs inuentum est hominibus, qui ante orbis terra-
 rum eluuiem cum feliciori fruerentur & cælo, & ingenio, sapientiam rerum cælestium, admirabi-
 lemq; mundi ornatum animaduertierunt; ac duabus columnis erectis, quarum altera quidem lapi-
 dea, altera vero lateritia, quæ inuenerat, diligentissime inscripserunt, ne aut aquarum inundatione,
 aut incendio, quorum alterum euenturum prædixione veterum nouerant, tantarum rerum notitiâ
 dilaberetur. quare nec primis illis temporibus, quæ tam inculta creduntur, nobile mathefæos studiū
 incultum iacuit. Hoc post terrarum eluionem apud chaldeos summo præsertim Abrahami diui-
 ni propè hominis studio ornatum, & auctum viguit. Idem Aegyptij homines cum ob perpetuam
 cæli serenitatem, tum ob magnam locorum plantiæ ad hoc genus scientiæ natæ, cæcis ac-
 ceptum summo opere excoluerunt. Ab Aegyptijs ad grecos, quibus nec ingenij acuminè, nec sciendi
 cupiditate quemque merito anteposueris, translatum est, Thalesis Milesij, Pythagoræ Samij, alio-
 rumq; excellentium hominum industria, quos scientiæ amor & vastæ mariæ trāsire, & longinquas
 peragrarè regiones coegit, & præcipue Aegyptum, vbi, si grecis credimus, nata & altæ sint ma-
 thematicæ disciplinæ, quas postea & exercitatione, & scriptis illustrarunt Anaxagoras, Oenopi-
 des, Zenodotus, Erito, Ant. pho, Hippocrates, Theodorus, Plato, Theætetus, Architas, Euclides,
 Aristarcus, Archimedes, aliq; innumerabiles, qui hac eximia, præstantiq; mathefæos disciplina
 mortales propè cunctos in sui admirationem conuerterunt. Verum de his hæcenus, neque enim hi-
 storiam hic contexere propositum est. sed hæc pauca attingimus, ut antiquam huius studij nobilita-
 tem obiter quasi digito ostenderemus. Nunc de materia & præcipuis Mathematicæ facultatis par-
 tibus

1790

in Opticam, quę generis nomen obtinuit, catoptricam, & scenographicam. Optica reddit causas co-
 rum, quę aliter quam sint se nobis offerunt, ob alios, atque alios rerum visarum situs, ac distan-
 tias. Catoptrica circa varias, multiplicesq; versatur reflexiones, & coniecturas cognitioni impli-
 catur. Scenographica ostendit, quo pacto ea, quę apparent in imaginibus, non inconcinna videan-
 tur, vel deformia, iuxta distantias, atque altitudines eorum, quę designantur, non igitur veram æ-
 qualitatem, & concinnitatem imitandam precipit, sed eam, quę aspectum nostrum concine, &
 apposite feriat, ita vt cum circuli representandi sint, interdum non circuli, sed ellipses deferban-
 tur, & quadrata altera parte longiora fiant. Canonica, vel Musica apparentes harmoniarum con-
 siderat proportionales, regularis sectiones adinueniēs, et sensus vbiq; vtens adminiculo. Mechanica
 circa res sensibiles, ac materia cōmūctas versatur, dum aut bellica parat instrumenta, qualia Ar-
 chimedes ex cogitauit, cum Marcellus Syracusas graui premeret obsidione: aut admirabilia qua-
 dam summo cum artificio construit spiritu, ponderibus, & spartis, qualia Cresibus, Hero, & Ar-
 chimedes non sine maximo stupore suorum temporum hominibus spectanda proposuerunt. Quis
 enim non admiratur, vt alia omittam vitreum illum Archimedis orbem atque vel bac vna re ma-
 thematicas facultates, quę talia præstare possunt, non summo opere veneretur? Percurrit propriū
 meritum signifer annum, et simulata nouo cythra mense redit. ita ut eleganter exclamet Iuppi-
 ter apud Claudianum. Hucine mortalis progressa potentia curæ. Iam mens in fragili luditur arte
 labor. Quid quod aīnt Architam bac in re tantum potuisse, ut columbam ligneam in aere volantē,
 quasi anima præditam, ac sese sustentantē fecerit. Astrologia de mundanis edisserit motibus, de ca-
 lestim corporum magnitudine figura, atque illuminandi vi, nec non de eorundem a nobis distan-
 tia. Huius partes sunt Gnomonica, Meteoroptica, Dioptrica. Gnomonica circa horarum dimensio-
 nem per gnomonium positiones versatur, de quibus Ptolemæus in libro, qui de Analemmate inscri-
 bitur, diffuse pertractat. Meteoroptica elevationum differentias, & distantias syderum ex qui-
 rit apud Claudianum. Quæ uaria, quę ad Astrologiam pertinent theorematata docet. Dioptrica distan-
 tias solis, & lunę, aliorumq; astrorum, per eiusmodi instrumenta inuestigat. Ceterum de his hacten-
 us summam dixisse satis sit. Sed quoniam plerique his præsertim temporibus sola utilitate ad op-
 timarum artium studia excitantur, liberalesq; colunt disciplinas, uideamus obsecro, an mathematicæ
 nullius sint commodi ad iuuandos humana uite usus, uti cetera quorundam turpissimi lueri cupi-
 ditas falsa iam predicatione diuulgauit, ita ut qui hanc amplectuntur facultatem ab imperitiis,
 uel a. 10 studio occupatis hominibus palam derideantur, tamquam in re inuili, atque uana oleum,
 & operem perdant. Agamus igitur pingui, quod aīnt, Minerua, quando nobis negotium est cum
 ijs, qui sola quæstus ratione persuaderi possunt, & inuicemus hanc notam ingenue, ac nobili discipli-
 nę, ut lucrum, & diuitias pollicendo huiusmodi hominum sibi studia, & gratiam comparet. Ne-
 gent isti primum, si possunt, mathematicas artes popularem utilitatem nullam habere, si mercatura
 cuius exercitatione tam multi distillant ob magnam quæstus occasionem sine arithmetica tracta-
 ri potest. Experitur deinde siquid dimetiri queunt absque Geodesiæ adiumento. sulcent maria,
 & longinquas petant regiones, nouum perquirant orbem nullo astrologiæ nauticæ fulti præsidio.
 Quid meacius quantum uel unus Hippocratis iudicio debet Astronomia, cuius ductus syderum
 cursus & lunę præsertim cognoscit. Unde uniuersa dierum, quos criticos uocant, dependet ratio,
 quam diligenter cauendum est, ne grauiori aliqua curatione uexet egrotantem, dum luna, idq; præ-
 cipue morbi initio, a conuulsione, ut nunc loquuntur, ad oppositionis gradum proficiscitur? Quan-
 tum denique commodi, atque utilitatis affert Geometria, Arithmetica, & reliquę omnes in publi-
 cos, & priuatos usus? cum nulla uel infimarum artium, ut finem consequatur, mathematicos ope non
 egeat. quod singulas accuratius intuenti facile pater; & a nobis nullo negotio probaretur, nisi lon-
 gam de re certamutarēmus disputationem. colore, umbra, situ, raritate, ac densitate mediocrum, &
 refractione, quā uarios ornatus, admirabilesq; rerum figuras quotidie cernimus? & magna cum uo-
 luptate spectando decipimur? sed errauimus, sola enim utilitate eum illis agendum est. quare omis-
 sis optics, & pictoribus mera afferantur commoda. Quoniam pacto igitur distiteri possunt, quin
 mathematica ad uniuersam ciuitatum utilitatem mirabiliter ualeant, tum actionum tempora di-
 metiendo, tum uarias uniuersi resolutiones demonstrando? Ars uero militaris, quę politices dextra
 manus est, quā ratione uolens, quę numerosa est, paucissimam ostendere multitudinem, castra,
 acies, ad figuram circuli; ubi uero copias ostentare cupit, ad figuram quadranguli format, nisi
 inus Geometriæ auxilio? Quomodo aut hostium urbes oppugnat, & capit, aut proprias tuetur, nisi
 ipsius

ipsius Mechanices adiumento, quæ admirabiles ad oppugnandum, aut resistendum fabricantur machinas, uti Archimedes aduersus Marcellum, qui (nam Ctesibios, Architas, Prifcos, Eudoxos, Diogenetis missos facio) cum hanc adeo miram artem aliquando apud Hieronem predicaret, Rex Geometram admiratus rogauit, ut tantæ fiduciæ periculum faceret. Quare Archimedes emptam è re gijs nauibus unam, & in sicum eductam, grauiusq; oneratam solus machinis suis ad se pertraxit, non secus ac navi in mari remis, ac uelis agitaretur. contra postea Alexandriam regis eiusdem namq; è litore in Mare deduxit, quod omnes scitiæ vires non potuerunt. Hac igitur arte qui instructi sint, urbis mœnia tueri, & hostium oppugnationes eludere queunt. & habuisset tanto impetu res cepta fortunam (ait Linius, cum de Marcello Syracusas oppugnante loquitur) nisi vnus homo Syracusis ea tempestate fuisset. Archimedes is erat, vnicus spectator celi, Syderumq; mirabilior tamen inuentor, ac machinator bellicorum tormentorum, operumq; è quibus ea quæ hostes ingenti mole agerent, ipse perleui momento ludificaret. libuit tam insigne illustribus historiis de Archimede testimonium asserre, ut huius exemplo, quantum utilitatis, ac commodi sibi ac patriæ homines comparare possint, intelligant, si nobilem Matheseos facultatem diligenti cura, studioq; excoluerint. ceterum dissimulare nequeo, me multo grauius perturbari quorundam philosophorum, (ut sibi videntur) impudenti audacia (Cur enim grauius non ferat mathematicas ab ijs calumniari, quorū esset minus eas colere, ac tueri, quàm ab hominibus, quos mala diuitiarū cupiditas arctissimis diuinis laqueis tenet) Sed aduersus hoc philosophorum genus nihil aliud dicā nūc, quod scit Ariſtippus istos, & Epicureos, ut vere, & eleganter eos nominat Petrus Ramus vir multæ eruditionis, potius dolore quodā, studioq; suam tegendi ignorantiam talia dicere, quàm quod reuera putet mathematicos cognitionem nihil utilitatis, nihili adiumenti asserre ad omnes liberalium artium disciplinas, præsertimq; ad Platōnis Aristotelisq; monumenta, quos hoc doctrine genere plurimū delectatos fuisse plane constat. Qui enim hoc putent, cum multa quotidie necessaria imprimis, scitiisq; pulcherrima apud hos inueniant, quæ quoniam mathematico more tradita sunt, quasi scopulos quosdam euitare coguntur. Hinc Timæum non attingunt tāquā fabulosum, & nullius pretij librū. Hinc septimum physicæ auscultationis librum, multaq; alia Aristoteleā suis discipulis, quod, ut aiunt, inutilia sint, explanare grauuntur. sed plura fortasse dicta sint de hac re, quàm oportuit. nam vera mathematicos utilitas, eximij fructus, incredibilesq; voluptates in sola veritatis cognitione, ad quam natum sumus, posite sunt. hac vna nos vere homines, uereq; diuinū luminis participes ostendimus. cetera terrenam & fragilem præferunt conditionem. Age vero accedamus ad ea, quæ ad Geometram nostram spectant. Et primum de ipso Euclide; deinde de inscriptione, et scopodicamus. postremo de illius demonstrationibus, quemadmodum à principio promiseramus. Liberemus igitur, multos ab eo errore, quo persuasi credunt Euclidem nostram eundem esse & philosophiam megarensē, & geometram, totamq; hanc rem breuiter explanemus. Fuit senior Euclides ex Megaris oppido, quod isthmo adiacet, Parmenidis librorum in primis studiosus, ac megaricæ sectæ princeps, ad quem mortuo Socrate Plato ac plerique omnes socratici, triginta tyrannorum metu cōfugerūt. Hic dialogos sex conscripsit, quos enumerat Laertius. vñs est probationibus non ijs, quæ per assumptiones, sed quæ per conclusiones sunt, ac magis dialecticæ sunt. successorem habuit Eubulidem. Iunior autem Euclides qui σοιχειστωρ ac geometra, dictus est, tempore Primi Ptolemæi floruit, ac, demian diligenter coluit, & quotidiana ferè Platonis discipulorum consuetudine egregie eruditus, Mathesim, quæ in Academia præceptoris instituto tunc maxime vigeat, ita præclaro animā impetu est aggressus, ut progressus admirabiles, ac sempiterna aui memoria dignissimos in ea fecerit; constantiq; omnium doctōrum testimonio principem locum sibi vindicari. nemo autem mihi ignotum esse arbitretur, & alerum Maximum scribere Platonem sacre aræ conductores ad Euclidem, tanquam ad primarium mathematicum reieciſſe. sed nos Heronem, & Proclum mathematicos studio insignes sequimur, vel potius Eudemum ac Theophrastum ex peripateticis post præceptorē nobilissimos. hi namque hoc tradiderunt memoria in ijs libris, quos de historia geometrica conscriptos magno cum dolore, ac literatorum incommodo perijſſe non ignoramus. Euclides igitur non ster post Hippocratem, Leontem, Teudium, & Hermotimum, qui geometrica elementa, alius post, alii conscripserant, opus hoc vere aurēū, summo cum labore, præstantiq; mentis iudicio contexuit. Multa quidē inueniunt superiores illi homines excellenti quodā, ac propē diuinū ingenij acumine, non pauca addiderant Theætetus atque Eudoxus, qui cum Platone versati sunt. Itaque Euclides

disperſa

diversa collegit, collecta disposuit, & quæ pinguis, neq. ligentiusq. demonstrata fuerant, ipse ad ali-
 forius, ἀνεκτόν τῆς, demonstrationes redegit. magna profecto laus superiorū, multo tamen ma-
 ior Euclidis, qui indigesta co composuit ordine, ut vel hac una re perpetuum sibi apud sine mentis
 homines laudem compararet. inchoata ita absoluit, incerta ita firmissimis rationibus certissima ef-
 fecit, ut nihil amplius prop. in eo desideretur. Iam duo fere annorum millia abierunt, ex quo Eu-
 clides inter viros connumeratus est. multos habuit aduersarios, qui inuidia potius morbo, quam ve-
 ritatis amore illius scripta omni studio labefactare sunt conati; nullam tamē adhuc in illis videntur
 γὰρ ξίψιν, nullum errorem, nullum paralogismum seneri inquisitores deprehendere potuerunt. Cete-
 ra vero præstantissimi huius viri monumenta hæc habentur. Optica, Catoptrica, Musica, Data, pbe-
 nomena, scripsit etiam librum de diuisionibus, conicorum libros quattuor, porismatum tres, ut ex
 Proclo, Pappoq. constat, qui quidem ad manus nostras non peruenierunt. Atque hæc sunt, quæ in-
 uenire potuimus de Euclide nostro, cuius immortalis beneficio Mathesis, quæ græcū mare ex Aegy-
 pto transgressa iam ducentos annos, ac paulo plures Græciam incoluerat, suam dignitatem, suosq.
 honores non sine deorum voluntate est consecuta. Nunc quæ studiosorum mentes haud leuiter per-
 turbat opinio de elementorum demonstrationibus, paucis referatur. quævis enim hæc disceptatio
 nullam futuro geometriæ afferat utilitatem, maxime tamen sollicitos habet, nescio quo pacto huius
 discipline amatores; quippe quod scire percipiant, cui nam tantum beneficii, atque adeo singulare
 munus acceptum referant. Inter ceteros igitur, qui hac de re disputarunt, Ioannes Butoe, & Pe-
 trus Ramus acerrimi iudicii homines in contrarias prorsus abiire sententias. hic enim in suo Ma-
 theseos proœmio non solum demonstrationes Theoni. (quod etiam alij dixerunt) ascribendas putat,
 verum etiā ipsa elementa, tum quia σοκράτους ultimus fuerit, nulliusq. propositionis inuentio in-
 ter Euclidis laudes à Proclo referatur, tum etiam quia Theon ipse suas editiones in elementa no-
 minatim laudari in primo commentario super Ptolemæi magnam constructionem, ita ut elemen-
 ta sibi eo iure vindicare possit Theon, quo antea Euclides. Idipsum ea quoq. probat ratione, quod
 Euclidis demonstrationes, quæ in Procli commentarijs leguntur, minime cum ijs conueniant, quas
 in elementis habemus. Ille autem (de Butcone loquor) in suis annotationibus in Euclidem hoc dis-
 crete negat; veteremq. præclarissimi hominis laudem tuetur; quoniam apud antiquos nunquam sine
 demonstratione theorematum proferatur; ut quæ nullā, si nuda fuerint, habeant utilitatē, ac dignita-
 tē; quodq. vero simile sit, verba illa ἐκ τῶν δεῦρος συνορυσθῶν, ex quibus omnis effluxit disputandi
 occasio, ita possint intelligi, ut dicamus, Theonem conscripsisse quidem commentarios in elementa,
 sed illos temporum calamita te perisse, quemadmodum & quæ in euidem Pappus Alexandri-
 nus scripserat, conseruato tamen titulo, qui postea Euclidi ipsi negligentur adiectus est. Nos autem
 medium secuti credimus libros de elementis suis ornatos demonstrationibus ab Euclide nobis fuisse
 relictos. qui enim de hoc dubitare possumus, cum Proclus in commentarijs in X. propositionem,
 post recitatam Apollonii pergei demonstrationem hæc verba subiungat? πολλὰ δ' αὖ οὖν κείν-
 τῶν τοῦ σοκράτους ἀποδείξεis hoc est λόγε igitur melior est sichiote (ita enim Euclidem appel-
 lat) demonstratio, & simplicior, magisq. ex principijs. ut autem hoc vere asserimus, ita illud meri-
 to concedemus, Theonem excellentis ingenij virum Euclidis demonstrationes suosq. planiusq. expli-
 catas in lucē protulisse: quod apud Proclum obseruari potest. Sic data nō eo prorsus habentur mo-
 do, quo apud Pappum in septimo mathematicarum collectionum libro. nec optica, catoptrica, quæ
 nos vidimus Romæ in vaticana bibliotheca. Quamobrem si hæc omnium consensu Euclidi concedi-
 mus, etiam elementa concedenda sunt, præsertim cum verbis potius, quam ipsa Theon ab eo di-
 screpet in demonstrandi ratione, sunt igitur ille quidem demonstrationes Euclidis, sed eo modo con-
 scriptæ, quo olim Theon Euclidem secutus suis discipulis explicauit. Non inutile autem, nec inui-
 cundum illud legentibus fore crediderim, si Platonis, Xenocratis, nec non Euclidis nostri insignes
 huic disputationi sententias, tanquam coronidem addidero. poterunt enim Geometria candidatis
 esse loco orationis copiosa, atque elegantis. Plato igitur ut necessariam prorsus facultatis huius
 cognitionem suuero philosopho palam ostenderet, verba hæc pro foribos gymnasijs posuit. οὐδεὶς
 ἀγνοῶν τὸν γεωμέτρων εἰρήνα. nemo rudis Geometriæ huc pedem inferat. Xenocrates vero, qui post
 præceptorem tertius in academia docuit, cuiusdam Mathematicum, ac Geometriæ ignaro gymnasi-
 um ingredienti, Abi, inquit, λέγεις γὰρ οὐκ εἶχες φιλοσοφίας. anas enim philosophia non
 habes. Quid vero de nostro Geometria habemus dicere? Hic Ptolemæo Regi primo interroganti,
 an alia

an alia facilius, atque commodior esset, discenda Geometria methodus, ac ratio. Nulla, inquit, o Rex est via regia, quæ ducat ad Geometriam. Quam constantem igitur animi diligentiam, adacremq; discendi voluntatem iuvenes ad hæc studia asferre oporteat, non solum Geometria, quæ per se nobilissima est, sed & totius philosophiæ causâ, nos tantorum virorum testimonijs declarasse sit satis. Dicamus, iâ de operis inscriptione, simulq; de Auctoris proposito. Nâ quoties illa ab operis argumento desumpta est, explicatione vnus, & alterum ferme cognoscitur. Proclus meo quidem iudicio, videtur legisse Εὐκλείδου στοιχείων βιβλ. idem tamen vtraque significat, siue illa sit Elementaris institutio, siue elementorum libri XV. Dixi autem non Theonem, quod multi credunt, sed illius familiarem quendam, virum planè eruditum, quicunque ille fuerit, Euclidem nobis, eo, quo nunc habetur, modo legendum cõcessisse, verborum illorum ἐκ τῶν ἐλαύων οὐνοῦσαν per motus testimonio: nam & Ioannes cognomento Philoponus, quos in Aristotelem commentarios ipse composuit, se ex Hamonij Hermæ colloquijs, ac disputationibus collegisse, ingenie prorsus grati animi exemplo professus est. Haud tamen negauerim Theonis auditorè, cum nomē suum suppresserit, voluisse nos totum hunc laboris, ac industrie fructum Theoni dūtaxat acceptum referre. At enim quærere fortasse aliquis nec iniuria proferat, cur Auctor hoc nomen elementum, aut elementare, quod de multis dicitur, solum protulerit. cum enim & de literarum principijs, & de rebus naturalibus, alijsq; dici soleat, adiungendam erat omnino, cuiusnam rei illa essent elementa, elementorum ve in scientia, vt à latinis postea factum est, qui Geometricorum addiderunt. Nos ita dubitanti, hoc ea omisissim diceremus ratione, quia statim idipsum ex primis verbis de puncti notione cognoscitur, aut Hamonij secuti, qui Porphyrianam inscriptionem ab eadem culpa defendit, affirmamus hanc inscriptionem κατ' ἔξοχον, ac quandam Geometrie excellentiam; & si ex nomine, quod multis commune est, factum sit, de Geometricis tantum elementis intelligi posse. sic Poeta dicentes de Homero, aut Virgilio intelligimus; frequens enim ac percelebre erat tunc Geometrie studium. Elementa vero hic dicuntur de Theorematibus, quæ principij rationem habent. Theoremata enim (vt proclus scribit) alia quidem elementa appellare consueverunt, alia elementaria, alia vero extra horum vin determinantur. Elementa igitur dicuntur, quorum contemplatio ad aliorum pertinet scientiam, & ex quibus apparet solutio eorum, qui in ipsis dubitare contingit. Vt enim vocis literate sunt principia prima, & simplicia, & indiuisibilia, quibus elementorum nomen imponimus: & cunctis dictio, oratioq; ex his constat, sic & totius Geometrie sunt quedam Theoremata principalia, & rationem habentia principij ad ea, quæ sequuntur, perq; omnia peruadentia, & multorum accidentium præsentia demonstrationes, quæ elementa appellant. Elementaria vero dicuntur, quæcumque ad plura pertinent & simpliciter quandam suauitatem habent, non tamen eam, quæ est elementorum; propterea quod eorum contemplatio non sit communis omni scientiæ. Quæcumque denum cognitionem non habent ad plura pertinentem, neque scitum aliquod, aut elegans demonstrant, hæc extra elementarium vin cadunt. Rursus elementum dupliciter dicitur, vt ait Menæchmus. illud enim, quod cõfirmat, eius quod confirmatur elementum est, vt primum secundū apud Euclidem, & quartū quintū; sic & alia multa inter sese elementa esse dicuntur, quippe cum alterum ex altero confirmetur. nam ex eo, quod extrinseci rectilineorum anguli quattuor rectis sunt æquales, intrinsecorum recto æqualium multitudo, & contra ex hoc illud ostenditur, estq; huiusmodi elementum lenitati assimile. Aliter pretereà dicitur elementum, in quod, cum sit magis simplex, compositum resoluitur. Ita vero non omne rursus elementum dicitur, sed quæ principalissima sunt eorum, quæ in rei effecta ratione sunt cõstituta, quemadmodum Petitiones, & Dignitates Theorematum sunt elementa. iuxta hoc elementi significatum & ab Euclide elementa constructa sunt, alia quidem illius Geometrie, quæ circa plana versatur; alia vero eius, quæ circa solida. sic & in Arithmeticis, & in Astronomicis elementa res institutiones multi conscripserunt. Propositū igitur fuit Euclidi in his libris tradere elementa de vniuersâ Geometriâ necessaria, hoc est principalissima, simplicissimaq; ac primis principijs maxime affinia theorematia, siue quibus reliquæ huius sciẽtię partes cõprehẽdi nō pnt. Euclides n. ipse in alijs libris Aristarchus, Archimedes, Apollonius, Theodosius, Autolycus, Menelaus, Ptolemæus, Pappus, Serenus et reliqui ad eorum demonstrationes his tanquam notissimis vbique videntur. Quod vero ad dispositionē, ac methodum Geometricorū sermonū attinet, sciendum est (vt inquit

Proclus) Geometriam, quemadmodum, & alias scientias certa quedam, & definita principia habere, ex quibus ea, quę sequuntur, demonstrat. quare necesse est seorsum quidem de principiis, seorsum vero de ijs, quę à principiis fluunt pertrahere. & principiorum nullam reddere rationem, quę autem principia consequuntur, rationibus confirmare. nulla enim scientia sua demonstrat principia, verum circa ea per sese sibi fidem facit, cum magis evidentia sint, quàm quę ex ipsis derivantur: & illa quidem per sese, hæc vero deinceps per illa cognoscit. Ita & naturalis philosophus à determinato principio rationes producit, motum esse potensita & medius, & aliarum scientiarum, atq; artium peritus. Quod si quis principia cum ijs, quę à principiis fluunt, in idem commisceat, is totam perturbat cognitionem eaq; conglutinat, quę nullo pacto inter se conveniunt. Trium igitur principia, deinde ea, quę consequuntur, sunt distinguenda. quod sanè in vnoquoque suorum librorum observavit: quippe qui ante omnem tractationem communia huius scientię principia exponit: et ipsa in suppositiones, seu definitiones, postulata, et axiomata dividit. differunt namque hæc omnia inter se, nec idem est axioma, & postulatum, & suppositio, ut Aristoteles asserit. Cum enim is, qui audit propositionem aliquam, statim sine doctore ut veram admittit, eus certissimam fidem adhibet, hoc Axioma appellatur, ut quę eidem equalia, & inter se equalia sint. Cum vero o audias dicente aliquo, eius, quod dicitur, notionem non habuerit, quę per sese fidem faciat; verum tamen supponit, & eo venti assentitur, ea suppositio est, verbi gratia, circulum eiusmodi esse figuram, communi quadam notionem non percipimus, sed audientes absque ulla demonstratione approbamus. Cum autem rursus & ignotum sit addiscenti, quod dicitur, & tamen eo assentiente assumatur, tunc id postulatum appellamus, ut omnes rectos angulos aequales esse. Quę autē à principiis enscuntur, ea sunt vel Problemata, vel Theoremata. Problema illud est, in quo quippiam, cum primum non sit proponitur inveniendum, ac construendum. Theorema autē in quo quippiam in constituta iam figura ita esse vel non esse demonstratur. In hac igitur elementari institutione Euclidem quis non summo opere admiretur propter ordinem, & electionem eorum, quę per elementa distribuit, theorematū, atque problematū? non enim oia assumpsit, quę poteras dicere, sed ea dumtaxat, quę elementari tradere potuit ordine. adibat autem varios syllogismorum modos usuravit, alios quidem à causis fidem accipientes, alios vero à signis profectos, omnes necessarios & certos, atque ad scientiam accommodatos. omnes præterea dialecticas vias, ac rationes; dividentes in formatum inventionibus; disjunctas in essentialibus rationibus; demonstratam vero in progressibus, quā à principiis ad quesita sunt. denique resolvunt in ijs, quā à quesitis ad principia sunt regressibus. Quin etiam varias conversionum species tum simplicium, tum compositarum in hac tractatione intueri licet. & quę tota totis converti possint, quę ve tota partibus, & contra, & quę ut partes partibus. Postremo admirabilem omnium dispositionem, antequam denique & consequentiū ordinē, ac coherentiā, ut nihil prorsus addi, aut detrahi posse videatur.

In primo igitur libro tractat de rectilineis figuris, videlicet de triangulis, ac parallelogrammis. Et primum triangulorum ortus, proprietatesq; tradit, tum iuxta angulos, tum iuxta latera; ipsi inter se se comparans. Deinde parallelorum proprietates intericiens ad parallelogramma transit, eorumq; ortum declarat, & symptomata, quę in ipsis sunt, demonstrat. postea triangulorum, parallelogrammorumq; communicationem offendit, & quo nam pacto parallelogrammum fiat e quale triangulo. Denique de ijs, quę in triangulis rectangulis à lateribus describuntur, quadratis, quam habeat proportionem quod à subtendente rectum angulum describitur ad ea, quę comprehenditibus ipsum sunt.

In secundo libro parallelogrammum rectangulum, & gnomon definitur. deinde parallelogrammorum rectangulorum, & quadratorum, quę ex rectarum linearum sectionibus fiunt, proportionēs declarantur. postea de quadratis, quę à lateribus obtusangulorum, & acutangulorum triangulorum describuntur, quam habeant proportionem, quę à subtendentibus obtusum & acutum angulum sunt ad ea, quę à comprehenditibus describuntur. Denique quę ratione dato rectilineo & quale quadratum constituitur.

In tertio libro agitur de ijs, quę circulis accidunt, & de rectis lineis in circulo, vel ad circulum ductis, itemq; de angulis, quā ad circulorum centra, vel ad circumferentias consistunt.

In quarto libro de figurarum planarum inscriptionibus & circumscriptionibus.

In quinto de Analogijs.

In sexto de proportionibus figurarum inter sese, de figuris similibus, & reciprois, de rectis lineis proportionalibus, de parallelorum applicationibus ad rectas lineas, quae vel deficiant parallelogrammis similibus, vel excedant. quomodo recta linea terminata extrema, ac media ratione secetur, de proportionibus circumferentiarum & angularum, itemq; sectorum in circulis aequalibus.

Septimus, Octavus, & Nonus ad Arithmeticam pertinent.

In septimo agitur de numeris primis, & compositis; & quo pacto numerorum non primorum maxima communis mensura inueniatur, de numerorum parte, et partibus. de numeris multiplicibus, de proportionalibus, & quaecumque in quinto libro de magnitudinibus generatim, eadem ferè & de numeris particularim hic demonstrantur.

In octavo de numeris deinceps proportionalibus, de numeris planis, de quadratis, de cubis, & solidis, de similibus planis, & similibus solidis.

In nono item de similibus planis, de cubis, & solidis, & de numeris deinceps proportionalibus siue ab unitate siue simpliciter, de numeris primis, de numeris paribus, de imparibus, de pariter paribus, de pariter imparibus, de pariter paribus & pariter imparibus, de numeris perfectis.

In decimo de commensurabilibus, & incommensurabilibus magnitudinibus, itèq; de rationalibus & irrationalibus.

In undecimo, duodecimo, & reliqui ad stereometriam spectant, hoc est ad solidorum corporum contemplationem.

Et in undecimo quidem primam agitur de rectis lineis quatenus ad solida corpora referuntur, videlicet quando sint in uno plano, quando recte, seu perpendiculares ad planum, quando parallele, quomodo à puncto in sublimi dato ad planum perpendiculares ducantur. Deinde vero de planis si mul desierit, tñ de solidis angulis, postremo de solidis parallelepipedis, & nonnulla de prismatibus.

In duodecimo de pyramidibus, et prismatibus; postea de conis et cylindris, demum de sphaeris.

In tertio decimo de constitutione quinque figurarum mundanarum, quas corpora regularia appellat; videlicet tetraedri vel pyramidis; hexaedri vel cubi; octaedri, dodecaedri, et icosaedri, ad quorum evidentiam prae mittit nonnulla de ijs, quae accidunt rectae lineae extremae, ac mediae ratione sectae, de pentagono aequilatero, de hexagoni, & decagoni lateribus, & de triangulo aequilatero.

In quarto decimo de dodecaedri, & icosaedri in eadem sphaera descriptorum comparatione.

In quinto decimo & ultimo de inscriptione quinque figurarum iam dictarum, & de earundem lateribus, & angulis.

P I N I S.

* * *

INDEX EORUM, QUAE IN HIS LIBRIS demonstrantur prater ea, quæ Euclidis sunt.

IN PRIMO LIBRO.

IRCVLI diameter bifariam circulum secat. 3.b
In data recta linea triangulum aquirere, & scalenum con-
stituere. 8
Si ad aliquam rectam lineam dua recta linee non ad easdem
partes sumpta angulos ad verticem aequales fecerint, ipsæ
rectæ lineæ in directum sibi inuicem erunt. 14.b
Si alteram parallelarum secuerit recta quædam linea, reli-
quam quoque secabit. 19.b
Rectæ lineæ, quæ à minoribus, quàm sint duo recti, in infinitum
produciuntur, inter se connemunt. 20
Omnis rectilinea figura, angulos, qui extra cõstituantur, quat-
tuor rectis aequales habet. 21

Omne quadrilaterum, quod latera ex opposito, & angulos aequalia habet, parallelogrammum est. 22
Omne quadrilaterum, quod ab utrisque diametris bifariam secatur, parallelogrammum est. 24
Si trianguli parallelogrammum duplum fuerit, eandemq; basim, aut aequales habuerint, & fuerint
ad easdem partes in eisdem etiam parallelis erunt. 25
Si trianguli parallelogrammum duplum fuerit, in eisdemq; ambo fuerint parallelis, aut in una ean-
demq; basi, aut in aequalibus erunt. 25
Quomodo ad datam rectam lineam, dato rectilineo aequale parallelogrammum applicari possit in
dato angulo rectilineo. 26.b
Quadrata ab aequalibus rectis lineis descripta, etiam inter se equalia sunt. 27
Quadrata equalia ab equalibus rectis lineis descripta sunt.
Ex duabus rectis lineis, quæ duabus datis aequales sint, & in dato angulo rectilineo parallelogram-
mum constituere. 27.b

IN SECVDDO LIBRO.

Si fuerint dua rectæ lineæ, quæ secantur in quocumque partes, rectangulum duabus rectis li-
neis contentum est æquale rectangulis, quæ unaquaque parte unius ad unamquamque par-
tem alterius applicata continentur. 29.b
Si fuerint dua rectæ lineæ, quæ utcumque secantur, rectangulum totis contentum una cum eo, quod
continetur duabus partibus ipsarum est æquale rectangulis, quæ continentur totis, & dictis par-
tibus una cum eo, quod reliquis partibus continetur.
Arithmetice analogiæ demonstratio. Theorema autem est.
Quadratum, quod fit ab excessu una cum eo, quod extremis continetur, quadrato medij æquale esse. 31.b
Si recta linea in partes inæquales secetur, earum partium quadrata æqualia sunt rectangulo, quod bis
dictis partibus continetur, una cum quadrato eius lineæ, quæ maior pars superat minorem. 32
Propositio IX aliter demonstratur. 33
Propositio X aliter demonstratur. 33.b
Cuiuslibet trianguli obtusum angulum habentis, aream dimetiri. 34
Propositionis XIII conuersa. 35
Cuiuslibet trianguli, siue acutianguli, siue rectianguli, siue obtusianguli, quod nota latera habeat,
aream inuenire. 35.b

IN TERTIO LIBRO.

Conuersum diffinitionis circuli. si in ambitu figuræ ab aliquo puncto eorum, quæ sunt intra, inci-
dant æquales rectæ lineæ, ea circulus est. 37.b. 38
Propositionis VII conuersa. 39.b
Si in circumferentia circuli aliquod punctum sumatur, ab eoq; in circulum ducatur rectæ lineæ, quæ
per centrum transit, omnium erit maxima, aliarum vero quæ trāsēnt per cẽtrũ propinquiores
sunt, remotioribus erunt maiores, dua autem tantum æquales sunt ad utraq; partes maxime. 40
Propositionis XIX. conuersa 43.b

Spacium

Spacium quod est ad centrum duplum est anguli, qui ad circumferentiā, quando circumferentiā eādem pro basi habuerint. 44

Propositio XXI aliter demonstratur

In eadem recta linea neutra ex parte similes & inaequales circulorum portiones constitui possunt. 44.b

In eadem recta linea, vel in equalibus rectis lineis equales circulorum portiones similes sunt. 45

Si equales recta linea aequales, & similes circumferentias auferunt, circuli aequales erunt, quorum ille sunt circumferentiae. 46.b.47

In circulis inaequalibus equales recta linea dissimiles circumferentias auferunt. 47

In circulis inaequalibus similes circumferentias inaequales recta linea subtrahunt.

Similes & inaequales circumferentias inaequales recta linea subtrahunt.

Si a puncto extra circulum sumpto ducantur in circulum quocumque recta lineae ipsum secantes, rectangula, quae totis, & earum portionibus extrinsecis continentur, inter se equalia sunt. 50

A puncto extra circulum sumpto ductae duae recta lineae circulum contingentes, inter se aequales sunt.

IN QVARTO LIBRO.

IN dato circulo rectam lineam recta lineae datae, quae diametro maior non sit, equalem, & alteri datae parallelam aptare.

IN QVINTO LIBRO.

SI prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam, tertia autem, ad quartam minorem proportionem habeat quam quinta ad sextam, & prima ad secundam minorem proportionem habebit, quam quinta ad sextam. 64.b

Si prima ad secundam maiorem habeat proportionem, quam tertia ad quartam, tertia autem ad quartam maiorem habeat, quam quinta ad sextam, & prima ad secundam maiorem proportionem habebit, quam quinta ad sextam. 64.b

Si prima ad secundam eandem proportionem habeat, quam tertia ad quartam sitq, prima maior quam secunda, & tertia quam quarta maior erit, et si equalis, equalis, & si minor, minor. 65.b

Si tres magnitudines fuerint proportionales, maxima ipsarum & minima quam dupla reliquae maiores erunt. 68.b

Si prima ad secundam maiorem habeat proportionem, quam tertia ad quartam, & convertendo secunda ad primam minorem proportionem habebit, quam quarta ad tertiam. 69

Si prima ad secundam maiorem proportionem habeat, quam tertia ad quartam, & permutando prima ad tertiam maiorem habebit proportionem, quam secunda ad quartam. 69

Si prima ad secundam maiorem proportionem habeat, quam tertia ad quartam, etiam componendo prima, & secunda ad secundam maiorem proportionem habebit, quam tertia, & quarta ad quartam. 69.b

Si prima, & secunda ad secundam maiorem habeat proportionem, quam tertia, & quarta ad quartam, & diuidendo prima ad secundam maiorem proportionem habebit, quam tertia ad quartam.

Si prima, & secunda ad secundam maiorem proportionem habeat, quam tertia, & quarta ad quartam, per conversionem rationis prima & secunda ad primam minorem habebit proportionem, quam tertia, & quarta ad tertiam. 70

Si prima ad tertiam maiorem proportionem habeat, quam secunda ad quartam, etiam prima ad tertiam habebit maiorem proportionem, quam prima & secunda ad tertiam & quartam.

Si tota ad totam maiorem habeat proportionem, quam ablata ad ablatam, & reliquae ad reliquae maiorem proportionem habebit, quam tota ad totam.

Si sint tres magnitudines, & aliae ipsarum numero aequales, habeatq, prima priorum ad secundam maiorem proportionem, quam prima posteriorum ad secundam, secunda vero priorum ad tertiam maiorem proportionem habeat, quam secunda posteriorum ad tertiam; etiam ex aequali prima priorum ad tertiam maiorem habebit proportionem, quam prima posteriorum ad tertiam. 70.b

IN SEXTO LIBRO.

T riangula & parallelogramma in æqualibus basi- bus configuta, eadẽ inter se proportionem habent, quam eorum altitudines.	72. b
Propositio VI. aliter demonstratur.	74. b
Datam rectam lineam in datam proportionem secare.	75. b
In dato triangulo quadratum describere.	76
Tribus datis rectis lineis <i>AB. BC. & D.</i> Inuenire vt <i>AB</i> ad <i>BC</i> , ita aliam quandam ad ip- sam <i>D.</i>	76. b
Si rectilinea æqualia, & similia sint, homologa ipsorum latera inter se æqualia erunt.	81
Triangula, quę vnium angulum vni angulo æqualem habent, proportionem habere ex lateribus compositam.	81. b
Quomodo ex duobus datis proportionibus, vel etiam pluribus proportio componatur.	
Proportio data ex data proportione maiori quo pacto auferatur.	
Quomodo in numeris proportionibus & componantur, & auferantur.	
Triangula, quorum vnus angulus vni angulo est æqualis inter se proportionem habent eandẽ, quam rectangula, quę lateribus æqualem angulum comprehendentibus continentur.	
Parallelogramma equiangula inter se proportionem habere eandẽ, quam rectangula, quę ipso- rum lateribus continentur.	82
Triangula, & parallelogramma inter se proportionem habent compositam ex proportione basiũ, & proportione altitudinum.	
Propositio XXVII aliter explicatur.	84
Duorum rectilineorum inequalium excessum, quo maius superat minus inuenire.	84. b
Theorema Tappi, quod multo vniuersalius est, quam XXXI Euclidis.	

IN SEPTIMO LIBRO.

E xpositis duobus numeris inter se primis, si de maiori semper minor detrahatur, non cessabit huiusmodi detractio antequam ad vnitatem deuentum fuerit.	90
Expositis duobus numeris inter se compositis, si de maiori semper detrahatur minor, detractio ad vnitatem vsque non perueniet.	
Duobus numeris expositis, comperire an inter se primi sint, an compositi.	
Si numerus plures numeros metiatur, & communem eorum mensuram metiri.	91
Si numerus numeri multiplex fuerit, et alter alterius eque multiplex; & vterque vtriusque eque multiplex erit, atque vnus vnus.	91. b
Si fuerint quotcumque numeri quotcumque numerorum æqualium multitudine singuli singulorum eque multiplices; quotuplex est vnus vnus, totuplices erunt & omnes omnium.	
Si quotcumque numeri minores ad totidem alios maiores referantur, sintq; singuli singulorum, vel eadem pars, vel eadem partes; quę pars, vel partes est vnus vnus, eadem pars, vel eadem par- tes erunt & omnes omnium.	92
Si numerus numeri eque multiplex fuerit, atque ablatus ablati; & reliquis reliqui eque multi- plex erit, atque totus totius.	
Quę eidem eadẽ sunt numerorum proportionibus, & inter se eadẽ erunt.	93. b
Si quattuor numeri proportionales sint, & conuertendo proportionales erunt.	94. b
Si quattuor numeri proportionales sint, & componendo proportionales erunt.	
Si quattuor numeri proportionales sint, & diuidentur proportionales erunt.	
Si quattuor numeri proportionales sint, & per conuersionem rationis proportionales erunt.	
Si primus ad secundum eandẽ habeat proportionem, quam tertius ad quartum; habeat autem & quintus ad secundum proportionem eandẽ, quam sextus ad quartum; & compositus pri- mus, & quintus ad secundum eandẽ proportionem habebit, quã tertius & sextus ad quartum.	
Si numerus aliquis plures numeros multiplicans fecerit totidem alios, facti eandẽ, quam multipli- cati proportionem habebunt.	95. b
Si	

Si plures numeri numerum aliquem multiplicantes fecerint totidem alios, facti eandem, quam multiplicantes proportionem habebunt. 95. b
Numeris quotcumque datis deinceps proportionalibus, inuenire duos minimos, qui eandem, quam ipsi proportionem habeant. 99. b

IN OCTAVO LIBRO.

Plani numeri, qui proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, inter se similes sunt. 109
Solidi numeri, qui proportionem habent, quam numerus cubus ad numerum cubum, inter se similes sunt. 109. b

IN NONO LIBRO.

Sicibus numerus numerum non cubum multiplicans faciat aliquem, factus non erit cubus: 111
Si cubus numerus numerum aliquem multiplicans faciat numerum non cubum, & multiplicatus non erit cubus.

Si duobus numeris propositis, eorum alter in quotlibet numeros diuidatur, numerus planus, qui fit ex duobus numeris ab initio propositis, & qualis erit numeris planis, qui ex numero indiuiso, & singulis partibus numeri diuisi sunt. 114

Si numerus in duos numeros diuidatur, duo numeri plani, qui sunt ex toto, & vtraque parte inter se compositi aequales sunt numero quadrato, qui à toto efficitur.

Si numerus in duos numeros diuidatur, planus numerus, qui ex toto, & vna parte fit, & qualis est plano, qui fit ex partibus vna cum eo quadrato, qui à prædicta parte efficitur. 115

Si numerus diuidatur in duos numeros, qui à toto fit quadratus & qualis est quadratis, qui à partibus sunt, & ei, qui bis ex dictis partibus fit numero plano.

Si par numerus bisariam diuidatur, diuidatur autem & in numeros inæquales, qui ex inæqualibus partibus fit numerus planus, vna cum quadrato numeri interiecti, & qualis est ei, qui ex dimidio fit quadrato.

Si par numerus bisariam diuidatur, adijciaturq; ipsi numerus aliquis, qui fit ex toto cum adiecto, & adiecto planus numerus vna cum quadrato dimidij est & qualis quadrato eius, qui ex dimidio & adiecto constat. 115. b

Si numerus in duos numeros diuidatur, qui à toto fit quadratus vna cum quadrato vnus partis & qualis est numero plano, qui bis fit ex toto, et dicta parte vna cum relique partis quadrato. 116

Si numerus in duos numeros diuidatur, qui quater ex toto, et vna parte fit numerus planus vna cum quadrato relique partis & qualis est quadrato, qui à toto, et dicta parte tamquam ab vno efficitur. 116

Si par numerus bisariam diuidatur, diuidatur autem & in numeros inæquales, quadrati, qui ab inæqualibus numeri sunt, dupli sunt eius quadrati, qui fit à dimidio vna cum quadrato numeri inter ipsos interiecti.

Si par numerus bisariam diuidatur, adijciaturq; ipsi alter numerus, qui fit ex toto cum adiecto, & qui ex adiecto vtri que quadrati, dupli sunt quadrati ex dimidio, & quadrati qui ex dimidio et adiecto tamquam ex vno efficitur. 116. b

Illud autem, quod vndecime secundi libri respondet, nempe numerum ita diuidere, vt qui ex toto & altera parte fit numerus planus, & qualis fit ei, qui à reliqua parte fit quadrato, nullo modo fieri potest.

IN DECIMO LIBRO.

Propositis duabus magnitudinibus commensurabilibus, quam inter se proportionem habeant in numeris inuenire. 126. b

Duobus datis numeris, & recta linea, facere vt numerus ad numerum ita quadratum rectæ lineæ ad alterius rectæ lineæ quadratum. 130. b

Duos numeros planos dissimiles inuenire. 131

Magnitudines, quæ incommensurabilibus sunt commensurabiles, & inter se incommensurabiles erunt. 132
 Datis

Duabus datis rectis lineis inaequalibus inuenire id, quo maior plus potest, quam minor. 132
 Datis duabus rectis lineis, quae ipsas potest, quo pacto inueniatur.
 Si tota magnitudo ex duabus magnitudinibus composita vni componentium sit incommensurabilis
 & reliquis incommensurabilis erit. 133
 Si ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum deficiens figura quadrata, parallelo-
 gramum applicatum quale est ei rectangulo, quod partibus rectae lineae ex applicatione factis
 continetur. 133.b
 Si duae rectae lineae inaequales sint, quarta autem pars quadrati, quod a minori sit, ad maiorem appli-
 cetur, deficiens figura quadrata; quod applicatum est per bipartitam sectionem non transit.
 Duabus datis rectis lineis inaequalibus, quartam partem quadrati minoris ad maiorem applicare,
 ita ut deficiat figura quadrata.
 Datam rectam lineam ita secare, ut rectangulum, quod partibus continetur sit aequale dato recti-
 lino. oportet autem datum rectilincium minus esse quadrato, quod a dimidia describitur. 134.b
 Datum numerum in duas partes ita diuidere, ut qui ex ipsis produciatur dato numero sit aequalis.
 oportet autem datum numerum, cui aequalis esse debet, quadrato dimidii minorem esse.
 Rationales magnitudines commensurabiles esse: 135.b
 Inuenire duas rationales potentia commensurabiles.
 Rationali commensurabile & ipsam rationale esse. 136
 Quod duabus datis rectis lineis rationalibus continetur rectangulum datum erit. 136
 Si ad datam rectam lineam rationalem applicetur spatium datum, & latitudo quam facit, data erit. 136.b
 Quae ex duabus rationalibus longitudine commensurabilibus rectis lineis componitur recta linea
 data erit. 137.b
 Duarum datarum rationalium, quae inaequales sint, & longitudine commensurabiles differentia
 data erit. 138
 Inuenire duas rationales potentia solum commensurabiles. 138.b
 Recta linea, quae potest irrationale spatium, irrationalis est. 138.b
 Media est irrationalis, quae potest spatium contentum rationalibus potentia solum commensura-
 bilibus. 139
 Mediam, quae vna est irrationalium in geometrica analogia considerare.
 Si sint duae rectae lineae, erit ut prima ad secundam, ita quadratum, quod sit a prima ad rectangu-
 lum, quod duabus rectis lineis continetur. 139.b
 Spacium medio spacio commensurabile medium est. 140.b
 Quod datis duabus medijs, vel media, & rationali continetur rectangulum datum erit. 141
 Si ad datam mediam applicetur spatium datum, latitudo quam facit, data erit.
 Quae ex duabus datis medijs longitudine commensurabilibus componitur recta linea data erit. 141.b
 Duarum datarum mediarum, quae inaequales sint, & longitudine commensurabiles differentia data erit. 142
 Rationale non superat rationale nisi rationali. 143.b
 Inuenire duos numeros quadratos, ita ut qui ex ipsis componitur, etiam quadratus sit 144.b
 Inuenire duos numeros quadratos, ita ut ipsorum excessus sit quadratus. 144.b
 Si sint duae rectae lineae in proportionem aliquam, erit ut recta linea ad rectam lineam, ita rectangulum
 ex duabus rectis lineis contentum ad quadratum minoris. 146
 Si fuerint tres rectae lineae in proportionem aliquam, erit ut prima ad tertiam, ita rectangulum con-
 tentum prima, & media ad id, quod media & tertia continetur. 146.b
 Ex duobus spacijs irrationalibus inter se compositis, totum fieri rationale. 148
 Data recta linea, quae sit ex binis, vel pluribus nominibus, & quadratum eius datum erit. 148.b
 Datis duabus rectis lineis, quae ex binis, vel pluribus nominibus constant & rectangulum ipsis
 contentum datum erit. 149
 Data apotomes quadratum datum erit.
 Datis duabus rectis lineis earum, quas apotomas appellamus, & rectangulum quod ipsis conti-
 netur, datum erit.
 Data recta linea, quae sit ex binis, vel pluribus nominibus, & data apotoma, rectangulum, quod ip-
 sis

sis continetur datum erit. 149.b
 Si plus per minus, vel minus per plus multiplicetur, produci minus.
 Spatium ex medijs compositum irrationale est. 155.b
 Binomialis spacijs latus quadratum, vel radicem inuenire. 160
 Si recta linea in partes inaequales secetur, ipsarum partium quadrata maiora sunt rectangulo, quod
 his dictis partibus continetur. 162.b
 Sint quattuor magnitudines AB C EF G & AB excedat ipsam C eodem excessu, quo EF exce-
 dit G . Dico & permutando AB eodem excessu excedere ipsam EF , vel excedi ab ea, quo C ex-
 cedit G , vel ab ea exceditur. 171

IN VNDECIMO LIBRO.

Conuersa X. Si fuerint duo anguli aequales, contenti rectis lineis in eodẽ plano nõ existentibus,
 & earum vna parallela sit vni continentium aequalem angulum; & reliqua reliqua pa-
 rallela erit. 195
 Conuersa XIII. Si duo plana parallela fuerint, recta linea, quæ ad vnum ipsorum est perpendicu-
 laris, etiam ad reliquum perpendicularis erit. 196
 Conuersa XIV. Si omnia, quæ per aliquam rectam lineam plana producuntur, capiamus plano
 ad rectos fuerint angulos; & recta linea eidem plano ad rectos angulos erit. 197.b
 Conuersa XIX. Quorum planorum sese mutuo secantium communis sectio alicui plano ad rectos
 fuerit angulos, & secantia plana eidem plano ad rectos angulos erunt.
 Si fuerint quotlibet anguli plani, quorum vno reliqui sint maiores, quomodocumque sumpti; conti-
 neant autem ipsos rectæ lineæ æquales. Dico & rectarum linearum angulos subtendendum, vna
 reliquas maiores esse quomodocumque sumptas, hoc est fieri posse, vt ex ijs, quæ rectas lineas
 coniungunt, multorum laterum figura constituatur. 200.b
 Si in aliquod planũ a quodam sublimi puncto æquales rectæ lineæ cadant, in circuli erunt circum-
 ferentia; & quæ a dicto puncto ad centrũ circuli ducitur, ad circuli perpendicularis erit. 201
 Omnis angulus solidi, qui equicruribus planis continetur, basim ipsam in circulo describi. 201.b
 Ex planis quotlibet datis angulis quorum vno reliqui sint maiores, quomodocumque sumpti, soli-
 dum angulum constituere, oportet autem datos angulos quattuor rectis esse minores.
 Si solidum parallelis planis contineatur, opposita ipsius plana & equalia esse, & similia. 202.b
 Si solidum parallelepipedum secetur plano basibus parallelo, erit solidum ad solidum, vt altitudo
 ad altitudinem. 203
 Solida parallelepipeda in eadem basi, vel in æqualibus basibus constituta, eam inter se proportio-
 nem habere, quam altitudines. 205.b
 Prismata triangulares bases habentia, quæ vel in eisdem, vel æqualibus basibus constituuntur, &
 eadem altitudine, inter se equalia esse. Et in super quæ eandem habent altitudinem inter se esse,
 vt bases. Et quæ vel in eisdem vel æqualibus basibus constituuntur, inter se esse, vt altitudines.
 Aequalium prismatum, & triangulares bases habentium, bases ex contraria parte altitudi-
 nibus respondent. Et quorum prismatum triangulares bases habentium, bases ex contraria parte
 altitudinibus respondent ea inter se sunt equalia. 207.b
 Propositio XXXVIII alter demonstratur. 209.b

IN DVODECIMO LIBRO.

In dato circulo, descripto in circulo polygono simile polygonum describere. 212.b
 Prismata omnia, quæ eadem sunt altitudine inter se esse, vt bases. 215.b
 Prismata omnia, & pyramides, quæ in eisdem, vel æqualibus basibus constituuntur eam inter se
 proportionem habent, quam altitudines.
 Prismata omnia, & pyramides inter se proportionem habent compositam ex proportionem basium
 & proportionem altitudinum. 216
 Pyramides similes, quæ multiangulas bases habent, diuidi in pyramides triangulares bases ha-
 bentes similes, & numero æquales, & homologas totis. 216.b
 Prisma

Prisinata similia, quæ triangulares bases habent in pyramides similes, numeroq; æquales diuiduntur: & prisina ad prisina triplam habet proportionem eius, quam latus homologum habet ad homologum latus. 217

Prisinata similia, quæ multiangulas habent bases in similia prisinata, triangulares bases habentia diuiduntur, numeroq; equalia, & homologa totis: & prisina ad prisina triplam proportionem habet eius, quam latus homologum habet ad homologum latus. 217.b

Aequalium pyramidum & multiangulas bases habentium, bases ex contraria parte altitudinibus respondent: & quarum pyramidum multiangulas bases habentium, bases ex contraria parte altitudinibus respondent, illæ sunt æquales. 218.b

Prisinatum omnium equalium bases ex contraria parte altitudinibus respondere, & quorum prisinatum bases ex contraria parte altitudinibus respondent, ea esse equalia. 219

Omnem conum siue rectum, siue scalenum tertiam partem esse cylindri siue recti, siue scaleni, qui eandem basim habet, & eandem altitudinem. 220

Similes coni & cylindri omnes inter se in tripla sunt proportionem diametrorum, quæ sunt in basibus. 222

Si cylindrus scalenus plano secetur oppositis planis parallelo, erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. 223.b

Si quilibet cylindrus secetur plano basibus parallelo, ut cylindrus ad cylindrum, ita esse altitudinem cylindri ad cylindri altitudinem. 223.b

Conorum omnium & cylindrorum equalium bases ex contraria parte altitudinibus respondent, & quorum conorum & cylindrorum bases ex contraria parte altitudinibus respondent, illi inter se sunt æquales. 224

Cylindri omnes, & coni inter se proportionem habent compositam ex proportionem basium, et proportionem altitudinum. 224.b

IN TERTIO DECIMO LIBRO.

Propositio prima aliter demonstratur. 229.b

Data recta linea extrema, ac media ratione secta, & utraque ipsius portio data erit.

Si recta linea rationalis, exposita rationali longitudine commensurabilis, extrema ac media ratione secta fuerit, maiorem eius portionem apotomen esse quintam, & minorem esse apotomen primam:

Data maiori portione, totam rectam lineam, quæ extrema, ac media ratione secta sit, inuenire.

Data maiori portione rectæ lineæ, quæ extrema, ac media ratione secetur, & minorem portionem & totam lineam datam esse. 230

Propositio secunda aliter demonstratur. 230.b

Data minori portione totam rectam lineam, quæ extrema, ac media ratione secta sit, inuenire. 231.b

Data minori portione rectæ lineæ quæ extrema, ac media ratione secatur, & maiorem portionem, & totam lineam datam esse.

Si recta linea extrema, ac media ratione secetur, abscindaturq; à maiori portione linea, quæ minori sit æqualis, erit etiam ea extrema, ac media ratione secta, & maior portio erit quæ abscissa est recta linea. 232.b

Si maior portio rectæ lineæ extrema, ac media ratione secta sit rationalis, exposita rationali longitudine commensurabilis; erit minor portio apotome quinta, & tota ex binis nominibus quinta. 233

Si minor portio rectæ lineæ extrema, ac media ratione secta sit rationalis, exposita rationali longitudine commensurabilis, erit maior portio ex binis nominibus quinta, & tota ex binis nominibus prima. 233.b

Si latus hexagoni extrema, ac media ratione secetur, erit maior eius portio decagoni latus. 234.b

Si in circulo rationalem diametrum habente decagonum æquilaterum describatur, erit decagoni latus apotome quinta. 235

Si latus decagoni æquilateri in circulo descripti sit rationale, erit circuli diameter ex binis nominibus quinta. 235

Latus

Latus trianguli æquilateri ad rectam lineam, quæ ab angulo ad basim perpendicularis ducitur, eam potentia proportionem habere quam 4 ad 3. 236.b

Si sint tres rectæ lineæ, sitq; ut prima ad tertiam, ita quadratum secundæ ad quadratum tertiæ, erunt dictæ lineæ deinceps proportionales. 240

IN QVARTODECIMO LIBRO.

EA, quæ à centro circuli ad latus trianguli æquilateri perpendicularis ducitur, dimidiam esse eius, quæ ex centro circuli: 244

IN QVINTODECIMO LIBRO.

SI à vertice pyramidis ad basim perpendicularis ducatur, cadet ea in centrum circuli, qui circa basis triangulum describitur. 249.b

Recta linea ab angulo trianguli æquilateri ducta per centrum circuli, qui circa triangulum describitur, basim bifariam secat:

Rectam lineam ab angulo trianguli æquilateri ductam per centrum circuli, qui circa triangulum describitur, ad basim perpendicularem esse.

Propositio secunda planius demonstratur. 250

Omne parallelogrammum est in vno plano. 251.b

In dato dodecaedro cubum describere. 255

In dato dodecaedro pyramidem, & octaedrum describere.

In dato Icosaedro cubum describere.

In dato Icosaedro pyramidem describere.

In dato dodecaedro Icosaedrum describere.

F I N I S.

0713 011 140741

.0867 0.4107 1.0223 2.1

1. The first part of the document is a letter from the President of the United States to the Congress, dated January 1, 1801. It contains a report on the state of the Union and the progress of the government during the year 1800.

100

E V C L I D I S ELEMENTORVM LIBER PRIMVS

ΕΥΚΛΕΙΔΕΩΣ
ΕΥΚΛΕΙΔΕΩΣ

FEDERICI COMMANDINI VRBINATIS.

DIFFINITIONES.

I.

PUNCTVM EST, cuius nulla est pars,
vel quod magnitudinem nullam habet.

F. C. COMMENTARIVS.

Euclides per negationem partium significauit nobis punctum, quod est principium totius propositae contemplationis. cum enim principia aliam rationem habeant ab istis, quorum sunt principia, & eorum negationes illorum quodammodo naturam ostendant; non immerito negantes sermones principis ipsis conuenire comperiti sunt: quod etiam asserit Proclus auctoritate Parmenidis. Pythagorici vero per proportionem, & translationem quandam, punctum dissimulant esse unitatem positionem habentem: punctum enim positionem habet, unitas non habet. Aristoteles in quarto diuini philosophie libro. ubique, inquit, ipsam unitatem aut formam, aut quantitatem indiuisibilem. eorum autem, quae quantitate, & ut quantitas est, diuidi non possunt, id quidem, quod penitus est tale, & sine positione, dicitur unitas; quod vero penitus est tale, positionemq; habet, dicitur punctum; & id quod nullo modo diuidi potest, linea nuncupatur; & id quod duobus ex partibus, superficies: quod vero omni ex parte, & triam dimensionem habet, dicitur corpus.

I I.

Linea vero est longitudo latitudinis expers.

F. C. COMMENTARIVS.

Post punctum linea secundum obtinet locum: namque ut punctum ad lineam, ita linea ad superficiem, de qua mox dicetur, rationem habet principij. punctum quidem ipsam, ut magnitudinem omnium principium per solam negationem, lineam vero partim per affirmationem, partim per negationem significauit cum dixit, longitudinem esse latitudinis expertem. si uerum qui lineam aliter distinguunt: alij enim eiusdem generis hoc est puncti fluxum dixerunt; alij ut Aristoteles τὸ μέγεθος μοναχὸν διαίρεται καὶ ἐπ' ἐν διαίρεται hoc est magnitudinem, quae nullo modo diuidi potest, nempe secundum longitudinem. Lineae autem notionem habemus, ut Apollonius inquit, cum longitudo tantum vel vicium, vel partium dimetri volumus; non enim tunc latitudinem; & crassitudinem adiungimus; sed unicam duntaxat dimensionem consideramus; quemadmodum & cum egros metimur, superficiem respicimus; cum autem puteos, solidum: omnes eam dimensiones simul colligentes dicimus tantum esse spacium putei secundum longitudinem, latitudinem, & crassitudinem. sensum uero ipsius lineae habebimus; si distinctiones locorum illuminatorum ab ombrosis inspexerimus, tamen luna, tamen terra; hoc enim medium iuxta latitudinem, dimensionem non habet, sed iuxta longitudinem, quae una cum lumine, & umbra producitur,

Punctum secundum Pythagoricos est unitas positionem habens.

Punctum magnitudinum omnium principium.

Lineae notio.

Superfici nouo. Solidi.

Lineae sensus unde habetur.

A

Lineæ simplices . ductur . linearum aliae simplices , aliae mixtae . simplices sunt recta , & circularis , quamquam recta simplicior sit , reliquae vero omnes mixtae , quales sunt confectiones , helices , conchoides , cissoides , & aliae .

III.

Lineæ fines sunt puncta.

F. C. COMMENTARIUS.

Linea tribus modis utitur Euclides

Cum linea tribus modis utatur Euclides , vel enim terminata , & finita ex utraque parte , vel infinita , vel ex altera quidem parte finita , ex altera vero infinita ; hoc loco de ea , quae vtrinque finita est , sermo habetur ; cuius fines dicitur esse duo puncta . Circularis autem linea per se nullo habet fines ; sed si aliquid in ea punctum accipitur , idem erit & principium , & finis , diuersa tamen ratione . quod diximus de circulari linea , idem & de ellipsi dici potest , quae ipsa in se ipsam vergit sicuti circulus : si autem sumatur portio circularis lineae , seu ellipsis , eius non aliter , quam rectae lineae fines erunt duo puncta . Eodem modo & de alijs curuis lineis intelligendum est .

Circularis linea per se nullo habet fines.

Ellipsis.

III.

Recta linea est , quae ex aequali suis interijcitur punctis.

F. C. COMMENTARIUS.

Hoc est recta linea est , quae aequalem continet distantiam , eam scilicet , quae inter sua interijciuntur puncta . quantum enim alterum punctum ab altero distat , tanta est magnitudo rectae lineae ab ijs terminatae . atque hoc est ex aequali suis interijci punctis . si autem in circumferentia circuli , aut alia quavis linea duo puncta sumantur ; eius portio , quae interijcitur , longe maior erit , quam sit distantia punctorum . ad hunc quidem modum rectae lineae diffinitionem exponere mihi videtur Proclus . Plato autem rectam lineam diffinit esse eam ἡς τὰ μέρη τοῖς ἀκροῖς ἐξίσταται , hoc est cuius media extremis obstat . illud . n . ijs , quae in recta linea sunt , necessario contingit ; ijs vero , quae in circulari , aut alia quapiam linea , non item . Vnde & astrologi dicunt solem deficere , cum in eadem recta linea constituitur ipse , luna , et oculus noster : obstat enim ei tunc luna media existens . At Archimedes , ut Proclus auctor est , dixit rectam lineam esse brevissimam omnium , quae eosdem habent fines . quae quidem diffinitio recepta est in Campani editione : linea , inquit , recta est ab uno puncto ad aliud brevissima extensio in extremitates suas eos recipiens .

Plato q. recta lineam diffinit.

Archimedis diffinitio rectae lineae.

V.

Superficies est id , quod longitudinem , et latitudinem tantum habet.

F. C. COMMENTARIUS.

Superficies variae diffinitiones . Superficies cognitio , & sensus .

Superficiem dixit longitudinem , & latitudinem tantum habere , propterea quod crassitudinis expertis sit . alij corporis terminum ipsam esse diffinierunt ; alij magnitudinem binis distantem inter uallas . superficiei vero cognitionem nos habere dicunt , quando agros dimetimur , & eorum termini nos iuxta longitudinem , ac latitudinem distinguimus . sensum vero quandam capere , quando umbras aspicimus , cum enim ipsae crassitudinis sint expertes , quod partes terrae interiores penetrare non possunt ; latitudinem , & longitudinem tantum habent . superficierum aliae simplices sunt , aliae

alię mixtę . si mplices sunt plana , & spherica , relique vero mixtę , vt Cylindrica , conica , & quę a coni sectionibus ortum habent , videlicet conoidum , & spheroidum figurarum , & alię .

V I.

Superficieci fines sunt lineę .

F. C. COMMENTARIVS.

Quemadmodum non omnis lineę fines sunt puncta , ita non omnis superficieci fines sunt lineę ; superficies enim spheræ , vel spheroidis per se nullos habet huiusmodi fines , nisi planis abscondatur , nam tunc fines habet lineas ipsas , quę ex sectione oriuntur . superficieci autem circuli , & eius , quę ellipsi continetur , finis est linea vna , videlicet circumsferentia , & ellipsis . quod si secentur tunc pro finibus lineas habebunt .

V I I.

Plana superficies est quę ex æquali suis interijcitur lineis .

F. C. COMMENTARIVS.

Antiquiores philosophi (vt testatur Proclus) τὴν ἐπιφάνειαν καὶ τὸ ἐπιπέδον hoc est superficiem , & planum pro vno eodemq; accipiebant . At Euclides , & qui eum secuti sunt genus quidem superficiem faciunt , eius vero speciem planum , vel planam superficiem , quemadmodum lineę speciem rectam lineam . & idcirco planum diffiniunt ex quadam ad rectam lineam proportionē . vt enim recta linea est , quę ex equali suis interijcitur punctis , vel cuius media extremis obstitunt , vel brevissima omnium , quę eisdem habent fines , ita planam superficiem dixerunt esse eam , quę ex equali suis interijcitur lineis , vel cuius media extremis obstitunt , vel brevissimam omnium superficiem eisdem fines habentium , & omnino quęcumque sint rectę lineę diffinitiones , omnes ad planam superficiem commodissime transferri possunt . Quod cum multe sint superficialium species , Euclides planam tantum diffiniuit , atque in hac figuras , & earum affectiones contemplatur .

V I I I.

Planus angulus est duabus lineis in plano se se contingentibus , & non in directum iacentibus , alterius ad alteram inclinatio .

I X.

Quando autem quę angulum continent rectę lineę fuerint , re-
ctilineus angulus appellatur .

F. C. COMMENTARIVS.

Angulum alij quidem in predicamento eorum quę sunt ad aliquid ponentes , inclinationem esse dixerunt , vel linearum , vel planorum , quę ad se inuicem inclinata sunt . alij in qualitate ipsam comprehendentes , vt rectum , & inflexum , talem quandam affectionem dixerunt esse superficieci , vel solidi . alij autem ad quantitatem referentes vel superficiem , vel solidum esse assueverunt . diuiditur , inquit , is , qui in superficie est angulus lineę ; qui in solidis superficie . quod

A 2 autem

Superficies
Spheræ , &
Spheroidis .
Superficies
circuli , & el-
lipsi cõicitæ .

Superficiē ,
& planū An-
tiqui pro eo-
dem accipie-
bant .

Planę super-
ficieci vtri-
usque diffinitionē

Euclides su-
perficieci planam
tantum diffiniuit .

autem his dividitur nihil aliud est, nisi magnitudo; & hæc non linearis, namque lineam punctum dividit. quare relinquitur, ut sit superficies, vel solidum. Quid igitur in tanta controversia dicendum? aut quid eorum dicemus esse angulum? Respondet Proclus angulum nihil esse eorum per se, sed ex concursu omnium constitui. contingere autem hoc non solum angulo, sed & ipsi triangulo, quod quidem particeps est quantitatis; & idcirco æquale dicitur, & inæquale; ut pote materie rationem habens, particeps quoque est qualitatis eius, quæ ad figuram pertinet, quoniam & similia dicuntur triangula, & inæqualia. Ita igitur angulus quoque omnino quidem indiget quantitate, indiget autem & qualitate, per quam veluti propriam habet formam, & existentie figuram. indiget denique & determinantium ipsam linearum, vel planorum comprehenduntur habitudine. atque ex his omnibus angulus constat. non tamen est unum aliquod eorum, & est quidem divisibilis, & equalitatem, & inæqualitatem suscipere potest, iuxta eam, quæ in ipso est, quantitatem.

Angulorū
divisio.

Angulorum alij quidem in superficibus, alij vero in solidis consistunt: & eorum qui in superficibus alij in simplicibus, alij in mixtis. Eorum qui in planis sunt alij simplicibus lineis comprehenduntur, alij mixtis, alij utrisque. omnes autem qui rectis comprehenduntur lineis rectilinei appellantur.

X.

Cum vero recta linea super rectam lineam insitens eos, qui deinceps sunt angulos æquales inter se fecerit, rectus est uterque equium angulorum: et quæ insistit recta linea perpendicularis vocatur ad eam, cui insistit.

X I.

Obtusius angulus est, qui maior est recto.

X I I.

Acutus autem, qui recto est minor.

F. C. COMMENTARIUS.

Angulus cornicularis.
Semicirculi angulus.

In diffinitione anguli obtusi, & acuti genus subintelligi oportet, est enim uterque ipsorum rectiliniens; hic quidem minor recto, ille autem maior. Sed non simpliciter quicumque minor est recto, is est acutus; neque quicumque maior recto est obtusus. nam qui grece negatoides dicitur, hoc est cornicularis, qui continetur recta linea circum contingente, & circumferentia ipsa, non tantum recto, sed etiam omni acuto est minor, acutus autem non est. & semicirculi angulus omni recto est minor, sed tamen non est acutus, quorum quidem causa est, quod sunt mixti, & non rectilinei. & eorum, qui lineis circulatorybus, aut aliqui curvis continentur multi recto maiores apparent, non tamen sunt obtusi.

Anguli deinceps qui sit.

Cum igitur rectam angulum diffinire proposuisset Euclides rectam assumpsit lineam super aliam rectam insistentem; & angulos, qui ex utraque parte sunt, quos angulos deinceps appellat, inter se æquales facientes. Obtusum autem, & acutum diffiniens non item assumpsit rectam lineam ad alteram partem

partem inclinatum, sed per comparationem ad rectum explicauit. ipse enim etiam non rectorum mensura est, quemadmodum & inaequalium equalitas. lineæ vero ad alterutram partem inclinæ infinite sunt, & non una tantum, ut perpendicularis. Illud autem meminisse oportet Euclidem hoc loco de ijs sermonem habere, quæ in eodem plano consistunt. quare neque perpendicularem omnem distinguat, neque omnem angulum. solida enim perpendicularis non ad unam tantum rectam lineam angulos rectos facit, sed ad omnes, quæ ipsam tangunt, in subiecto existentes planis, de qua in undecimo libro agitur.

Angulus rector est non rectorum mensura, quemadmodum inaequalium equalitas.

X I I I.

Terminus est, qui alicuius est finis.

F. C. COMMENTARIUS.

Terminum non ad omnem magnitudinem referri oportet, ut scribit Proclus. lineæ namque terminus est, & finis, sed ad spacia, quæ sunt in superficiebus, & ad solida. nunc enim terminum vocat ambitum, qui spacium vnumquodque determinat; & huiusmodi terminum finem esse dicit, non ut punctum dicitur lineæ finis, sed ut includit, & seingit ab ijs, quæ circumposita sunt. est autem hoc nomen prisce illi geometrie proprium, per quam agros metiebantur, & eorum terminos distinctos seruabant, ex qua huius scientie cognitionem affectui sunt. huiusmodi igitur ambitum exteriorum terminum vocans Euclides iure, & merito ipsum suum determinauit spaciorum. per hunc enim vnumquodque contentorum presinitur, veluti in circulo, circumferentia quidem terminus est, & finis; ipsam vero planum aliquod spacium est, & similiter in triangulo tria latera, & in quadrilatero quattuor latera termini sunt, & fines; spacium vero, quod his lateribus continetur.

Terminus, & finis.

X I I I I.

Figura est, quæ aliquo, vel aliquibus terminis continetur.

F. C. COMMENTARIUS.

Figurarum alia planæ, alia solidæ. planarum figurarum circulus quidem, & ellipsis, solida sphaera, & spheroides vnicò termino, aliæ pluribus terminis continentur.

Figurarum alia planæ, alia solidæ.

X V.

Circulus est figura plana una linea contenta, quæ circumferentia appellatur: ad quam ab vno puncto intra figuram existente omnes rectæ lineæ pertinentes sunt equales.

X V I.

Hoc autem punctum centrum circuli nuncupatur.

F. C. COMMENTARIUS.

Circulus planarum figurarum prima est, simplicitate quidem solidis prestant; vnitatis vero ad planas rationem habens.

Figura] loco generis. Plana] ad differentiam figurarum solidarum. Vna linea contenta] ut differat ab ijs, quæ pluribus lateribus continentur. quæ circumferentia appellatur] per hoc differt ab ellipsi, quæ & ipsa una linea continetur, sed eam ellipsim vocant. liceat enim mihi nunc spacium ellipsi contentum etiam ellipsim appellare. Ad quam] ab ellipsi autem centro non plures, quam quattuor rectæ lineæ equales ad ambitum duci possunt. ab vno puncto] ex infinitis punctis, quæ intra figuram sunt, vnum duntaxat hoc prestare potest. intra figuram existente] est etiam punctum extra figuræ planam, à quo omnes rectæ lineæ ad circumferentiam ductæ sint equales, quod non centrum, sed circuli polus in sphericis appellatur.

Ellipsis.

Circuli polus.

Diameter

Diameter circuli est recta quædam linea per centrum ducta, & ex vtraque parte à circumferentia circuli terminata, quæ quidem et bifariam circulum secat.

F. C. C O M M E N T A R I I S .

Diametri pa-
rallelo gram-
morum.

Diameter circuli] sunt enim parallelogrammorum quoque diametri, sed hæc interdum à
760101 hoc est diagonij appellantur. sint & diametri ellipsis, quarum duæ axes dicuntur. præ-
terea etiam sphaeræ diametri sunt, quæ axes nuncupantur. circuli igitur propria est diameter. re-
cta quædam linea per centrum ducta] possunt namque in circulo duci infinitæ rectæ li-
neæ, quæ per centrum non transeunt. & ex vtraque parte à circumferentia circuli termi-
nata.] rectæ lineæ etiam per centrum ductæ, quæ vel citra, vel ultra circumferentiam terminan-
tur, diametri non sunt. quæ & bifariam circulum se-
cat.] sit enim circulus $A B C D$, cuius diameter $A C$:
et stante diametro intelligatur circumferentiæ $A B C$ ele-
uari, ac superponi circumferentiæ $A D C$. Dico circum-
ferentiam $A B C$ ipsi $A D C$ congruere. si enim non con-
gruit, vel cadet extra, vel intra, vel partim extra, par-
tim intra. cadat primum extra si fieri potest: & ex cen-
tro circuli, quod sit E , ducatur $E B$ secans circumferen-
tiam $A D C$ in F . quoniam igitur rectæ lineæ à centro
ad circumferentiam ductæ inter se sunt æquales, erit ve-
lita linea $E B$ æqualis ipsi $E F$, hoc est totum parti
quod fieri non potest. quare circumferentiæ $A B C$ ex-
tra ipsam $A D C$ non cadet. similiter demonstrabimus neque eam cadere intra, neque partim ex-
tra partim intra. in ipsam igitur cadat necesse est: & circumferentiæ $A B C$ congruet ipsi $A D C$.
Quod si circumferentiæ circumferentiæ congruit, & superficies contenta recta linea $A C$, & cir-
cumferentiæ $A B C$ congruet superficiei, quæ eadem $A C$, & circumferentiæ $A D C$ continetur.
ex quibus sequitur per octauam communem notionem & circumferentiam circumferentem ξ , & su-
perficiem superficiei æqualem esse. diameter igitur $A C$ circulum $A B C D$ bifariam secat. quod
oportebat demonstrare.

X V I I I .

Semicirculus est figura, quæ continetur diametro, & ea quæ ex ipsa circuli circumferentia intercipitur.

X I X .

Portio circuli est figura, quæ recta linea, & circuli circumferentia continetur.

F. C. C O M M E N T A R I I S .

Ex circuli quidem, diffi-
nitione centri naturam in-
uenit, ab omnibus alijs pun-
ctis quæ in circulo sunt dif-
ferentem; à centro autem
diametrum diffiniuit, &
ab omnibus alijs rectis li-
neis, quæ intra circulum
describuntur, seimixit.
nunc autem à diametro
quid nam sit semicirculus
tradit, cum dicat ipsum
contineri duobus terminis, ijsq; semper differentibus, videlicet recta linea, & circumferentia.

•••••

& rectam lineam non esse quamlibet, sed circuli diametrum, si quidem & minor portio circuli, & maior continetur recta linea, & circumferentia; quæ tamen semicirculi non sunt, quoniam circuli diuisio non est facta per centrum. omnes autem huiusmodi figuræ bifformes sunt, & ex dissimilibus constant. figuræ enim contentæ duobus terminis, vel duabus circumferentijs continentur, vt lunularis, vel recta linea, & circumferentia, vt iam dictæ, vel duabus lineis mixtis, vt si duæ ellipses se inuicem secant, figuram continebunt, quæ inter ipsas in terijcitur, vel mixta & recta, vt ellipsis dimidium, itaque semicirculus duabus quidem lineis dissimilibus, sed tamen simplicibus, atque ad se se applicatis continetur. antequam igitur triadicas figuras diffiniat, iure merito post circulum ad bifformes accessit, quoniam duæ rectæ lineæ spacium concludere nunquam possunt; recta autem linea & circumferentia possunt. & duæ circumferentiæ similiter vel angulum facientes, vt in lunulari, vel si figuram angulis expertem, vt si duos intelligas circulos idem centrum habentes. quod enim medium interijcirur spacium duabus circumferentijs continetur interiori, & exteriori, & nullus fit angulus, cian se inuicem non secant, vt in lunulari, & vtrunque conuexa figura. At vero centrum semicirculi idem esse, quod & circuli centrum, manifeste constat. diameter enim centrum in se habens complet semicirculum. Illud autem notatione dignum solam hanc figuram ex planis in ambitu centrum habere. vnde colligitur centri tres esse locos, vel enim intra figuram, vt in circulo & ellipsi, vel in ambitu vt in semicirculo, vel extra, vt in vna sectionum conicarum, videlicet in hyperbola.

Centrū tres
habet locos.

X X.

Rectilineæ figuræ sunt, quæ rectis continentur lineis.

X X I.

Trilateræ quidem, quæ tribus.

X X I I.

Quadrilateræ, quæ quattuor.

X X I I I.

Multilateræ vero, quæ pluribus, quàm quattuor rectis lineis comprehenduntur.

F. C. COMMENTARIUS.

Post circulum, semicirculum, & circuli portiones, transit ad figuras rectilineas, quæ quidē ordinatim per numeros in infinitum procedunt, initium ducentes à ternario, quoniam duæ rectæ lineæ spacium concludere non possunt, vti dictum est. Meminit autem trilaterarum, & quadrilaterarum diu taxat figurarum, vtpote quæ magis elementares sunt; in primo enim libro de triangulis, & parallelogrammis agit, reliquas communi nomine multilateras appellans. Porrò figurarum planarum aliae simplicibus continentur lineis, aliae mixtis, aliae vtrisque. & earū, quæ simplicibus aliæ quidem similibus specie continentur, vt rectilineæ, aliæ specie dissimilibus, vt semicirculi, & circulorum portiones. earum insuper, quæ specie similibus aliæ circulari cōprehenduntur lineæ, aliæ rectæ. At earū quæ circulari, aliæ duabus, aliæ pluribus continentur & vna quidem circulus ipse, quæ vero duabus, aliæ angulorum expertes sunt,

Figurarum
planarum di-
uio.

Corona.

sint, ut corona, quae concentricis circulis terminatur, aliae angulares ut meniscus earum quae pluribus, quam duobus continentur, processus est in infinitum: tribus namque, & quattuor, et quae deinceps sunt circumferentijs quaedam figurae comprehenduntur. si enim tres circuli se contingant, spacium concludit trilaterum, quod tribus circumferentijs terminatur, si vero quattuor, quattuor circumferentijs, & deinceps similiter. postremo earum, quae rectis lineis, aliae quidem tribus, aliae quattuor, aliae pluribus continentur.

XXVII.

Trilaterarum figurarum æquilaterum est triangulum, quod tria latera habet æqualia.

XXVIII.

Isoceles, siue æquicrura, quod duo tantum æqualia latera habet.

XXIX.

Scalenum vero est, quod tria inæqualia habet latera.

XXX.

Adhæc, trilaterarum figurarum, rectangulum quidem est triangulum, quod rectum angulum habet.

XXXI.

Obtusiangulum est, quod obtusum habet angulum.

XXXII.

Acutiangulum vero, quod tres acutos angulos habet.

F. C. COMMENTARIUS.

Triangulorum diuisio interdum quidem à lateribus, interdum vero ab angulis ortum habet: & præcedit ea, quae à lateribus tamquam nota, sequitur autem ea quae ab angulis tamquam propria, quoniam & tres ipsi anguli, videlicet rectus, obtusus, & acutus, solis rectilineis figuris conveniunt: æqualitas verò laterum, & inæqualitas inveniuntur etiam in his, quae rectilineae non sunt. dicit igitur triangulorum alia esse æquilatera, alia æquicrura, alia scalena, vel enim omnia latera æqualia sunt, vel omnia inæqualia, vel duo tantum æqualia. Rursus triangulorum alia rectangula, alia obtusiangula, alia acutiangula, & rectangulum quidem diffinit, quod unum angulum rectum habet, quemadmodum obtusiangulum, quod unum habet

habet obtusum, fieri enim non potest, ut triangulum plures uno, vel rectos, vel obtusos angulos habeat: acutiangulum vero, quod omnes habet acutos; non enim satis est unum acutum habere, omnia si quidem triangula hoc modo acutiangula essent, namque omne triangulum duos habeat acutos necesse est, tres autem acutos acutiangulum solum. ex his divisionibus colligitur septem tantum esse triangularium rectilinearum species, & neque plures, neque pauciores. æquilaterum enim acutiangulum tantum est: reliquorum vero unumquodque est triplex; nam æquicrurum vel rectangulum est, vel obtusiangulum, vel acutiangulum: & similiter scalenum vel rectangulum, vel obtusiangulum, vel acutiangulum.

Septem triangularium rectilinearum species.

X X X.

Quadrilaterarum figurarum quadratum est quod & æquilaterum est, & rectangulum.

X X X I.

Altera parte longior figura est, quæ rectangula quidem, æquilatera vero non est.

X X X I I.

Rhombus, quæ æquilatera quidem, sed rectangula non est.

X X X I I I.

Rhomboides, quæ & opposita latera, & oppositi angulos inter se æquales habet, neque æquilatera est, neque rectangula.

X X X I I I I.

Præter has autem reliquæ quadrilateræ figuræ trapezia vocentur.

F. C. COMMENTARIUS.

Quadrilaterarum figurarum alia æquilateræ sunt, alia non æquilateræ. rursus alia rectangulæ; alia non rectangulæ. quæ igitur æquilateræ, & rectangulæ sunt quadrata appellantur. quæ vero rectangulæ & non æquilateræ, altera parte longiores: & quæ æquilateræ, & non rectangulæ, rhombi. & postremo quæ neque æquilateræ, neque rectangulæ latera habent, & angulos, qui è regione sunt inter se æquales, rhomboides vocantur. alij in hunc modum dividunt. Quadrilaterarum figurarum alia parallelogramma sunt, quæ la-

Quadrilaterarum figurarum divisiones.

Quadrati.

Altera pars longius.

Rhombus. Rhomboides.

B tera

Quadrata.
τετράγωνον
v8

Rhomboi-
dea.

Rhombus.

Trapezia.

Trapezoi-
dea.

Trapezia ac-
quiciuria, &
Scala.

In quibus
proprijs rōni-
bus caemus,
cōmūibū
utendum.

tera ex opposito parallela habent, non parallelogramma vero, quae latera parallela non ha-
bent. parallelogrammorum autem alia quidem & rectangula, & aequilatera sunt ut quatra-
ta, quae à grecis τετράγωνον appellantur, alia neque rectangula, neque aequilatera, ut rhom-
boidea, quae figuram rhombo similem habent. alia rectangula quidem, sed non aequilatera, ut
altera parte longiora; alia è contrario aequilatera quidem, non autem rectangula, ut rhom-
bus. non parallelogrammorum vero alia duo latera tantum habent parallela, alia nulli pro-
fus parallela habent: & illa quidem vocantur trapezia, haec vero trapezoides. Trape-
ziorum alia quidem latera, quae parallelas lineas coniungunt, aequalia habent, alia vero
inaequalia. & illa acquicuria trapezia, haec scalena trapezia appellantur. quadrilatera igitur
figura septem modis constituitur. nam prima quidem quadratum est, secunda altera parte
longius, tertia rhombus, quarta rhomboides, quinta acquicuria trapezium, sexta scalenum trape-
zium, septima trapezoides. Euclides autem figuras quadrilateras in parallelogramma, & non
parallelogramma dividere minime potuit, quippe qui neque de parallelis, neque de parallelogra-
mo prius tractavit: trapezia autem, & trapezoides omnia communī nomine appellantur trape-
zia ad eorum quatuor differentiam, in quibus parallelogrammorum inest proprietates, nempe
ex opposito latera & angulos habere aequales; quod ipse in rhomboides tantum posuit, ne solis
negationibus ipsam diffiniret, cum dixit, neque aequilaterum, neque rectangulum; in quibus
cum proprijs caremus rationibus, communibus uti necessarium est. videtur autem rhombus
dimotum esse quadratum, & rhomboides dimotum altera parte longius, propterea quod iuxta
latera quidem haec ab illis non differunt, sed iuxta angulorum duntaxat obtusitates, & acumi-
na, cum illa rectangula sint.

X X X V.

Parallelae, seu aequidistantes
rectae lineae sunt, quae cum in co-
dem sint plano, & ex vtraque par-
te in infinitum producatur, in neu-
tram partem inter se conveniunt.

F. C. COMMENTARIUS.

Quae nam sint parallelarum, seu aequidistantium rectarum linearum elementa, & quibus
accidentibus dignoscantur, postea discemus. nunc quae sint parallelae his verbis diffinit. Quae
cum in eodem sint plano] si enim altera quidem sit in subiecto plano, altera autem in sublimi
iuxta quamvis positionem, inter se non conveniunt, non tamè propterea parallelae sunt. Et ex vtra
que parte in infinitum producuntur, in neutram partem inter se conveniunt] nam
rectae lineae non parallelae, si aliquatenus producuntur, non conveniunt; in infinitum autem pro-
duci, & non convenire, parallelae designat, neque hoc simpliciter, sed ex vtraque parte, in in-
finitum produci, & non convenire. fieri namque potest, ut non parallelae etiam ex una quide
parte in infinitum producuntur, ex altera vero minime. amuentes enim in hac parte; in altera
plurimum distant. causa autem haec est, quoniam duae rectae lineae spaciū aliquod comprehē-
dere non possunt, quod si ex vtraque parte amuant hoc non continget. & Euclides quidem re-
ctas lineas parallelas in hunc modum diffinit. Possidonius vero parallelae, inquit, sunt, quae
aequale amittunt, neque abnuunt in uno plano, sed aequales habent omnes perpendiculares, quae à
punctis alterius ad alteram ducuntur; quaeque vero minores faciunt perpendiculares inter
se conveniunt. perpendiculis enim, & spaciū altitudines, & linearum intervalla determi-
nare potest. quamobrem cum perpendiculares sint aequales, & rectarum linearum intervalla
aequalia erunt: cum vero minores, & intervalla minuitur, & conveniunt inter se ad eas par-
tes, in quibus perpendiculares sunt minores. Pitro geometra parallelas rectas lineas explicans
non contentus his, quae scripsit Euclides, eas aptissime exemplo declaravit. dixit enim rectas li-
neas parallelas esse, quales in parietibus, vel pavimento columanarum umbras à lampade è re-
gione ardente, vel lucerna factas videmus, quod quomodo intelligendum sit vide apud Se-
renum

Possidonius
parallelas al-
ter diffinit.

Perpendicu-
laris spacio-
rum altitudi-
nes et linearū
intervalla de-
terminat.

venum in fine libri de sectione cylindri. Post diffinitiones sequuntur postulata, deinde axiomata, seu communes notiones. postulata autem & axiomata, ut refert Proclus ex Gemino illud habent commune, ut non indigeant demonstratione aliqua, aut geometrica fide, sed sumantur tamquam nota, & principia fiant eorum, quae sequuntur. at differunt axiomata à postulatis eodem prorsus modo, quo theorematum à problematibus. ut enim in theorematibus quidem id, quod subiecta consequitur, perspicere & cognoscere proponimus; in problematibus vero excogitare aliquid, & facere iubemur: ita & in axiomatibus ea sumuntur, per quae sese manifesta sunt, nostrisq; insitis notionibus sunt in promptu; in postulatis vero ea sumere querimus, quae facilia, parabiliaq; sunt, & in quibus sumendis cogitatio non defatigatur, quaeq; nulla neque varietate, neque constructione indigent.

Axiomata à postulatis differunt eodem modo, quo theorematum à problematibus.

POSTULATA.

I.

Postuletur à quovis puncto ad quodvis punctum rectam lineam ducere.

II.

Rectam lineam terminatam in continuum, & directum producere.

III.

Quovis centro, & intervallo circulum describere.

F. C. COMMENTARIUS.

Tria haec & ob facilitatem, & quod aliquod comparare nobis imperant in postulatis necessario collocanda sunt, ex Gemini sententia. nam illud quidem, A quovis puncto ad quodvis punctum rectam lineam ducere, sequitur eam diffinitionem, quae tradit lineam esse puncti fluxum, & rectam lineam aequabilem, & non declinam fluxum. si igitur intelligamus punctum aequabili, & brevissimo motu ferri in alterum punctum incidemus, & primam postulatam factum erit, nihil utique varium intelligentibus nobis. si vero recta linea puncto terminata, similiter intelligamus eius terminum brevissimo, & aequabili motu ferri, secundum postulatam facili, simplicis, aggregatione comparationem erit. Quod si rursus terminatam rectam lineam manere quidem ex altera parte, ex altera autem moveri circa manens punctum intelligamus, tertium fiet postulatam; centrum namque erit punctum manens, intervallum vero recta linea; & quanta ea fuerit, tantum erit intervallum à centro ad omnes circumferentiae partes.

III.

Omnes angulos rectos inter se aequales esse.

F. C. COMMENTARIUS.

Hoc quamquam ut manifestum, & nulla indigens demonstratione à nobis concedatur, postulatam tamen non est ex sententia Gemini, sed axiomata. accidens enim quoddam per se rectis angulis dicitur, nihil simpliciter notione facere iubens. si cui vero non satis constet rectos angulos omnes inter se aequales esse, is petat demonstrationem à Proclo, quam affert in commentariis. Pappius recte animadvertit huius conversum non etiam verum esse, nempe angulum recto aequalem omnino esse rectum, nisi rectilineus sit; potest enim curvilineus quoque angulus recto aequalis esse.

Et si in duas rectas lineas recta linea incidēs interiores, & ex eadem parte angulos duobus rectis minores fecerit, rectas lineas illas in infinitum productas, inter se conuenire ex ea parte, in qua sūt anguli duobus rectis minores.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc à postulatīs penitus reiiciendum censet Proclus, cum theorema sit, quod multas habet & dubitationes, quas Ptolemaeus in quodam libro soluere sibi proposuit. multis vero & diffinitionibus, & theorematibus in demonstratione indiget, cuius conuersum Euclides etiam tanquam theorema ostendit. sed de hoc inferius suo loco agetur.

AXIOMATA, SEV COMMVNES NOTIONES.

I.

Quę eidem equalia, et inter se sunt equalia.

II.

Et si equalibus equalia adijciantur tota sunt equalia.

III.

Et si ab equalibus equalia auferantur, reliqua sunt equalia.

IIII.

Et si inequalibus equalia adijciantur, tota sunt inequalia.

V.

Et si ab inequalibus equalia auferantur, reliqua sunt inequalia.

VI.

A Et quę eiusdem dupla, inter se sunt equalia.

VII.

Et quę eiusdem dimidia inter se sunt equalia:

VIII.

B Et quę sibi ipsis congruunt, inter se sunt equalia.

IX.

Totum est sua parte maius

X.

C Duę rectę lineę spaciū non comprehendunt.

F. C. COMMENTARIVS.

Axiomata
mathematicis
scientijs
communia.

Axiomata serē omnia mathematicis scientijs communia sunt: neque solum in magnitudinibus, sed & in numeris, & moribus, & temporibus vera esse deprehenduntur. aequale enim & inaequale, totum & pars, maius, & minus, quantitatis continuas, & discretis communia sunt. contemplatio igitur quae circa tempora, & quae circa motus, & quae circa numeros, & quae circa magnitudines versatur, his omnibus tanquam manifestis indiget. communibus autem existentibus unusquisque videtur secundum propriam materiam, quoad ipsa requirit: & alius quidem ut in magnitudinibus, alius ut in numeris, alius uero ut in temporibus ipsis utitur, & hoc modo propriae in inaequales conclusiones sunt, licet axiomata communia fuerint.

Et

Et quæ eiuſdem dupla inter ſe ſunt æqualia.

Hoc ex illo ſequitur, Si æqualibus æqualia adſciantur rota æqualia eſſe, nam quæ dimidio ſunt æqualia, cum ipſum dimidium aſſumpſerint eiſdem dupla ſunt, & inter ſe æqualia ob æquale additionem: & hæc ratione non ſolum dupla, ſed & tripla & eiſdem etiam multiplicia omnia æqualia apparent.

Et quæ ſibi ipſis congruunt inter ſe ſunt æqualia ꝑ hoc geometriæ proprium eſt.

Duæ rectæ linæ ſpaciū non comprehendunt ꝑ Hoc non admodum manifeſtum videtur, quare in editione Campani inter petitiones locum obtinuit.

His axiomatibus nomina alia adſcienda cenſuit Pappus, ut videre licet apud Proclum. Cum autē omnis ſcientia duplex ſit, alia quidem circa immediatas propoſitiones verſatur, alia vero circa ea quæ ex illis demonſtrantur, comparanturq; & omnino circa ea, quæ principia conſequentur, ſuam perſcit tractationem. hæc ruruſ in geometria rationibus ſe ipſam in problematum per actionem, & in theorematum inuentionem diſperſit; problemata quidem appellans ea, in quibus, quæ non ſunt quodammodo comparare proponit, in apertumq; proferre; & machinari theorematum vero, in quibus id, quod ineſt, vel non ineſt perſpicere, cognoscereq;, ac demonſtrare inſtituit. & illa quidem ortus, & poſitiones, & applicationes, & deſcriptiones, & circumſcriptiones, & bipartitiones, atque alia huiuſmodi conſtituere iubent; hæc vero ſymptomata; & quæ ſubiectis geometriæ per ſe inſunt, perſuadere, demonſtrationibuſq; firmare continentur. Omne autem problema & omne theorema perfectum, expetentib; ſuis partibus, hæc omnia in ſe ipſo habere debet, Propoſitionem, Expoſitionem, Determinationem, Conſtructionem, Demonſtrationem, & Concluſionem. harum autem Propoſitio dicitur quo dato quid queſitum ſit, perfectæ enim propoſitio ex utriuſque conſtat. Expoſitio ipſum per ſe datū aſſumens preparat queſitioni. Determinatio ſeorſum queſitum quoddam ſit explicat. Conſtructio ea, quæ dato deſinit ad queſiti uenationem adiicit. Demonſtratio perite ex conceſſis quod propoſitum eſt colligit. Concluſio ruruſ ad propoſitionem regreditur confirmand id, quod oſenſum eſt. & omnes quidem problematum, & theorematum partes tot ſunt, maxime autem neceſſariæ, & quæ in omnibus inſunt Propoſitio, Demonſtratio, & Concluſio: oportet enim ante cognoscere queſitionem, perq; media oſendere. & quod oſenſum eſt concludere. Harum autem trium, ut aliqui deſit, fieri non poteſt. at reliquæ ſæpe aſſumuntur, ſæpe vero, cum nullam afferant utilitatem, omittuntur. Determinatio enim, & Expoſitio non ſunt in illo problemate. Acquirere triangulum conſtituere, quod habeat utrumque eorum, qui ad baſim ſunt, angulorum duplū reliqui.

Conſtructio autem in completibus theorematibus non eſt, cum ſatis ſit expoſitio abſque alia additione, ut ex datis propoſitum oſendatur. Quando igitur deficere expoſitionem dicimus? cum in propoſitione nullum fuerit datum. quamquam enim propoſitio diuidatur in datum & queſitum, non tamen hoc ſemper fit, ſed aliquando ſolum dicitur queſitum, quod cognoscere, vel comparare oportet, ut in iam dicto problemate. non enim ante dicit, quo dato oporteat acquirere triangulum conſtituere, habens utrumque æqualium angulorum duplū reliqui, ſed tantum quod oportet illud comparare. & ſit quidem etiam hoc loco ex antè cognitis propoſiti ſumptio. etenim quid acquirere, & quid æquale, vel duplū ſit cognoscimus. hoc autem omni dianoſticae diſciplinæ proprium eſſe dicit Ariſtoteles; nihil tamen nobis ſubijcitur, quemadmodum in alijs problematibus, ut quando dicit, Datam rectam lineam terminatam biſariam ſecare. hic enim recta linea data eſt, iubemur autem ipſam biſariam diuidere. ſeorſum igitur ponitur datum, & ſeorſum queſitum. Cum autem propoſitio utrumque habuerit, tum & determinatio inuenitur, & expoſitio; ſed cum deficit datum, & hæc deficiant neceſſe eſt. expoſitio etenim eſt dati, & determinatio, quæ propoſitioni eadem erit. nam quid aliud dicas determinans in iam dicto problemate, niſi quod acquirere triangulum inuenire oportet? hoc autem erat propoſitio. ſi igitur propoſitio non habeat datum, & queſitum, expoſitio quidem tacetur, quod non ſit datum; determinatio vero prætermittitur, ne eadem fiat, quæ propoſitio. multa autem alia inueniuntur huiuſmodi problemata, præſertim in arithmetiſ, & in decimo libro, ut inuenire duas rectas lineas potentia commenſurabiles, quæ medium comprehendant, & omnia, quæ eiſmodi ſunt.

Animaduertendum tamen Archimedeſem quidem ſæpe, ut in libro de quadratura parabolæ, Pappum vero ſæpe ſemper propoſitionem ipſam omittere, contentos ex poſitione, ac determinatione, ſolo propoſitionis. Datum autem omne, uno horum modorum datur vel poſitione, vel proportionem, vel magnitudinem, vel ſpecie: punctum enim duntaxat poſitione datur, linea vero, & alia

A

B

C

Omne problema, & omne theorema perfectū ſex habet partes.

Propoſitio, demonſtratio & concluſio maxime neceſſariæ.

Conſtructio deſcit, cum expoſitio ſatis ſit.

Archimedes & Pappus aliquando propoſitionem omittunt.

Species. alia omnibus. nam cum dicimus datum angulum rectilineum bifariam secare, speciem anguli, quae data est, significamus, nempe rectilineam, ut ne queramus eisdem methodis etiam circuli-
Magnitudi- lineum angulum bifariam secare. Cum vero dicimus, Datis duabus rectis lineis inequalibus à ma-
ne iori aequalē minori abscondere, magnitudine datae sunt. maior enim, & minus, terminatum, & in-
Proportione finitum ad magnitudinem referuntur. At cum dicimus, Si quattuor magnitudines proportionales
 sint, & permutando proportionales erunt, datur eadem proportio in quattuor magnitudinibus,
 & cum dicimus, Ad datum punctum oportet datae lineae aequalem rectam lineam ponere, pun-
 ctum positione datur. quare cum positio varia esse possit, & constructio variabitur; datur enim
 punctum vel extra rectam lineam, vel in recta linea, & in extremitate, vel inter ipsis termi-
 nos. itaque cum datum quadrupliciter sumatur, & expositio quadrupliciter fit, & quandoque
 duos etiam, & tres modos complectitur. demonstratio vero interdum quidem quae demonstra-
 tionis propria sunt habere inuenitur, ex diffinitionibus medijs quæsitum ostendens; hæc enim de-
 monstrations perfectio est interdum uero ex certis notis arguens; quod diligenter attendere oportet,
 ubique enim geometricæ rationes necessitatem habent ob subiectam materiam, non ubique
 uero demonstrantibus methodis perficiuntur. denique conclusio duplex esse solet, particularis,
 & inuiversalis. nam cum in dato conclusionem fecerimus, ne uideamur particularia proposuisse,
 ad inuersalem transimus conclusionem. Verum cum hæc ita determinata sint, de ijs quæ ipsis
 adnectuntur, breuiter differemus, nempe quid sit lemma, quid casus, quid corollarium, quid
 conclusio du-
plex. enim uel in constructione, uel in demonstratione aliquod summum eorum, quæ ostensa non
 sunt, sed ratione indigent, tunc id quod sumptum est, ueluti per se ambiguum inquisitione di-
 gnum esse arbitrati, lemma ipsum appellamus, à postulato, & axioma differens quatenus de-
 monstrari potest, cum illa absque demonstratione ad aliorum fidem faciendam per se sumantur. Ca-
 sus autem differentes constructionis modos, & positionis mutationem indicat, nimirum transpo-
 sitis punctis, uel lineis, uel planis, uel solidis, & omnino ipsius uarietas circa descriptionem
 uersatur; ac propterea dicitur casus, quod sit constructionis transpositio. Corollarium uero dicitur
 quidem & de quibusdam problematibus, qualia sunt corollaria Euclidi ascripta. sed proprie
 dicitur corollarium, quando ex demonstratis aliquod aliud theorema apparet, quod à nobis propo-
 situm non est; & corollarium ob id uocant, quod sit tanquam lucrum quoddam accedens præter
 demonstrationis propositum. Instantia uero totum orationis impedit cursum, uel constructioni,
 uel demonstrationi occurrens, quam tamen non oportet ut ueram admittere, sed remouere, &
 ostendere falsam esse. Deductio autem est transitus ab alio problemate, uel theoremate ad aliud,
 quo cognito, uel comparato etiam illud, quod propositum est; apparet, ut cum quereretur cubi
 duplicatio transfulerunt quæsitum in aliud, quod hoc consequatur, uidelicet in duarum medianarum
 inuentionem. & deinceps quæsierunt quo nam pacto datis duabus rectis lineis duæ mediae pro-
 portionales inueniantur.

PROBLEMA I. PROPOSITIO I.

In data recta linea terminata, triangulū æquilaterū constituere.

Sit data recta linea terminata A B. oportet in ipsa A B triangulum æquilaterum constituere. centro quidem A intervallo autem A B circulus describatur B C D. & rursus centro B, in ternalloq; B A describatur circulus A C E, & à puncto C, in quo circuli se inuicem secant ad A B ducantur rectæ lineæ C A C B. Quoniam igitur A centrum est circuli C B D, erit A C ipsi A B æqualis. rursus quoniā B circuli C A E est centrum, erit B C æqualis B A. ostensa est autem et C A æqualis A B. vtræque igitur ipsarum C A C B ipsi A B est æqualis. quæ autem eisdem sunt æqualia, et inter se æqualia sunt. ergo C A ipsi C B est æqualis. tres igitur C A A B B C in-

ter se sunt æquales; ac propterea triangulum æquilaterum est ABC , & constitutum est in data recta linea terminata AB , quod fecisse oportebat.

F. C. C O M M E N T A R I V S.

En omnia, quae ante dicta sunt, in hoc primo problemate contemplari licet. nam problema esse manifestum apparet: imponi enim nobis trianguli æquilateri ortum machinari, & propositio ex dato; & questio constat. datur enim recta linea terminata, queritur autem quo pacto in ipsi triangulum æquilaterum constitutur. & præcedit quidem datum, sequitur autem questum, ut communem etiam texere possis, si est recta linea terminata, fieri potest, ut in ipse constitutur triangulum æquilaterum. neque enim non recta existente triangulum constituitur, quod ex rectis lineis constat, neque non terminata; angulus enim fieri non potest, nisi ad unum punctum, infinitae autem extremitas punctum non est. post propositionem sequitur expositio. Sit data recta linea terminata AB & uides expositionem datum solum explicare, non etiam questum adimplere, postquam determinatio [oportet in data recta linea triangulum æquilaterum constituitur] determinatio autem quodammodo attentionis est causa, attentiones enim ad demonstrationem nos reddit questum pronuntiando, quemadmodum expositio docilior elicit, datam ante oculos ponendo. post determinationem constructio sequitur [centro quidem altero rectae lineae termino; intervallo autem reliquo circulus describatur, rursusque centro quidem reliquo, intervallo autem eo, quod prius centrum erat, describatur circulus, et] ad communem sectionis circulorum puncto ad lineae terminos recta linea ducantur] & uides me ad constructionem vii postulatæ, videlicet [a quouis puncto ad quodvis punctum rectam lineam ducere, & quouis centro & intervallo circulum de scribere.] universæ enim postulatæ constructionibus, axiomata vero demonstrationibus utilitatem afferunt. deinde sequitur demonstratio, quae ex circuli definitione, & illo axioma. Quae eidem æqualia, & inter se sint æqualia, concludit tres rectas lineas CA AB BC inter se esse æquales. unde colligitur triangulum ABC æquilaterum esse, atque hæc est prima conclusio, quae expositionem consequitur; post hanc est ipsa universalis. [In data igitur recta linea triangulum æquilaterum constitutum est.] siue enim duplici eius, quae nunc exposita est, feceris datam, siue triplicem, siue aliam quamlibet maiorem, vel minorem; eadem constructiones, & demonstrationes congruent. his apposuit particulam [quod fecisse oportebat] ostendens conclusionem problematicam esse; etenim in theorematibus apponit [quod ostendisse oportebat] namque illa fictionem alicuius, hæc demonstrationem, & inventionem denuntiant. In vii igitur hoc primo problemate omnia examinare volumus, ac perspicua facere. oportet autem illos, qui hæc legent, in reliquis eadem querere, & quæ nam eorum assumantur, quænamque omittantur, & id, quod datum est, quotupliciter detur: & ex quibus principiis vel constructiones, vel demonstrationes pendeant; horum enim perspicax contemplatio non parvam exercitationem, geometricarumque rationum meditationem affert. sed forsasse non inutile erit reliqua etiam triangula constituere. & primum æquicruræ. Sit igitur AB , in qua oportet æquicruræ triangulum constituere. & describantur circuli, ut in æquilatero, producaturque AB ex utraque parte ad CD puncta. æqualis igitur est C B ipsi A D , quare centro quidem B , intervallo autem CB circulus CE describatur. & rursus centro A , & intervallo DA describatur circulus DE . & a puncto E , in quo se circuli secant ad A B puncta ducantur EA EB , quoniam igitur E A æqualis est ipsi A D , & E B ipsi B C : æqualis autem A D ipsi B C : erit & E A ipsi E B æqualis. sed & maiores sunt quam AB . æquicruræ igitur triangulum est ABE , quod fecisse oportebat. At propositum sit scaleni constituere triangulum in data recta linea AB , & describantur circuli centris, intervallisque, ut in superioribus. & sumatur in circumferentia circuli, A centrum habentis, punctum F , & ducta AF producatur ad G , & GB iungatur. quoniam

Propositio, quæ ex dato & quanto constat.

Expositio.

Determinatio.

Constructio.

Postulata constructionibus utilia.

Demonstratio.

Conclusio prima, & particularis. Conclusio universalis. Quod fecisse oportebat. Quod ostendisse oportebat.

Æquicruræ trianguli constructio.

Scaleni trianguli constructio.

quoniam igitur A cētrum est circuli $D E$, erit $A F$ ipsi $A D$ æqualis. maior igitur est $A G$ quā $A D$, hoc est quā $G B$. cētrum enim est ipsum B circuli $C E$. ergo $G B$ est æqualis $B C$, & propterea $G B$ quā A maior. at $G A$ maior quā $G B$. tres igitur $C B B A A G$ inæquales sunt. quare scalenum triangulum est. tria igitur triangula sunt constituta. sed hæc dissimulata sunt. Illud vero in his pulcherrim invenitur. Triangulum scilicet æquilaterum vndeque æquale existens unico modo constitui, Aequiurere autem in duobus tantum lateribus æqualitatem habens, constitui dupliciter; data namque recta linea, vel ambabus æqualibus minor est, ut nos posuimus, vel maior: scalenum vero vndique inæquale existens tripliciter constitui. vel enim data recta linea maxima est, vel minima trium, vel altera quidem maior, altera vero minor. & licet in vna quaque harum positionum vel protendenti, vel contrahenti se exercere. nobis autem quæ sunt exposita sufficiant. At si vniuersæ contemplabimur dicemus, problematum alia quidem simpliciter, alia vero multipliciter, & alia infinite constitui, & ea, quæ simpliciter constituuntur (ut inquit amphibomus) ordinata appellantur, & quæ constituuntur multipliciter, media, quæ vero finite, inordinata vocantur. Vide reliqua apud Proclum, fortasse enim hæc satis speres.

Aequilaterū
triangulum
unico modo
constituitur.
Aequiurere
dupliciter.
Scalenum
tripliciter.

Problemata
ordinata.
Media.
Inordinata.

PROBLEMA II. PROPOSITIO II.

Ad datum punctū datæ rectæ lineæ æquale rectam lineā ponere.

Sit datum quidem punctum A , data vero recta linea $B C$. oportet ad A punctum ipsi $B C$ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere. ducatur à puncto A ad B recta linea $A B$: et in ipsa constituatur triangulum equilaterum $D A B$, producanturque in directum ipsis $D A D B$ rectæ lineæ $A E B F$. et centro quidem B , intervallo autem $B C$ circulus $C G H$ describatur. rursusque centro D , et intervallo $D G$ describatur circulus $G K L$. Quoniam igitur punctum B cētrum est $C G H$ circuli, erit $B C$ ipsi $B G$ æqualis. & rursus quoniam D cētrum est circuli $G K L$, erit $D L$ æqualis $D G$: quarum $D A$ est æqualis $D B$. reliqua igitur $A L$ relique $B G$ est æqualis. ostensa autē est $B C$ æqualis $B G$. quare vtraque ipsarum $A L B C$ est æqualis ipsi $B G$. quæ autem eidem æqualia sunt, et inter se sunt æqualia. ergo & $A L$ est æqualis $B C$. ad datum igitur punctū A datæ rectæ lineæ $B C$ æqualis posita est $A L$. quod facere oportebat.

Postul. 1.
Prima huius
Postul. 2.
3.

Diffin. 15.

Com. no. 3.

Com. no. 1.

F. C. COMMENTARIUS.

Problematum, & theorematum, alia sunt sine casu, alia multa habent casus.

Problematum, & theorematum alia quidem sine casu sunt, alia vero multos habent casus. quæcumque igitur eandem vim habent per plures descriptiones pervadentem, & positiones permutantia eandem demonstrationis rationem servant, hæc casum habere dicuntur, quæcumque vero iuxta vnam duntaxat positionem, vnamque constructionem procedunt, ea sunt sine casu. simpliciter enim casus circa constructionem tantum theorematum, tum problematum consideratur. secundum igitur problema multos habet casus. datur autem in ipso punctum quidem positione, eo enim tantum modo dari potest; linea vero specie, & magnitudine datur. queritur autem rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere ad datum punctum, ubicunque situm fuerit. & constat omnino punctum illud in eo-

Secundū problema multos habet casus.

Aequicruri
magulo pro
aquilatero
ut licet.

Ex antee-
dente.

post. 3.

Com.no.1.

Sint data duæ rectæ lineæ inæquales A.B
C; quarum maior sit A.B. oportet à ma-
iori A.B. minori C. æqualem rectam lineam
abscindere. ponatur ad A punctum ipsi
C æqualis recta linea A.D. & centro
quidem A. intervallo autem A.D. cir-
culus describatur D.E.F. et quoniam A cen-
trum est D.E.F. circuli, erit A.E. ipsi A.D. æqual-
lis. sed & C est æqualis A.D. vtraque igitur
ipsarum A.E. C. ipsi A.D. æqualis erit. Quare
& A.E. ipsi C est æqualis. Duabus igitur da-
tis rectis lineis inæqualibus A.B. C. à maiori A.B. minori C æqualis Abscissa est A.E.
quod fecisse oportebat.

EVCLID. ELEMENT.
THEOREMA. I. PROPOSITIO. IIII.

- A** Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem et angulum angulo æqualem, qui æqualibus rectis lineis continetur: & basim basi æqualem habebunt; & triangulum triangulo æquale erit; et reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri; quibus æqualia latera subtenduntur.

Sint duo triangula ABC DEF , quæ duo latera AB AC duobus lateribus DE DF æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus quidem AB lateri DE æquale, latus vero AC ipsi DF ; et angulum BAC angulo EDF æqualem. Dico & basim BC basi EF æqualem esse, et triangulum ABC æquale triangulo DEF , et reliquos angulos reliquis angulis æquales, alterum alteri; quibus æqualia latera subtenduntur; nempe angulum

- B** ABC angulo DEF : et angulum ACB angulo DFE . triangulo enim ABC congruente ipsi DEF , et puncto quidem A posito in D , recta vero linea AB in ipsa DE : et punctum B puncto E congruet; quod AB ipsi DE sit æqualis. congruente autem A B ipsi DE ; congruet & AC recta linea rectæ lineæ DF , cum angulus BAC sit æqualis angulo EDF . quare et C congruet ipsi F : est enim rursus recta linea AC æqualis rectæ DF . sed et punctum B congruebat puncto E . ergo et basis BC basi EF congruet. nā si puncto quidē B congruente ipsi E , C vero ipsi F ; basis BC basi EF non congruit; duæ rectæ lineæ spacium comprehendunt: quod fieri non potest. congruet igitur BC basis basi EF , & ipsi æqualis erit. quare et totum ABC triangulum congruet toti triangulo DEF , et ipsi erit æquale; et reliqui anguli reliquis angulis congruent, et ipsi æquales erunt. videlicet angulus ABC angulo DEF , et angulus ACB angulo DFE . si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, habeant autem et angulum angulo æqualem, qui æqualibus rectis lineis continetur: & basim basi æqualem habebunt; et triangulum triangulo æquale erit; et reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri; quibus æqualia latera subtenduntur: quod ostendere oportebat.

Com. no. 10

F. C. COMMENTARIUS.

- A** Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant alterum alteri in hac propositione duo sunt, quæ dantur, videlicet duorum laterum æqualitas, & æqualitas eorum angulorum, qui æqualibus lateribus continentur. quæ quidem proportionem dari manifestum est. queruntur autem tria, æqualitas basium, æqualitas triangulorum, & æqualitas reliquorum angulorum. sed quoniam fieri potest ut duo quidem latera duobus lateribus sint æqualia, theorema autem verum non sit, quod non alterum alteri est æquale, sed utraque simul: propterea addidit, æqualia esse latera non simpliciter, sed alterum alteri.

- B** Triangulo enim ABC congruente ipsi DEF , et puncto quidem A posito in D , recta vero linea AB in ipsa DE : et punctum B puncto E congruet, quod AB ipsi DE sit æqualis, et reliqua.

Demonstratio per superpositionem figurarum mathematicarum usitata.

Hic demonstrationis modus, qui sit per superpositionem figurarum præterquam quod approbatur à Proclo mathematicarum scientiarum peritissimo, est etiam maximo vsui mathematicis. Archimedes enim cum vsurpat non solum in planis figuris, ut in libro de centro gravitatis planorum, sed etiam in solidis, ut in libro de conoidibus, & spheroidibus.

THEO.

THEOREMA II. PROPOSITIO. V.

Aequicrurium triangulorum qui ad basim anguli inter se sunt æquales: & productis æqualibus rectis lineis anguli qui sunt sub basi inter se æquales erunt.

Sit æquicrurum triangulum ABC , habens AB latus lateri AC æquale, et producantur indirectum ipsis AB AC rectæ lineæ BD CE . Dico angulum quidem ABC angulo ACB ; angulum vero CBD angulo BCE æqualem esse. sumatur enim in linea BD , quod vis punctum F : atque à maiori A E minori A F æqualis auferatur AG : iunganturq; FC , GB .

Quoniam igitur AF quidem est æqualis AG ; AB vero ipsi AC ; duæ FA AC , duabus GA AB æquales sunt, altera alteri; et angulum FAG communem continent. basis igitur FC basi GB est æqualis; et triangulum AFC æquale triangulo AGB ; et reliqui anguli reliquis æquales erunt, alter alteri; quibus æqualia latera subtenduntur: Videlicet angulus quidem ACF æqualis angulo ABG ; angulus vero AF

3. Huius,

Ex præcedente.

C ; angulo AGB . Et quoniam tota AF , toti AG est æqualis; quarum AB est æqualis AC ; erit et reliqua BF reliquæ CG æqualis. ostensa est autem FC æqualis GB . duæ igitur BF , FC duabus CG GB æquales sunt, altera alteri; et angulus BFC æqualis angulo CGB : estq; basis ipsorum BC communis. ergo et triangulum BFC triangulo CGB æquale erit; et reliqui anguli reliquis æquales, alter alteri quibus æqualia latera subtenduntur. angulus igitur FBC est æqualis angulo CBG : et angulus BCF angulo CBG . Itaque quoniam totus ABC angulus toti angulo ACF æqualis ostensus est, quorum angulus CBG est æqualis ipsi BCF : erit reliquus ABC reliquo ACB æqualis: et sunt ad basim ABC trianguli: ostensus autem est & FBC angulus æqualis angulo CBG ; qui sunt sub basi. æquicrurum igitur triangulorum, qui ad basim anguli inter se sunt æquales; et productis æqualibus rectis lineis anguli, qui sunt sub basi inter se æquales erunt. quod ostendisse oportebat.

Axioma. 3.

Ex præcedente.

Axioma. 3.

F. C. COMMENTARIUS.

Theoremata alia simplicia sunt, alia composita. dico autem simplicia quæcunque iuxta positiones, & conclusiones individua sunt, unum habentia datum, et unum questum. ut si Euclides ita dixisset. omne triangulum æquicrurum æquales habet, qui ad basim sunt, angulos. composita vero sunt, quæ ex pluribus constantia, vel positiones habent compositas, vel conclusiones, vel etiam utrasque. compositorum autem alia sunt complexa, alia incomplexa. incomplexa sunt quæcunque in simplicia theoremata dividi non possunt, cuiusmodi est quartum theoremata; in eo enim & datum componitur, & questum, sed datum in simplicia dividi minime potest, ut plura fiant theoremata: non enim si triângula æquales habeant angulos, vel eam dimittat, qui est ad verticem, reliqua contingant. complexa vero sunt quæcunque in simplicia dividuntur, ut illud theoremata, Triangula, & parallelogramma quæ eandem habent altitudinem inter se sunt, ut bases fieri enim potest, ut dividentes ita dicamus. Triangula quæ eandem habent altitudinem inter se sunt, ut bases; & in parallelogrammis similiter. Omnium autem compositorum alia quidem iuxta conclusionem componuntur, ab eadem positione ortum habentia; alia vero iuxta positiones, & eandem omnibus conclusionem inferunt; & alia iuxta conclusiones, & positiones componuntur. Itaque iuxta conclusionem compositio est in quarto theoremate. in eo enim tria sunt quæ concluduntur, vide licet bases æquales esse, & triângula æqualia, & reliquos angulos reliquis æquales; quibus æqualia latera subtenduntur. iuxta positiones compositio invenitur in theoremate, quod triângulis, & parallelogrammis, eandem habentibus altitudinem commensurabile est, iuxta utrasque positiones.

Theorematum simplicia.

Theorematum composita.

Compositum. Theorematum alia complexa, alia incomplexa.

Complexa theoremata.

Theorematum compositum iuxta conclusionem.

Theorematum compositum iuxta positiones.

Complexio-
rum Theo-
rematū alia,
universalia,
alia ex parti-
cularibus u-
niversale cō-
cludunt.

Thales qui
li Theore-
matis inuē-
tor.

in illo. Diametri circulatorum & ellipsium tamen spacia, tamen lineas spacia continentes bisariam di-
dunt. Rursus complexiorum theorematum alia vniuersalia sunt, alia ex particularibus vniuersale
concludunt. omnino autem has compositiones geometrae ob breuitatem, ac resolutiones excogita-
runt. multa enim cum incomposita sint, non resoluntur: composita vero solum commoditates
prebent ad resolutionem, quae in principia tendit. his igitur consideratis apparet quintum theore-
ma compositum esse, tum iuxta datum, tum iuxta quæsitum, & vtrumque eorum, quae componi-
tur perfectum est ac verum. quamobrem resolutio quoque vera est in vtroque, siue enim qui ad ba-
sim anguli, siue productis aequalibus rectis lineis anguli sub basi aequales sint, acquirere trian-
gulum erit. Huius theorematism inventor fuit Thales, vt refert Proclus. is enim primus dicitur
animaduertisse omnis acquiruris angulos qui ad basim esse aequales, ac more antiquorum aequa-
les similes appellasse.

THEOREMA III. PROPO. VI.

Si trianguli duo anguli inter se sint æquales, et æquales angu-
los subtendentia latera inter se equalia erunt.

3. huius,

4. huius,

Sit triangulum ABC, habens angulum ABC angulo A
CB æqualem. Dico et AB latus lateri AC æquale esse: si enim
inaqualis est AB ipsi AC; altera ipsarum est maior. sit maior
A B; atque à maiori AB minori AC æqualis auferatur
DB; et DC iungatur. Quoniam igitur DB est æqualis ipsi
AE; communis autem BC: erunt duæ DB BC duabus A
C CB æquales, altera alteri; et angulus DBC æqualis angulo
ACB. basis igitur DC basi AB est æqualis; et triangu-
lum DBC æquale triangulo ACB, minus maiori; quod est
absurdum. non igitur inæqualis est AB ipsi AC. ergo aequa-
lis erit. Si igitur trianguli duo anguli inter se sint æquales, et æquales angulos
subtendentia latera inter se equalia erunt: quod demonstrare oportuit.

F. C. COMMENTARIUS.

Hoc theore-
ma præcedē-
ti cōuertitur.
Conuersio
apud Geo-
metras quæ
proprie dica-
tur.

Conuersio
alia.

Quarto o-
ctauum con-
uertitur.

Theorema-
tū, q̄ cōuer-
titur, alia præ-
cedentia sūt
alia cōuersa.

Præsens theorema duo hec in primis ostendit, theorematum scilicet conuersionem, & deduc-
tionem ad id, quod fieri non potest. conuertitur enim præcedenti theoremati, & per deductio-
nem ad id, quod fieri non potest, demonstratur. conuersio autem apud Geometras proprie dicitur,
quando conclusiones, & positiones vicissim in theorematibus transmutantur, & quod prio-
ris est conclusio, in posteriori positio fit: & contra positio tanquam conclusio inferitur. vt in illo,
Acquirurum triangulorum, qui ad basim anguli æquales sunt, positio quidem est acquirere trian-
gulum: conclusio autem triangulorum, qui ad basim sunt, æqualitas. Et quorum anguli qui ad
basim æquales; ea acquirurum sunt, vt in hoc theoremate, in quo positio quidem est, angulo-
rum, qui ab basim, æqualitas; conclusio autem æqualitas laterum, quæ aequalibus angulis
subtenduntur. est etiam alia conuersio iuxta quandam dumtaxat compositorum transmutationem.
Si enim sit theorema compositum à pluribus positionibus incipiens, & in conclusionem desinens,
sumentes conclusionem, & vnam ex positionibus, vel etiam plures; conclusionem faciunt aliquā
reliquarum positionum. & hoc modo quarto theoremati octauum conuertitur. In illo enim po-
nuntur quidem duo latera æqualia; & angulus angulo æqualis, qui aequalibus lateribus con-
tinetur: cōcluditur aut basim basi æquale esse. At in octauo ponuntur duo latera æqualia; basimq̄
basi æqualis: & cōcluditur angulum, qui aequalibus lateribus continetur, æqualem esse. Cum
igitur duæ sint conuersiones, ea quæ proprie sic dicitur, vniuersalis est, & determinata; altera ve-
ro varia, & non in vno, sed in multis conuertens ob multitudinem positionum, quæ in compositis
theorematibus sunt. Theorematum vero, quæ conuertuntur, alia præcedentia vocare consue-
runt; alia conuersa. Cum enim genus quoddam ponentes, aliquid de ipso symptoma demonstrat,
hoc præcedens appellatur: & cum è contrario positionem quidem faciunt symptoma; conclusio-
nem vero genus, cui illud accidit, conuersum vocatur. vt omne triangulum acquirere angulos qui
ad

ad basim sunt, aequales habet. hoc præcedens est. Omne triangulum duos angulos aequales habet, latera quoque aequales angulos subtendentia habet aequalia, & est æquicrura. hoc cō. rsum est. & hæc de cōuersionibus geometricis dicta sufficiant. deductiones vero id, quod fieri non potest, in eui- dens absurdum desinunt, & cuius oppositū omnes fatentur. accidit autem ipsarū alias desinere in ea, quæ cōmuni- bus notionibus, vel postulatis, vel positionibus opponitur; alias in easquæ prius demonstratis contradicunt. Nam sextum hoc theorema, quod accidit fieri non posse ostendit, cū destruat cōmuniem notionem illam; Omne totum est maius sua parte, octauum vero desinit quidem in id, quod fieri non potest; non tamen destruit cōmuniem notionem, sed id quod per se- ptimum theorema ostensum est, quod enim septimum fieri posse negant, hoc illud affirmans conse- qui ostendit ijs, qui questum non concedunt. omnis autem deductio ad id, quod fieri non potest, su- mens quod cum questio pugnat, & hoc ponens progreditur, donec euidenti absurdo occurrat, perq̃ illud positionem destruens, cōfirmat id quod à principio querebatur. omnino enim scire oportet ma- thematicas probationes omnes vel à principiis esse, vel ad principia; ut etiā inquit Porphyrius. & quæ à principiis sunt, iidem duplices esse. aut enim ex cōmuni- bus notionibus, & sola euiden- tia per se fidem faciente emanant; aut ex ijs, quæ ante ostensa fuere. Quæ vero ad principia aut principia ponunt, aut destruant. quæ principia ponunt resolutiones vocantur; atque his opponun- tur compositiones. fieri enim potest, ut à principiis illis ad questum ordinate procedamus, & hoc nihil aliud est, nisi compositio. quæ vero principia destrunt, deductiones ad id, quod fieri non po- test nuncupantur. aliquid enim eorum, quæ concessa, manifestaq̃, sunt destruere huius ipsius viae minus est; atque est hac syllogisticus quidam, sed non idem, qui in resolutione. Nam in deductio- nibus ad id, quod fieri non potest iuxta secundum hypotheticarum ratiocinationum modum comple- xio est. ut si triangulorum æquales angulos habentium latera aequales illos angulos subtenden- tia aequalia non sunt; totum parti est æquale. atqui hoc fieri non potest. triangulorum igitur duos angulos aequales habentium latera quoque aequales angulos subtendentia aequalia erunt. Vtitur autem Euclides cōuersione quidam in propositione ipsa; utpote qui conclusionem quinti theore- tis, ut datum accipiens, positionem illius adiunxit, ut questum; deductio autem ad id, quod fieri non potest in constructione, & demonstratione utitur. hæc ex Proclo.

Deductio- nes ad id, qd fieri non po- test in eui- dens absur- dū desinunt.

Mathemati- cas probatio- nes uel à pr- cipijs sūt uel ad principia. Resolutiones. Compositiones.

Deductio- nes ad id, qd fieri non po- test.

THEOREMA. IIII. PROPOSITIO. VII.

In eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri non constituentur ad aliud, atque aliud punctum, ad easdem partes, eisdem, quos primæ rectæ lineæ, terminos habentes.

Si enim fieri potest, in eadem recta linea A B duabus eisdem rectis lineis A C, C B aliæ duæ rectæ lineæ A D, D B æquales, altera alteri constituentur ad aliud, atque aliud punctum C D; ad easdem partes ut ad C D, eisdem habentes terminos A B, quos primæ rectæ lineæ; ita ut C A quidem sit equa- lis D A, eundem, quem ipsa terminum, habens A; C B, uero sit æqualis D B, eundem habens B ter- minum; & C D, iungatur. Itaque quoniam A C est æqualis A D; erit et angulus A C D angulo A D C æqualis. maior igitur est A D C angulus angulo D C B. quare angulus D C B multo maior erit. Rursus quoniam C B est æqualis D B; et an- gulus D C B æqualis erit angulo D C B; ostensus autem est ipso multo maior; quod fieri non potest. Non igitur in eadem recta linea duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri constituentur ad aliud, atque aliud punctum, ad easdem partes, eisdem, quos primæ rectæ lineæ, terminos habentes; quod ostendisse oportebat.

huius.

F. C. COMMENTARIUS.

Hoc Theorema rarum quiddam habet; quod haud frequenter propositionibus, quæ scientiam parant

Propositio-
nes theore-
matum geo-
metricorū,
arithmetico-
rum ut pluri-
mū affirmati-
ones sunt.
Theorema-
tis unij ca-
sus.

5. huius.

9. com. not.

5. huius.

Theorema
hoc frequen-
tis lemma ef-
se videtur.

pariunt euenire consuevit. per negationem enim, & non per affirmationem formari haud quam ipsorum proprium est, cum propositiones geometricorum, arithmeticorumq; theorematum magna ex parte affirmationes sint. Causa autem est (vt inquit Aristoteles) quod vniuersale affirmans scientijs maxime conuenit, tanquam magis idoneum, & non indigeus negatione. at vniuersale negans etiam affirmatione indiget. ex negantibus enim tantum neque demonstratio, neque ratiocinatio aliqua constat: ac propterea demonstrantes scientiae plurima affirmantia ostendunt: ratio autem negantibus conclusiombus utuntur. hec Proclus. Theorema uero multos habet casus. Nam punctum D vel cadit extra lineas AC CB, vel intra, vel in ipsis. & siquidem extra, hoc duobus modis fit; aut enim altera linearum ACCB secat alteram ipsarum AD DB, aut neutra neutram secat. cadat primum extra, secetq; AD ipsam CB, ut apparet in prima figura, & iungatur CD, cui quidem constructioni Euclidis demonstratio congruit. Sed cum ea breuius, & quodammodo obscura quibusdam visa sit, planius, & apertius sic explicabitur. Itaque quoniam AC est aequalis ipsi AD, erit angulus ACD angulo ADC aequalis. angulus autem ACD maior est angulo DCB; quippe quod totum maius sit sua parte. angulus igitur ADC angulo DCB est maior. Sed CDB angulus eadem ratione maior est angulo ADC. Quare angulus CDB angulo DCB multo maior sit necesse est. Rursus quoniam BC est aequalis BD; erit & angulus CDB aequalis angulo DCB. atq; ostensus est multo maior; quod fieri non potest. similiter demonstrabitur idem sequi absurdum si recta linea BD secet ipsam AC. cadat deim de punctum D extra lineas ACCB, ita vt neutra neutram secet; & producantur rectae lineae AC AD in puncta EF. Quoniam igitur AC est aequalis AD, angulus ACD ad basin angulo ADC aequalis erit; & productis AC AD, erit angulus FDC sub basi aequalis angulo DCE. Rursus cum BC sit aequalis ipsi BD, angulus BCD angulo BDC est aequalis. sed FDC angulus maior est angulo CDB. quare & DCE ipso DCB est maior, pars scilicet toto; quod fieri non potest. Non aliter demonstrabimus sequi absurdum, si punctum D intra dictas lineas cadere ponatur. denique in ipsis cadere non posse manifesto constat. totum enim parti esset aequale. Videtur autem hoc, ut inquit Proclus, lemma esse ostendi Theorematis: siquidem ad illius demonstrationem confert, & neque simpliciter elementum est, neque elementare: non enim ad plura suam extendit utilitatem. rarissimum igitur ipsius usum apud geometram inueniemus.

THEOREMA V. PROPOSITIO VIII.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus aequalia habeant, alterū alteri; habeant autem, et basim basi equalē; angulū quoque, qui equalibus lateribus continetur angulo equalē habebunt.

Sint duo triangula ABC, DEF, quae duo latera AB, AC duobus lateribus DE, DF aequalia habeant alterum alteri; vt sit AB aequale DE; AC uero ipsi DF: habeant autem et basim BC basi EF aequa-

sem. Dico

lem . Dico angulum quoque BAC angulo EDF equalem esse. Triangulo enim ABC congruente ipsi DEF triangulo ; et puncto quidem B posito in E ; recta vero linea BC in EF : congruet , et C punctum puncto F , quoniam BC ipsi E F est equalis . Itaque congruente BC ipsi EF ; congruent et BAC ipsis EDF . si enim basis quidem BC basi EF congruit ; latera autem BA AC lateribus ED DF non congruunt , sed permutantur ; vt EG GF : constituantur in eadem recta linea , duabus eisdem rectis lineis , alia duæ rectæ lineæ æquales , altera alteri ; ad aliud atque aliud punctum ; ad easdem partes ; eisdem habentes terminos . non constituuntur autem ; vt demonstratum est . non igitur , si basis BC congruit basi EF , non congruent et BAC AC latera lateribus ED DF . congruent igitur . Quare et angulus BAC angulo EDF congruet , et ipsi erit æqualis . Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant , alterum alteri ; habeant autem et basim basi æqualem : angulum quoque æqualibus lateribus contentum angulo æqualem habebunt : quod demonstrare oportebat .

In antecedente.

F. C. COMMENTARIUS.

Octauum Theorema quarti conuersum est , vt supra diximus , non tamen iuxta propriam conuersionem , non enim totam illius positionem , conclusionem , totamq. conclusionem positionem facit . Sed aliquam quidem ex positionibus , aliquam vero ex conclusionibus quarti theorematiss contextens , vnum quid eorum , quæ in illo data fuerunt , ostendit .

Octauum Theorema quarti conuersum est,

PROBLEMA IIII. PROPOSITIO IX.

Datum angulum rectilineum bifariam secare.

Sit datus angulus rectilineus BAC . Itaque oportet ipsum bifariam secare . Sumatur in linea AB quodvis punctum D ; & à linea AC ipsi AD æqualis auferatur AE ; iunctaq. DE constituatur in ea triangulum æquilaterum DEF ; & AF iungatur . Dico angulum BAC à recta linea AF bifariam secari . Quoniam enim AD est æqualis AE ; communis autem AF : duæ DA AF duabus EA AF æquales sunt , altera alteri ; & basis DF æqualis basi EF . angulus igitur DAF angulo EAF est æqualis . Quare datus angulus rectilineus BAC à recta linea AF bifariam sectus est : quod facere oportebat .

A

3. huius.
B
1. huius.

Ex antecedente.

F. C. COMMENTARIUS.

Datum angulum rectilineum bifariam secare] Angulus hoc loco specie datur , quippe qui rectilineus sit , & non quilibet . namque angulum omnē bifariam secare ex elementari institutione non licet ; quandoquidem ambiguum etiam est , num omnis angulus bifariam secari possit . Sectionis autem ratio non ab re distincta fuit : in quamlibet enim proportionem secare presentem constructionem transgreditur . verbi gratia in tres , vel quattuor , vel quinque partes æquales . nam rectum quidem angulum trifariam secare possumus , paucis eorum , quæ posterius tradentur , vtentes : acutū vero minime , nisi ad alias lineas , quæ mixtæ sunt , transcendamus . Datum enim angulum rectilineum trifariam secare docuit Nicomedes ex conchoidibus . alijs vero ex alijs lineis mixtis idem fecerunt , nimirum ijs , quæ à grecis τετραγωνίονονα dicuntur , nos quadrates appellare possumus : alijs ex lineis conicis , vt Pappus tradit in quarto libro collectionum mathematicarum . alijs denique ex lineis spirabilibus , de quibus Archimedes , incitati in datam proportionem datum angulum rectilineum fecerunt . Quorū contemplationes cum difficiles sint , presertim ijs , qui instituntur , in presentia omittimus .

A

Omnem angulum bifariam secare ex elementari institutione non licet . Rectum angulum trifariam secare possumus , acutū uero minime , nisi ad lineas mixtas transcendamus .

Iunctaq. DE constituetur in ea triangulum æquilaterum DEF .

B

Idem

Loco aequi-
lateri trian-
guli aequi-
cure consti-
tui potest.

Idem etiam sequetur si loco aequilateri tum in hoc, tum in sequentibus aequicure triangulum constituamus, & demonstratio eadem erit.

PROBLEMA V. PROPOSITIO X.

Datam rectam lineam terminatam bifariam secare.

1. huius.
Ex antecede-
te.

4. huius.

Sit data recta linea terminata AB . oportet ipsam A B bifariam secare. constitutur in ea triangulum aequilaterum ABC ; & secetur ACB angulus bifariam recta linea CD . Dico AB rectam lineam in puncto D bifariam secari. Quoniam enim AC est aequalis CB ; communis autem CD ; duae ACD duabus BCD CD aequales sunt; altera alteri; et angulus ACD aequalis angulo BCD . basis igitur AD basi BD est aequalis. et ob id recta linea terminata AB bifariam secata est in puncto D : quod facere oportebat.

F. C. COMMENTARIUS.

Hoc etiam Theorema est, quod rectam lineam terminatam ponit. Si quidem ex utraque parte infinitam terminare non possumus. Infinitae vero ex altera parte tantum, ubicunque punctum accipiat, in partes inaequales fit sectio. etenim quae in eisdem partibus est, in quibus recta linea infinita existit, reliqua finita existente necessario est maior. relinquatur igitur, ut ex utraque parte finita accipiat, quae bifariam secari debet.

Recta linea
terminatam
quae Apollonius
bifariam
secat.

Apollonius vero Pergeus rectam lineam terminatam bifariam secat in hunc modum. Sit, inquit, recta linea terminata AB , quam bifariam secare debemus. & centro quidem A , in intervallo autem AB circulus describatur: & rursum centro B , & intervallo BA describatur alius circulus; & ducatur CD communis circulorum sectio coniungens, quae rectam lineam AB bifariam secabit. Iungantur enim AC CB , quae inter se aequales sunt, cum utraque ipsi AB sit aequalis. communis autem CD ; & DA est aequalis DB ob eandem causam. angulus igitur ACD est aequalis angulo BCD . quare AB per quadratum bifariam secta est.

PROBLEMA VI. PROPOSITIO XII.

✱ Data recta linea à puncto in ipsa dato ad rectos angulos rectam lineam ducere.

2. huius.

1.

8. huius.

Diff. 10.

Sit data recta linea AB , et datum in ipsa punctum C . oportet à puncto C ipsi AB ad rectos angulos rectam lineam ducere. Sumatur in AC quodvis punctum D ; ipsiq; CD aequalis ponatur CE , et in DE constituatur triangulum aequilaterum FDE , et EF iungatur. Dico datam rectam lineam AB à puncto C in ipsa dato, ad rectos angulos ductam esse FC . Quoniam enim DC est aequalis CE , et FC communis; erunt duae DC CE duabus EC CF aequales, altera alteri: et basis DF est aequalis basi FE . angulus igitur DCF angulo ECF est aequalis: et sunt deinceps. Quando autem recta linea super rectam lineam insitens, eos qui deinceps sunt, angulos aequales inter se fecerit: rectus est uterque equalium angulorum. ergo uterque ipsorum DCF ECF est

est rectus. data igitur recta linea AB à puncto in ipsa dato C ad rectos angulos ducta est FC recta linea. quod fecisse oportuit.

F. C. COMMENTARIUS.

Data recta linea à puncto in ipsa dato.] linea specie datur; punctum vero positio: quod vel in medio erit rectae lineae, vel in altera eius extremitate. Euclides in medio rectae lineae sumpsit. Quòd si in extremitate altera signatur, vel ipsam producentes, reliqua eodem modo

construemus; vel aliter propositum

assequemur. Appollonius autem rectam lineam ad rectos angulos ducit

hoc pacto. Sit data quidem recta linea AB , datum vero in ea punctum

C , & in linea AC sumpto quouis

puncto D , ab ipsa CB auferatur C

E aequalis ipsi CD : & centro quidem D , intervallo autem DE circulus describatur. Rursusq; centro E ,

& intervallo ED alius circulus describatur: & à puncto F , in quo circuli se invicem secant, ducatur FC . Dico eam ad rectos angulos esse. si enim iungatur FD , FE aequales inter se erunt. sed & DC CE aequales; & communis FC . Quare ex octavo anguli qui ad C etiam inter se aequales sint necesse est. Si vero punctum in extremitate rectae lineae signatur, ita faciendum censeat Proclus. Sit recta linea AB , datumq; punctum A , & sumatur in AB quod vis punctum C , à quo ipsi AB , quemadmodum nos docuit, ad rectos angulos ducatur CE : & ab ea ipsi AC aequalis absindatur CD . angulus vero qui est ad C per rectam lineam CF bifariam secetur: atque à puncto D ipsi EC ad rectos angulos ducta occurrat rectae lineae CF in F puncto: & FA iungatur. Dico angulum, qui ad A rectum esse. Quoniam enim DC est aequalis CA , communis autem CF , & angulos aequales continent, quòd angulus ad C bifariam sectus est: erit & DF ipsi FA aequalis, & omnia similiter per quartum theorema omnibus aequalia. quare & angulus ad A aequalis est angulo ad D . angulus igitur ad A rectus erit; quod facere oportebat.

Problematis casus.

Quo Apollonius rectam lineam ad rectos angulos ducit.

3. huius.

Postul. 3.

Quòd pñctum in extremitate lineae sumitur quo faciendum sit, 3. huius.

4. huius.

PROBLEMA VII. PROPOSITIO XII.

Super datam rectam lineam infinitam, à dato puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit data quidem recta linea infinita AB , datum vero punctum C , quod in ea non est. oportet super datam rectam lineam infinitam AB , à dato puncto C , quod in ea non est, perpendicularem rectam lineam ducere. Sumatur enim ad alteras partes ipsius AB rectae lineae quodvis punctum D : et centro quidem C , intervallo autem CD circulus describatur EFG : et E G in H bifariam secetur: iunganturq; CG CH CE . Dico super datam rectam lineam infinitam AB , à dato puncto C , quod in ea non est, perpendicularem CH ductam esse. Quoniam enim aequalis est GH ipsi HE ; communis autem HC , duae GH HC , duabus EH HC aequales sunt, altera alteri; & basis CG est aequalis basi CE .

Postul. 3. 10. huius.

D angulus

8. huius.

Diffi. 10.

angulus igitur $\angle CHG$ angulo $\angle EHC$ est æqualis; & sunt deinceps. cum autem recta linea super rectam lineam insitens eos, qui deinceps sunt angulos, æquales inter se fecerit; rectus est uterque æqualium angulorum; et quæ insitit recta linea perpendicularis appellatur ad eam, cui insitit. ergo super datam rectam lineam in finitam AB à dato puncto C , quod in ea non est, perpendicularis ducta est CH . quod facere oportebat.

F. C. COMMENTARIUS.

Oenopides hoc problema invenit. Perpendicularis, antiqui gnomonem appellarunt. Perpendicularis plana, & solida.

Hoc problema, ut refert Proclus, Oenopides primus indagavit, utile ipsum ad astrologiam existimans. perpendiculararem vero antiquiorum more, gnomonem appellat, quoniam & gnomon horizonti ad angulos rectos est. quæ autem ad angulos rectos, eadem est perpendicularis, habitudine tantum ab ea differens, cum subiecto eadem sit, quemadmodum et gnomon. Rursus perpendicularis duplex est, alia plana, alia solida. quando enim punctum, à quo perpendicularis recta linea ducitur in subiecto plano sit, plana appellatur: quando autem punctum sit sublime, atque extra subiectum planum, solida. & plana quidem ad rectam lineam ducitur, solida vero ad planum. Quare necessarium est illam non ad unam rectam lineam angulos rectos facere, sed ad omnes, quæ in subiecto existentes plano ipsam contingunt. In hoc igitur problemate Euclides perpendiculararem planam ducere proponit, quippe cum ad rectam lineam ducatur: & quatenus in uno plano omnia constant, sermo procedat. At in linea quæ est ad angulos rectos quoniam punctum in ipsa sumptum est, nulla erit infinitatis necessitas: datam vero rectam lineam infinitam ponit, cum punctum, à quo perpendicularis duci debet, extra ipsam statuatur: si enim non esset infinita, poterat ita punctum sumi, ut extra quidem rectam lineam esset, indirectum autem ipsi, adeo ut protracta recta linea in ipsam incideret, & non fieret problema. Adde, quod nisi esset infinita, possemus etiam punctum ita sumere, ut si duceretur perpendicularis, non in ipsam, sed extra ipsam necessario caderet. His igitur de causis recta linea, ad quam perpendicularis ducenda est, infinita ponitur.

THEOREMA VI. PROPOSITIO XIII.

* Cum recta linea super rectam consistens lineam angulos fecerit, vel duos rectos, vel duobus rectis æquales efficiet.

diffi. 10.

Axioma. 1.

Recta enim linea quadam AB super rectam CD consistens angulos faciat $\angle CBA$ $\angle ABD$. Dico. $\angle CBA$ $\angle ABD$ angulos; vel duos rectos esse, vel duobus rectis æquales. si enim $\angle CBA$ est æqualis ipsi $\angle ABD$, duo recti sunt; sin minus, ducatur à puncto B ipsi CD ad rectos angulos BE . anguli igitur $\angle CBE$ $\angle EBD$ sunt duo recti. Et quoniam $\angle CBE$, duobus $\angle CBA$ $\angle ABE$ est æqualis, communis apponatur $\angle EBD$. ergo anguli $\angle CBE$ $\angle EBD$ tribus angulis $\angle CBA$ $\angle ABE$ $\angle EBD$ sunt æquales. Rursus quoniam $\angle DBA$ angulus est æqualis duobus $\angle DBE$ $\angle EBA$, communis apponatur $\angle ABC$. anguli igitur $\angle DBA$ $\angle ABC$ tribus $\angle DBE$ $\angle EBA$ $\angle ABC$ æquales sunt. At ostensum est angulos quoque $\angle CBE$ $\angle EBD$ eisdem tribus æquales esse: quæ vero eidem sunt equalia, et inter se equalia sunt. ergo et anguli $\angle CBE$ $\angle EBD$ ipsis $\angle DBA$ $\angle ABC$ sunt æquales. suntq; $\angle CBE$ $\angle EBD$ duo recti: anguli igitur $\angle DBA$ $\angle ABC$ duobus rectis æquales erunt. ergo cum recta linea super rectam lineam consistens angulos fecerit, vel duos rectos, vel duobus rectis æquales efficiet. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIUS.

* Cum recta linea super rectam lineam consistens angulos fecerit. 7. Animadvertendum est, ut inquit Proclus, Euclidem in hac propositione maximam diligentiam adhibuisse: non enim

etiam simpliciter dixit. Omnis recta linea super recta lineam consistens, vel duos rectos facit, vel duobus rectis aequales, sed si angulos fecerit, quid enim si in rectae lineae extremitate consistens unum efficit angulum? accidit ne quandoque huius duobus rectis aequalem esse? hoc certe fieri non potest. Omnis si quidem rectilineus angulus duobus rectis est minor, quemadmodum omnis solidus minor est quatuor rectis. Quod si angulum, qui maxime obtusus esse videatur, accipias, hunc quoque angulis, tanquam cum qui duorum rectorum mensuram adhuc non recipit. Oportet igitur rectam lineam sic consistere, ut angulos efficiat.

Omnis angulus rectilineus duobus rectis est minor.

THEOREMA VII. PROPO. XIII.

Si ad aliquam rectam lineam, atque ad punctum in ea duae rectae lineae non ad easdem partes posita, angulos qui deinceps sunt, duobus rectis aequales fecerint, ipsae rectae lineae indirectum sibi inuicem erunt.

Ad aliquam enim rectam lineam AB, atque ad punctum in ea B, duae rectae lineae BC BD non ad easdem partes posita, angulos, qui deinceps sunt, ABC ABD duobus rectis aequales faciant. Dico BD ipsi CB indirectum esse. si enim BD non est indirectum ipsi CB, sit ipsi CB indirectum BE. Quoniam igitur recta linea AB super rectam CBE consistit, anguli ABC ABE duobus rectis sunt aequales. Sed et anguli ABC ABD sunt aequales duobus rectis, anguli igitur CBA ABE ipsi CBA ABD aequales erunt, cois auferatur AB C, ergo reliquus ABE reliquo ABD est aequalis, minor maiori, quod fieri non potest. non igitur BE est indirectum ipsi B C. Similiter ostendimus neque aliam quampiam esse, praeter BD. ergo CB ipsi BD indirectum erit. Si igitur ad aliquam rectam lineam, atque ad punctum in ea duae rectae lineae non ad easdem partes posita, angulos, qui deinceps sunt, duobus rectis aequales fecerint, ipsae rectae lineae indirectum sibi inuicem erunt. quod de monstrare oportebat.

Ex antecedente.

F. C. COMMENTARIUS.

Hoc Theorema precedentis conversum est, & per deductionem ad id, quod fieri non potest, ostenditur, sic enim conversa theorematum ostendi debent, ut inquit Proclus.

Conversa theorema per deductionem ad id, quod fieri non potest, ostenditur.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO. XV.

Si duae rectae lineae se inuicem secuerint, angulos qui ad uerticem sunt, inter se aequales efficiunt.

Duae enim rectae lineae AB CD se inuicem secant in puncto E. Dico angulum quidem AEC angulo DEB; angulum vero CEB angulo AED aequalem esse. Quoniam enim recta linea AE super recta CD consistens angulos facit CEA AED; erunt hi duobus rectis aequales. Rursus quoniam recta linea DC super rectam AB consistens facit angulos AED DEB; erunt AED DEB anguli aequales duobus rectis. Ostensum autem est angulos quoque CEA AED duobus rectis esse aequales. anguli igitur CEA AED angulis AED DEB aequales sunt. communis auferatur AED. ergo reliquus CEA reliquo DEB est aequalis.

13. huius.

3. com. ne

E V C L I D. E L E M E N T.

æqualis. Simili ratione, & anguli C E B D E A æquales ostenduntur. Si igitur duæ rectæ lineæ se inuicem fecerint, angulos, qui ad verticem sunt, æquales efficient. quod ostendere oportebat.

C O R O L L A R I V M.

* Ex hoc manifeste constat rectas lineas quot quot se inuicem secant, facere angulos, ad sectionem quattuor rectis æquales.

F. C. C O M M E N T A R I V S.

Anguli dein
ceps.
Anguli ad
uerticem.

Angulorum
uertices.
Theorema
a Thalete in
uentū.

Corollaria
quæ nā sunt
in elementa-
ri institutio-
ne.

Corollaria
geometrica,
et arithmet.
Huius theo-
rematis con-
uersū a Pro-
clo demon-
stratur.

Anguli qui deinceps sunt ab angulis, qui ad verticem, differunt; horum enim ortus ex duarum rectarum sectione fit; illorum vero ex altera tantū ab altera secta. Nā si recta linea ipsa insecta maneat, alteramq. suo extremo secās, duos angulos fecerit, hos deinceps angulos vocamus. Si uero duæ rectæ lineæ, se inuicē fecerint, anguli ad verticē efficiuntur, sic dicti, quod vertices in eodē puncto coniunctos habeant. Vertices autem ipsorum sunt puncta, ad quæ plana diu contrahuntur, angulos efficiunt. Itaque hoc theorema ostendit duabus rectis lineis se inuicem secantibus, angulos ad verticem æquales esse: inuentum quidem à Thalete primo, ut inquit Eudemos, ab Euclide vero demonstratum; in quo deest constructio, utpote minus necessaria: demonstratio enim expositione contenta constructio aliqua non indiget.

Ex hoc manifestum est. ¶ Corollarium est quod ex precedenti demonstratione apparet. corollaria enim in elementari institutione sunt, ut inquit Proclus, quæ simul cum aliorum demonstrationibus apparent, ipsa vero non precipue queruntur: veluti id quod in presentia propositum est, nam querebatur quidem si duabus rectis lineis se inuicem secantibus, anguli ad verticem æquales essent. dum autem hoc ostenditur, simul etiam ostēsum est, quattuor, qui sunt, angulos, quattuor rectis æquales esse. Corollarium igitur est theorema, quod ex alterius problematis, vel theorematibus demonstratione ex improviso emergit. nam veluti casu quodam in corollaria incidere videmur, neque enim proponētibz nobis, neque etiam querētibz obuiam se se ferunt. Corollariorum uero alia geometrica sunt, alia arithmetica, & rursus alia problematibus consequentia sunt, alia theorematibus; & alia directis ostensionibus, alia deductionibus ad id, quod fieri non potest, ostēduntur. Huius autem theorematibus conuersum à Proclo ita demonstratur.

Si ad aliquam rectam lineam duæ rectæ lineæ non ad easdem partes sumptæ angulos ad uerticem æquales fecerint, ipsæ rectæ lineæ indirectū sibi inuicem erunt.

Sit enim recta linea quedam *AB*, & in ipsa quod vis punctum *C*; & ad *C* duæ rectæ lineæ *CD* *CE* non ad easdē partes sumptæ, quæ angulos *ACD* *BCE* æquales faciant. Dico ipsas *CD* *CE* in directum sibi ipsis esse. Quoniam enim recta linea *CD* super rectam lineam *AB* insitit, duos angulos duobus rectis efficit æquales; videlicet *DCA* *DCB*. Sed angulus *DCA* angulo *BCE* est æqualis. anguli igitur *DCB* *BCE* duobus rectis æquales sunt. Itaque quoniam ad aliquam rectam lineam *BC* duæ rectæ lineæ consequenter *CD* *CE* non ad easdem partes sumptæ, angulos deinceps duobus rectis æquales efficiunt: indirectum sibi inuicem erunt.

13. huius.

14. huius.

T H E O R E M A I X. P R O P O S I T I O X V I.

Omni trianguli vno latere producto exterior angulus utroque interiore, & opposito est maior.

Sit triangulum ABC , et unum ipsius latus BC ad D producatur. Dico exteriorē angulum ACD vtroque interiorē, et oppositō, videlicet CBA et BAC maiorem esse. Secetur enim AC bifariam in E , et iuncta BE producat ad F ; ponaturq; ipsi BE equalis EF , iungatur præterea FC , et ducta A ad G producatur. Quoniam igitur AE quidem est equalis EC , BE vero ipsi EF , duæ AE E B duæ CE EF æquales sunt, altera alteri: et angulus AEB angulo FEC est equalis, ad verticem enim sunt. basis igitur AB æqualis est basi FC ; et ABE triangulum triangulo FEC , et reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. ergo angulus BAE est equalis angulo ECF . Sed ECD angulus maior est ipso ECF . maior igitur est angulus ACD angulo BAC . Similiter recta linea BC bifariam secta, ostendetur etiā BCG angulus, hoc est ACD angulo ABC maior. Omnis igitur trianguli uno latere producto exterior angulus vtroque interiorē et oppositō maior est, quod oportebat demonstrare.

4. h. uis.

THEOREMA X. PROPOSITIO XVII.

Omnis trianguli duo anguli duobus rectis minores sunt, quomodocumque sumpti.

Sit triangulum ABC . Dico ipsius ABC trianguli duos angulos quomodocumque sumptos duobus rectis minores esse. producat enim BC ad D , et quoniam trianguli ABC exterior angulus ACD maior est interiorē, et oppositō ABC : cōmunis apponatur ACB . anguli igitur ACD ACB angulis ABC BCA maiores sunt. Sed ACD ACB sunt æquales duobus rectis. ergo ABC BCA duobus rectis sunt minores. Similiter demonstrabimus angulos quoque BAC ACB , itemq; CAB ABC duobus rectis minores esse. Omnis igitur trianguli duo anguli duobus rectis minores sunt, quomodocumque sumpti. quod demonstrare oportebat.

13. huius.

F. C. COMMENTARIUS.

Nunc quidem, ut inquit Proclus, indeterminare ostenditur, trianguli duos quoslibet angulos duobus rectis minores esse, in sequentibus vero determinabitur etiam quanto sint minores, nempe reliquo trianguli angulo: tres enim ipsius anguli duobus rectis æquales sunt. quare duo tanto minores sunt duobus rectis, quantus est reliquus trianguli angulus.

THEOREMA XI. PROPOSITIO XVIII.

Omnis trianguli maius latus maiorem angulum subtendit.

Sit triangulum ABC habens latus AC latere AB maius. Dico et ABC angulum angulo BCA maiorem esse. Quoniam enim AC maior est, quā AB , ponatur ipsi AB equalis AD ; et BD iungatur. Et quoniam trianguli BDC exterior angulus est ADB , erit is maior interiorē, et op-

16. huius.

posito

s. huius.

posito $\angle DCB$. Sed $\angle ADB$ æqualis est ipsi $\angle ABD$, quòd et latus AB lateri AD sit æquale. maior igitur est et $\angle ABD$ angulus angulo $\angle ACB$. quare $\angle B$ ipso $\angle C$ multo maior erit. Omnis igitur trianguli maius latus maiorem angulum subtendit. quod oportebat demonstrare.

T H E O R E M A . X I I . P R O P O S I T I O . X I X .

Omnis trianguli maiorem angulum maius latus subtendit.

Sit triangulum ABC maiorem habens AB angulum angulo BCA . Dico et latus AC latere AB maius esse. Si enim non est maius, vel AC est æquale ipsi AB , vel ipso minus. æquale igitur non est, nam et angulus ABC angulo ACB æqualis esset. non est autem. non igitur AC ipsi AB est æquale. Sed neque minus. esset enim et angulus ABC angulo ACB minor. atqui non est. non igitur AC minus est ipso AB . ostensum autem est neque æquale esse. ergo AC ipso AB est maius. Omnis igitur trianguli maiorem angulum maius latus subtendit. quod oportebat demonstrare.

F . C . C O M M E N T A R I V S .

Hoc precedentis theoremat is conuersum est, quare & per deductionem ad id, quod fieri non potest, demonstratur.

T H E O R E M A . X I I I . P R O P O S I T I O . X X .

Omnis trianguli duo latera reliquo maiora sunt, quomodo cumque sumpta.

Sit enim triangulum ABC . Dico ipsius ABC trianguli duo latera reliquo maiora esse, quomodo cumque sumpta. videlicet latera quidem BA AC maiora latere BC ; latera vero AB BC maiora latere AC ; et latera BC CA maiora ipso AB . producaturs enim BA ad punctum D ; ponaturq; ipsi CA æqualis AD ; et D Ciungatur. Quoniam igitur DA est æqualis AC , erit et angulus ADC angulo ACD equalis. Sed $\angle BCD$ angulus maior est angulo ACD . angulus igitur BCD angulo ADC est maior. Et quoniam triangulum est DCB , habens BCD angulum maiorem angulo BDC : maiorem autem angulum maius latus subtendit: erit latus DB latere BC maius. Sed DB est æquale ipsis BA AC . quare latera BA AC ipso BC maiora sunt. Similiter ostendemus et latera quidem AB BC maiora esse latere CA : latera vero BC CA ipso AB maiora. Omnis igitur trianguli duo latera reliquo maiora sunt, quomodo cumque sumpta. quod ostendere oportebat.

s. huius.

Ex antecedente.

F . C . C O M M E N T A R I V S .

Hoc theorema Epicuri impugnat tamquam a sino manifestum.

Presens theorema, ut scribit Proclus, Epicurei impugnare consueuerunt, tum a sino ipsum manifestum esse dicentes, tum nulla egere probatione. a sino autem manifestum esse, ostendunt ex eo, quòd verba in altero lateri extremo posita, a sinus pabuli expectens, vni latus peragrat, & non duo. Aduersus hec dicendum. Theorema sensu quidem manifestum esse, non autem & scientiam gi gnente ratione. multis enim rebus hoc accidit. exempli gratia ignis calefacit. hoc quoque sensu indubitan

dubitatum est, sed quo nam pacto calefaciat, convincere scientiæ officium est. Sic igitur duo trianguli latera reliqua esse maiora, sensui manifestum, quò aut hoc fiat dicere ad scientiã pertinet. Alij aliter hoc theorema demonstrarunt, recta linea minime producta; ut videre licet apud Proclũ.

THEOREMA XIII. PROPOSITIO XXI.

Si à terminis vnius lateris trianguli duæ rectæ lineæ intra constituantur, hæ reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, maiorem vero angulum continebunt.

Trianguli enim ABC in vno latere BC à terminis B C duæ rectæ lineæ intra constituantur BD DC . Dico BD DC reliquis duobus trianguli lateribus BA AC minores quidem esse, maiorem vero continere angulum BDC angulo BAC , producatur enim BD ad E . Et quoniam omnis triânguli duo latera reliquo sunt maiora, erunt trianguli ABE duo latera BA AE maiora latere BE , communis apponatur EC , ergo BA AC ipsis BE EC maiora sunt. Rursus quoniam CED triânguli duo latera CE ED sunt maiora latere CD , communis apponatur DB , quare CE EB ipsis CD DB sunt maiora. Sed ostensum est BA AC maiora esse BE EC , multo igitur BA AC ipsis BD DC maiora sunt. Rursus quoniam omnis triânguli exterior angulus interiore, et oppositi est maior: erit triânguli CDE exterior angulus BDC maior ipso CED . Eadem ratio ne et triânguli ABE exterior angulus CEB ipso BAC est maior. Sed angulus BDC ostensus est maior angulo CEB , multo igitur BDC angulus angulo BAC maior erit. Quare si à terminis vnius lateris trianguli duæ rectæ lineæ intra constituantur, hæ reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, maiorem vero angulum continebunt. quod demonstrare oportebat.

Ex antecedente.

15. huius.

PROBLEMA VIII. PROPOSITIO XXII.

Ex tribus rectis lineis, quæ tribus rectis lineis datis æquales sint, * triângulum constituere. oportet autem duas reliqua maiores esse, quomodocumque sumptas; quoniam omnis triânguli duo latera reliquo maiora sunt, quomodocumque sumpta.

Sint tres datæ rectæ lineæ A B C , quarum duæ reliqua maiores sint, quomodocumque sumptæ, ut scilicet AB quidem sint maiores quam C , AC vero maiores quam B , et præterea BC maiores quam A . Itaq; oportet ex rectis lineis æqualibus ipsis A B C triângulũ constituere. ex

ponatur aliqua recta linea DE , terminata quidem ad D , infinita vero ad E ; et ponatur ipsi quidem A æqualis DF , ipsi vero B æqualis FG , et ipsi C æqualis GH : et centro

3. postul.

centro F, intervallo autem FD circulus describatur DKL. Rursusq; centro G, et in
teruallo GH alius circulus K LH describatur, et iungantur KF KG. Dico ex tribus
rectis lineis æqualibus ipsis A B C triangulum KF G constitutum esse. Quoniam
enim punctum F centrum est DKL circuli; erit FD æqualis FK. Sed FD est æqua-
lis A. ergo et FK ipsi A est æqualis. Rursus quoniam punctum G centrum est circu-
li LKH, erit GH æqualis GK. Sed GK est æqualis C. ergo et GH ipsi C æqualis
erit. est autem et FG æqualis B. tres igitur rectæ lineæ KF FG GK tribus A B C
æquales sunt. Quare ex tribus rectis lineis KF FG GK, quæ sunt æquales tribus
datis rectis lineis A B C, triangulum constitutum est KF G. quod facere oportebat.

F. C. C O M M E N T A R I V S.

Problemati
alia indeter-
minata, alia
terminata.

Determina-
tio duplex.

*Presens problema determinatum est. problematum enim quemadmodum & theorematum
alia quidem indeterminata sunt, alia vero determinata. Si enim hoc modo simpliciter dixerimus,
ex tribus rectis lineis, quæ tribus datis rectis lineis æquales sint, triangulum constituere. pro-
blema indeterminatum erit, & fieri non poterit. Si autem addiderimus, quarum duæ reliqua sint
maiores, quomodocumque sumptæ, determinatum erit, & fieri poterit. determinatio enim du-
plex est, altera quidem pars problematis, vel theoremat, quæ post expositionem ponitur, si-
gnificans quid sit illud, quod queritur; altera vero, quæ propositionem vniuersalem esse probi-
bet, explicans quando, & quâ ratione, & quot modis id quod propositum est fieri possit, ut
hoc loco, oportet autem duas reliqua maiores esse, quomodocumque sumptas. quo-
niam omnis trianguli duo latera reliquo sunt maiora, quomodocumque sumpta.]
& in sexto libro.] Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum
applicare, deficientis figura parallelogramma, quæ similis sit alteri date, oportet
autem datum rectilineum, cui æquale applicandum est, non maius esse eo, quod
ad dimidiam applicatur, similibus existentibus defectibus, et eo, quod à dimidia,
et eo, cui oportet simile deficere.] Quemadmodum autem theorematum iuxta verum, &
falsum diuisio fit, ita & problematum iuxta id, quod fieri, & quod non fieri potest. Proclus in
commentarijs citat Euclidis verba, quæ à verbis huiusce demonstrationis discrepant, ut luce cla-
rius sit Euclidis demonstrationes aliquibus in locis à Theone immutatas esse, & eas, quas nunc ba-
benus Theoris esse, non Euclidis.*

Theorema-
tum diuisio
iuxta verum
& falsum.
Problemati
diuisio iuxta
id, quod fie-
ri, & quod non
fieri potest.

P R O B L E M A I X . P R O P O S I T I O XXIII.

Ad datam rectam lineam, & ad datum in ea punctum, dato an-
gulo rectilineo æqualem angulum rectilineum constituere.

Sit data quidem recta linea A B, datum
vero in ipsa punctum A; et datus angulus re-
ctilineus D C E. oportet igitur ad datam re-
ctam lineam A B, et ad datum in ea pun-
ctum A dato angulo rectilineo D C E, æqua-
lem angulum rectilineum constituere. Sumā-
tur in vtraque ipsarum C D C E quævis pun-
cta D E, iungaturq; DE, et ex tribus rectis li-
neis, quæ æquales sint tribus C D D E E C
triangulum constituitur A F G, ita ut C D
sit æqualis A F, et C E ipsi A G, et D E ipsi F G.

Itaque quoniam duæ DC CE duabus F A A G æquales sunt, altera alteri; et basis
D E est æqualis basi F G; erit et angulus DCE angulo F A G æqualis. Ad datam igitur
rectam lineam A B, et ad datum in ea punctum A, dato angulo rectilineo DCE
æqualis angulus rectilineus constitutus est F A G. quod facere oportebat.

3. huius.

Et ex tribus rectis lineis, quæ æquales sint tribus CD DE EC triangulum constituitur AFG. J A recta linea AB abscindatur AG æqualis ipsi CE: & centro quidem A, intervallo autem ipsi CD æquali describatur circulus: & rursus centro G & intervallo æquali ipsi ED alius circulus describatur, ut circuli se invicem in puncto F secent: & iungantur AF, FG. Dico iam saltem esse, quod proponebatur: & demonstratio eadem erit. Hoc autem problema ab Oenopide inventum esse tradit Eudemus.

3. Huius.
g. Postul.

THEOREMA. XV. PROPOSITIO. XXIII.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus equalia habeant, alterum alteri, angulum autem angulo maiorem, qui æqualibus rectis lineis continetur; et basim basi maiorem habebunt.

Sint duo triangula ABCDEF, quorum duo latera AB AC duobus lateribus DE DF æqualia habeant, alterum alteri, videlicet lateris quidem AB æquale lateri DE; lateris vero AC æquale lateri DF: & angulus BAC angulo EDF fit maior. Dico et basim BC basi EF maiorem esse. Quoniam enim angulus BAC maior est angulo EDF, constituitur ad rectam lineam DE, et ad punctum in ea D, angulo BAC æqualis angulo EDG, ponaturque; alterutri ipsarum AC DE æqualis DG, et GE FG iungantur. Itaque quoniam AB quidem est æqualis DE, AC vero ipsi DG; dua B A, A C duabus ED, DG æquales sunt, altera alteri; et angulus BAC est æqualis angulo EDG, ergo basis BC basi EG est æqualis. Rursus quoniam æqualis est DG ipsi DF; et angulus DFG angulo DGF, erit DFG angulus angulo EGF maior, multo igitur maior est EFG angulus ipso EGF. Et quoniam triangulum est EFG, angulum EFG maiorem habens angulo EGF; maiori autem angulo maius latus subtenditur; erit et latus EG latere EF maius. Sed EG latus est æquale lateri BC, ergo et BC ipso EF maius erit. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, angulum autem angulo maiorem, qui æqualibus rectis lineis continetur; et basim basi maiorem habebunt, quod oportebat demonstrare.

Ex antecedente.
4. huius.
5. huius.
19. huius.

Hoc theorema quarto oppositum est, illud enim angulos qui sunt ad vertex triangulorum æquales ponit, hoc inæquales; illud bases æquales, hoc inæquales esse demonstrat.

Et GEFG iungantur recta linea EG, vel cadit supra EF, vel in ipsam, vel infra ipsam. Euclides vi supra cadentem accepit. Quod si in ipsam cadat, ut in secunda figura, idem ostenditur. Sunt enim due B A, A C duabus ED, DG æquales: & cum æquales contineant angulos, & basis BC basi EG æqualis erit. Sed EG

Hoc theorema quarto oppositum.
4. huius.

est maior, quam EF, ut totum est maius, quam ipsius pars, ergo & BC quam EF est maior. Cadat postremo infra ipsam, ut in tertia figura. Similiter demonstrabimus basim BC basi EG aequalem esse. Cum aut duae EF FD intra triangulum EDG constitutae minores sint, quam duae EG GD; sitq; D G ipsi DF aequalis; erit reliqua EG maior, quam reliqua EF. Sed BC est equalis EG, ergo et BC quam EF maior sit necesse est.

21. huius.

THEOREMA XVI. PROPOSITIO XXV.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus aequalia habeant, alterum alteri, basim vero basi maiorem; & angulum angulo, qui aequalibus lateribus continetur, maiorem habebunt.

Sint duo triangula ABC DEF, quae duo latera AB AC duobus lateribus DE DF aequalia habeant, alterum alteri, videlicet latus AB aequale lateri DE, et latus AC lateri DF: basim autem BC basi EF sit maior. Dico et angulum BAC angulo EDF maiorem esse. si enim non est maior, vel aequalis est, vel minor. aequalis autem non est angulus BAC angulo EDF: esset enim et basis BC basi EF aequalis, non est aut. non igitur aequalis est BAC angulus angulo EDF, sed neque minor, minor enim esset et basis BC basi EF, atqui non est, non igitur angulus BAC angulo EDF est minor, ostensum autem est, neque esse aequalem, ergo angulus BAC angulo EDF necessario maior erit. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus aequalia habeant, alterum alteri, basim vero basi maiorem; et angulum angulo, qui aequalibus lateribus continetur, maiorem habebunt, quod demonstrare oportebat.

4. huius.

Ex antecedenti.

F. C. COMMENTARIUS.

Hoc theorema octavo quidem oppositum est, precedentis vero conversum, quod alij aliter demonstrarunt, ut tradidit Proclus.

Hoc theorema octavo quidem oppositum est, precedentis vero conversum, quod alij aliter demonstrarunt, ut tradidit Proclus.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO XXVI.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis aequales habeant, alterum alteri, unumq; latus vni lateri aequale, vel quod aequalibus adiacet angulis, vel quod vni aequalium angulorum subrenditur, et reliqua latera reliquis lateribus aequalia, alterum alteri, et reliquum angulum reliquo angulo aequalem habebunt.

Sint duo triangula ABC DEF, quae duos angulos ABC BCA duobus angulis DEF EFD aequales habeant, alterum alteri, videlicet angulum quidem ABC aequalem angulo DEF; angulum vero BCA angulo EFD, habeant autem et unum latus vni lateri aequale, et primum quod aequalibus adiacet angulis; nempe latus BC lateri EF. Dico et reliqua latera reliquis lateribus aequalia habere, alterum alteri, latus scilicet AB lateri DE; et latus AC

ipsi

ipſi DF , et reliquum angulum BAC reliquo angulo EDF æqualem. Si enim inæqualis eſt AB ipſi DE , vna ipſarum maior eſt. Sit maior AB , ponatur; GB æqualis DE ; et GC iungatur. Quoniam igitur BG quidem eſt æqualis DE , B C vero ipſi EF , duæ G B C duabus D E EF æquales ſunt, altera alteri; angulus B C æqualis angulo D E F , baſis igitur GC baſi DF eſt æqualis; et G B C triangulū triangulo DEF , et reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur. ergo GC B angulus eſt æqualis angulo D F E . Sed angulus D F E angulo B C A æqualis ponitur, quare et B C G angulus angulo B C A eſt æqualis, minor maiori, quod fieri nō pōt. non igitur inæqualis eſt AB ipſi DE . ergo æqualis erit. eſt autem et B C æqualis EF . Itaque duæ AB B C duabus DE EF æquales ſunt, altera alteri, et angulus B C A æqualis angulo D E F , baſis igitur AC baſi DF , et reliquus angulus B A C reliquo angulo E D F eſt æqualis. Sed rurſus ſunt latera, quæ æqualibus angulis ſubtenduntur æqualia, vt AB ipſi DE . Dico rurſus et reliqua latera reliquis lateribus æqualia eſſe; A C quidem ipſi DF . B C vero ipſi EF . et adhuc reliquum angulum B A C reliquo angulo E D F æqualem. Si enim inæqualis eſt B C ipſi EF , vna ipſarum maior eſt. Sit maior B C , ſi fieri poteſt, ponatur; B H æqualis EF , et A H iungatur. Quoniam igitur B H quidem eſt æqualis EF , A B vero ipſi DE , duæ AB B H duabus DE EF æquales ſunt, altera alteri, et angulos æquales continent. ergo baſis AH baſi DF eſt æqualis; et A B H triangulum triangulo DEF , et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur. æqualis igitur eſt angulus B H A angulo E F D . Sed E F D eſt æqualis angulo B C A , ergo et B H A angulus angulo B C A eſt æqualis. Trianguli igitur A H C exterior angulus B H A æqualis eſt interiori; et oppoſito B C A , quod fieri non poteſt, quare nō inæqualis eſt B C ipſi EF . æqualis igitur eſt autem et A B æqualis DE . duæ igitur AB B C duabus DE EF æquales ſunt, altera alteri: anguloſq; æquales continent, quare baſis AC æqualis eſt baſi DF , et A B C triangulum æquale triangulo DEF , et reliquus angulus B A C reliquo angulo E D F eſt æqualis. Si igitur duo trianguſa duos angulos duobus angulis æquales habeant, alterum alteri, vnumq; latūs vni lateri æquale, vel quod æqualibus adiacet angulis, vel quod vni æqualium angulorum ſubtenditur; et reliqua latera reliquis lateribus æqualia, alterum alteri, et reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt. quod oportebat demonſtrare.

4. huius.

4. huius.

F. C. COMMENTARIUS.

Hoc theorema ad Thaletem reſertur, vt Proclus ex Eudemo tradit. De triangulorum quidem ortu, & æqualitate, vel inæqualitate quæcumque in elementari inſtitutione dici poterant, ex ſuperioribus dilectimus. De quadrilateris deinceps Euclides agit; præcipue vero de parallelogrammis: ſimul cum horum contemplatione de trapezijs differens, diuiditur enim quadrilaterum, vt ſuperius dictum eſt in parallelogrammum, & trapezium: rurſuſq; parallelogrammum in alias ſpecies: & trapezium ſimiliter. Verum quoniam parallelogrammum quidem ob æqualitatis participationem ordinatum eſt: trapezium vero neque eiuſdem, neque ſimilem ſeruat ordinem: non immerito præcipue quidem de parallelogrammis ſermonem habet; ſimul vero cum his trapezium contemplatur. ex parallelorum enim ſectiōe ortus trapeziorum apparebit, vt procedentibus nobis fiet manifeſtum. Sed quoniam rurſus fieri non poteſt, vt de parallelogrammorum, vt de conſtructione, vel æqualitate aliqd dicatur abſque parallelarum conſideratione; vt enim ex ipſo quoque nomine apparet parallelogrammum eſt, quod à parallelis rectis lineis è regione poſitis deſcribitur: neceſſario à parallelis doctrinæ initium facit. paulum vero progreſſus ab his ad parallelogrammorum tractationem accedit, vno vſus theoremate medio inter harum, illorumq; inſtitutionem elementarem, quod quidem videtur ſymptoma quoddam, quod parallelis ineſt, contemplari: primum autem ortum parallelogrammorum tradit. tale enim eſt. [Rectæ lineæ, quæ æquales, et parallelæ ad eandem partes coniungunt, et ipſæ æquales, et parallelæ ſunt. Inam in hoc conſideratur quidem ſymptoma quoddam æqualibus, ac parallelis; ex coniunctione autem apparet parallelogrammum, quod latera æqualia, et parallelæ è regione poſita habet. Parallelarum

Hoc theorema ad Thaletem reſertur.

Parallelogrammum ordinatum eſt, trapezium vero minime.

Parallelogrammum eſt quod à parallelis deſcribitur.

Parallelogrammum ortum.

Parallelis
tia per se in
sunt.

Apollonius
de conicis li-
neis agit.
Nicomedes
de cochoid.
Hippias de
quadratis
Perseus de
spiculis,

igitur sermone necessario preassumptum esse, ex his constat. Tria autem assumere oportet, quae parallelis per se insunt, ipsasq; expl. cant: & cum ipsis cōuertantur. neque solum tria simul, sed & unum quodque seorsum ab alijs sumptum: quorum unum hoc est, recta linea parallelas secante, alternos angulos inter se aequales esse: recta linea parallelas secante angulos interiores duobus rectis esse aequales. reliquum vero, recta linea parallelas secante, angulum exteriorum interiori; & opposito aequalem esse. horum autem symptomatum unumquodque demonstratum parallelas esse rectas lineas affirmare potest. Hoc modo & alij mathematici de lineis differere conueniunt, unus cuiusque speciei symptoma tradentes. Apollonius enim in qualibet conicarum linearum, quid symptoma sit ostendit: & Nicomedes in conchoidibus, & Hippias in quadratibus. & Perseus in spiricis. nam post earum ortum, quod ipsis per se, & quatenus ipsum inest, assumptum, constitutam nobis formam ab omnibus alijs distinguit. Eodem igitur modo, & elementarium institutor parallelarum symptomata primum inuestigat. Hec ex Proclo.

T H E O R E M A X V I I . P R O P O S I T I O X X V I I .

Si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter se aequales fecerit, parallelae erunt rectae lineae.

26. huius.

26. huius.

diff. 35.

In duas enim rectas lineas, A B, C D, recta linea E F incidens alternos angulos A E F, E F D aequales inter se faciat. Dico rectam lineam A B ipsi C D parallelam esse. Si enim non est parallela, producat A B, C D, vel ad partes B D conuenient, vel ad partes A C, producantur, conueniantq; ad partes B D in puncto G. Itaque G E F trianguli exteriori angulus A E F maior est interiore et opposito E F G. Sed et aequalis, quod fieri nō pot. non igitur A B, C D producat ad partes B D conuenient. Similiter demonstrabitur neque conuenire ad partes A C. quae vero in neutras partes conueniunt, parallelae inter se sunt. parallela igitur est A B, ipsi C D. Quare si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter se aequales fecerit, parallelae inter se erunt rectae lineae. quod ostendere oportebat.

F . C . C O M M E N T A R I V S .

Si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos, Alternos angulos appellat eos, qui neque ad eandem partes, neque deinceps sunt, sed ab incidente linea distinguuntur, cum utrique intra parallelas existant. differunt autem quod alter sursum alter deorsum ponatur. Ut exempli gratia, rectis lineis A B, & C D existentibus, incidenteq; in ipsis recta linea E F, angulos A E F, D F E; itemq; angulos C F E, B E F alternos esse dicit.

ut pote alterno, commutato ue ordine iuxta positionem se habentes. Illud autem sciendum est, cum talis sit rectarum linearum situs, omnia symptomata ex diuisione sex fieri, quorum tria tantum Geometra accepit, tria vero omisit. vel enim ad eandem partes angulos sumemus, vel non ad eandem: & si ad eandem, vel utrosque intra rectas lineas; quas parallelas ostendit, vel utrosque extra, vel unum quidem intra, alterum vero extra. Si vero non ad eandem partes, similiter vel utrosque intra, vel extra, vel unum intra, & alterum extra. Sint enim rursus rectae lineae A B, C D, in quas incidat recta linea E F: & ad H G puncta producat. Si igitur ad easde partes angulos accipias, vel utrosq; intra pones, ut B E F, & E F D, vel ipsos, A E F, & E F C, vel utrosq; extra, ut H E B, D F G, vel H E A, C F G, vel unum quidem intra, alterum vero extra, ut H E B, E F D, vel G F D, F E B; vel H E A, E F C, vel G F C, A E F, quadrupliciter

quadrupliciter enim hi accipiuntur. Si vero non ad easdem partes, vel utrosque intra, ut $A E F$ $E F D$, vel $C F E$ $F E B$: vel utrosque extra, ut $A E H$ $D F G$, vel $H E B$ $C F G$, vel unum quidem intra, alterum vero extra; atque hoc rursus quadrupliciter, vel enim $A E H$ $E F D$, vel $H E B$ $E F D$, vel $G F C$ $F E B$, vel $G F D$ $F E A$. Cum igitur anguli sex modis sumantur, Euclides tres solas sumptiones elegit, unam quidem ex ijs angulis, qui non ad easdem sunt partes, et qui intra tantum sumuntur; quos alternos appellavit; dux vero ex ijs, qui ad easdem partes vel utrique intra sumuntur, quos duobus rectis æquales esse dicit: vel unus quidem extra, alter vero intra sumitur, quos dicit inter se æquales esse. Tres vero reliquas omisit, ut pote quos eadem omnino consequatur. Sint enim ad easdem partes utrique extra anguli $H E B$ $D F G$. Dico hos duobus rectis æquales esse. angulus enim $D F E$ angulo $H E B$, & angulus $B E F$ angulo $D F G$ est æqualis. Si autem anguli $B E F$ $E F D$ duobus rectis sunt æquales, anguli etiam $D F G$ $H E B$ duobus rectis æquales erunt. Sint rursus non ad easdem partes anguli $A E H$ $E F D$, quorum alter sit extra, alter intra; ipsi quoque duobus rectis sunt æquales. Quoniam enim angulus $A E H$ æqualis est angulo $B E F$, anguli vero $B E F$ $E F D$ duobus rectis æquales sunt; erunt & anguli $A E H$ $E F D$ duobus rectis æquales. Sint postremo non ad easdem partes utrique extra anguli $A E H$ $D F G$. Dico eos etiam inter se æquales esse. Nam cum angulus $A E H$ æqualis sit angulo $B E F$, & angulus $D F G$ angulo $E F C$ inter se æqualis sit angulo $B E F$ $E F C$ alterni inter se æquales: anguli etiam $A E H$ $D F G$ inter se æquales sunt necesse est.

Cum anguli sex modis sumantur. Euclides tres solas sumptiones elegit, reliquas omisit.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XXVIII.

Si in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulū interiori, et opposito, et ad easdem partes æqualem fecerit, vel interiores, et ad easdem partes duobus rectis æquales; parallelæ erūt inter se rectæ lineæ.

In duas enim rectas lineas $A B$ $C D$ recta linea $E F$ incidens exteriorem angulum $E G B$ interiori et opposito $G H D$ æqualem faciat; vel interiores, et ad easdem partes $B G H$ $G H D$, duobus rectis æquales. Dico rectam lineam $A B$ rectæ $C D$ parallelam esse. Quoniam enim $E G B$ angulus æqualis est angulo $G H D$, angulus autem $E G B$ angulo $A G H$ erit, et angulus $A G H$ angulo $G H D$ æqualis: et sunt alterni. parallela igitur est $A B$ ipsi $C D$. Rursus quoniam anguli $B G H$ $G H D$ duobus rectis sunt æquales, et sunt $A G H$ $B G H$ æquales duobus rectis: erunt anguli $A G H$ $B G H$ angulis $B G H$ $G H D$ æquales. communis auferatur $B G H$. reliquus igitur $A G H$ est æqualis reliquo $G H D$: et sunt alterni. ergo $A B$ ipsi $C D$ parallela erit. Si igitur in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulum interiori et opposito, et ad easdem partes æqualem fecerit, vel interiores, et ad easdem partes duobus rectis æquales; parallelæ erunt inter se rectæ lineæ. quod demonstrare oportebat.

15. huius.

Ex antecedente. 13. huius.

F. C. COMMENTARIUS.

Hoc theorema à Ptolemæo aliter demonstratur, ut tradit Proclus.

THEOREMA XX. PROPOSITIO XXIX.

In parallelas rectas lineas recta linea incidens, et alternos angulos inter se æquales, et exteriorem interiori et opposito, et ad easdem

Theorema à Ptolemæo aliter demonstratur.

easdem partes æqualem, et interiores et ad easdem partes duobus rectis æquales efficiet.

In parallelas enim rectas lineas $AB\ CD$ recta linea incidat EF . Dico alternos angulos $AGH\ CHD$ inter se æquales efficere, et exteriorē EGB interiori et opposito, et ad easdem partes GHD æqualē: et interiores et ad easdem partes $BGH\ GHD$ duobus rectis æquales. Si enim inæqualis est AGH ipsi GHD , vnus ipsorum maior est. Sit maior AGH . et quoniam AGH angulus maior est angulo GHD ; communis apponatur BGH . anguli igitur $AGH\ BGH$ angulis $BGH\ GHD$ maiores sunt. Sed anguli $AGH\ BGH$ sunt æquales duobus rectis. ergo $BGH\ GHD$ maiores sunt. Sed anguli $AGH\ BGH$ sunt æquales duobus rectis. minorēs. Quæ vero à minoribus, quàm sint duo recti in infinitum producantur rectæ lineæ inter se conueniunt. ergo rectæ lineæ $AB\ CD$ in infinitum productæ conuenient inter se. atqui non conueniunt, cum parallelæ ponantur. non igitur inæqualis est AGH equalis est angulo EGB . ergo et EGB ipsi GHD equalis erit. communis apponatur BGH . anguli igitur $EGB\ BGH$ sunt æquales angulis $BGH\ GHD$. Sed $EGB\ BGH$ æquales sunt duobus rectis. ergo et $BGH\ GHD$ duobus rectis æquales erunt. In parallelas igitur rectas lineas recta linea incidens, et alternos angulos inter se æquales, et exteriorē interiori et opposito, et ad easdem partes æqualem; et interiores et ad easdem partes duobus rectis æquales efficiet. quod oportebat demonstrare.

13. huius.

Post 5.

15. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc theorema, vt inquit Proclus, virisque præcedentibus conuertitur. quod enim in vtroque illorum est questum, positionem facit; & quæ in illis data sunt, demonstrare proponit: atque hæc conuersorū differentia silentio prætereunda non est. nam omne quod conuertitur, aut vnum vni conuertitur, vt quinto sextum, aut pluribus vnum, & præcedentibus; quod nunc proponitur: aut plura vni, vt paulo post manifestum erit.

Quæ vero à minoribus, quàm sint duo recti in infinitum producantur rectæ lineæ inter se conueniunt. Postulatum quintum est, quod tamen cum euident non sit, & demonstratione indigere videatur, Proclus ita demonstrandum censuit, duobus præmissis, nimirum axioma te quopiam, quo etiam Aristoteles vsus est, & lemmate.

AXIOMA.

Si ab vno puncto duæ rectæ lineæ angulum facientes in infinitum producantur, ipsarum distantia omnem finitam magnitudinem excedit.

LEMMA.

Si alteram parallelarum secuerit recta quædam linea; reliquam quoque secabit.

Sint parallelæ $AB\ CD$; secetq; ipsam AB recta linea EFG . Dico EFG reliquam quoque CD secare. Quoniam enim duæ rectæ lineæ sunt, quæ ab vno puncto F in infinitum producantur, $BF\ FG$; omni finita magnitudine maiorem habebunt distantiam. quare & maiorem ea magnitudine, quæ tanta est, quantum est intervallum inter parallelas interiectum. cum igitur harum linearum distantia maior fuerit, quàm distantia parallelarum, recta linea FG secabit ipsam CD . Quare si alteram parallelarum se-

cuerit quedam recta linea, reliquam quoque secabit.

Hoc autem demonstrato consequenter propositum demonstrabitur. Sint enim duae rectae lineae AB CD , & in ipsas incidat recta linea EF , angulos BEF DFE duobus rectis minores efficiens. Dico rectas lineas inter se concurrere ad eas partes, in quibus sunt anguli duobus rectis minores. Cum enim anguli BEF DFE duobus rectis minores sint, sit excessus duorum rectorum aequalis HEB angulus, & HE ad K producat: Intraque quoniam in rectas lineas HK CD recta linea EF incidit, interioresque angulos HEF DFE duobus rectis efficit aequales, rectae lineae HK CD parallelae erunt. & AB secat ipsam HK : ergo reliquam quoque CD secabit per antecedens lemma. convenient igitur inter se rectae lineae AB CD ad eas partes, in quibus sunt anguli duobus rectis minores, quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXX.

Quae eidem rectae lineae sunt parallelae, & inter se parallelae erunt. *

Sit utraque ipsarum AB CD ipsi EF parallelae. Dico et AB ipsi CD parallelam esse. Incidat enim in ipsas recta linea GK . Et quoniam in parallelas rectas lineas AB EF , recta linea GK incidit, angulus AGH angulo GHE est aequalis. Rursum quoniam in parallelas rectas lineas EF CD , recta linea incidit GK , aequalis est GHE angulus angulo GKD . ostensus autem est & angulus AGK angulo GHE aequalis. ergo et AGK ipsi GKD aequalis erit, et sunt alterni. parallela igitur est AB ipsi CD . ergo quae eidem rectae lineae sunt parallelae, & inter se parallelae erunt, quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIUS.

Quae eidem rectae lineae sunt parallelae, et inter se parallelae erunt. Contingit autem hoc, ut inquit Proclus, non in omnibus respectibus verum esse. non enim quae eiusdem duplae, & inter se dupla sunt, nec quae eiusdem sesquialtera, inter se sunt sesquialtera, sed in illis solis locum habere videntur, quae cumque invicem convertuntur, ut in equalitate, in similitudine, in identitate, & in parallela positione. Quae enim parallelae parallelae, & ipsa parallela est, quemadmodum, & quod aequali aequale, & ipsum est aequale; & quod simili simile, & ipsum simile. parallelarum enim ad se se respectibus similitudo positionis est.

PROBLEMA X. PROPOSITIO XXXI.

Per datum punctum datae rectae lineae parallelam rectam lineam ducere. *

Sit datum quidem punctum A , data vero recta linea BC . oportet per A punctum ipsi BC rectae lineae parallelam rectam lineam ducere. Sumatur in BC quodvis punctum D , & iungatur AD : constituturque ad rectam lineam DA , & ad punctum in ipsa A , angulus ADC aequalis angulus DAB : & in directum ipsi BA recta linea AF producat. Quoniam igitur in duas rectas lineas BC EF recta linea AD incidens alternos angulos EAD ADC inter se aequales efficit, EF ipsi BC parallela erit. Per datum igitur punctum A datae rectae lineae BC parallela ducta est recta linea EAF , quod facere oportebat.

23. Huius.

27. Huius.

F. C.

- * Per datum punctum data recta linea parallelam rectam lineam ducere: *J* Vide-
tur hoc problema parallelarum ortu tradere. At datum punctum extra rectam lineam sumere opor-
tet, ita ut a puncto ad ipsam ducta recta linea angulum faciat, alioqui nulla alia preter iam dicta,
duci poterit. differunt autem per datum punctum, & a dato puncto rectam lineam ducere. Quan-
do enim punctum rectae lineae, quae ducitur, principium est: ab ipso fit deductio, ut in illo proble-
mate, super datum rectam lineam infinitam a puncto, quod in ea non est, perpen-
dicularem rectam lineam ducere. Quando autem punctum in recta linea est, per ipsum de-
ductio fieri dicitur, ut nunc in parallelis. Per datum punctum data recta linea parallelam
rectam lineam ducere; *J* & quemadmodum non licet ab eodem puncto super datam rectam
lineam duas perpendiculares, vel plures ducere, ita neque per idem punctum datae rectae linea
duas, vel plures parallelas ducere. parallelae enim in dicto puncto inter se conveniunt. quod
est absurdum.

Per datum
punctum, &
a dato puncto
linea ducatur.

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXXII.

Omnis trianguli uno latere producto exterior angulus duobus
interioribus, et oppositis est aequalis; et trianguli tres interiores an-
guli duobus rectis aequales sunt.

Sic triangulum ABC : et unum ipsius latu-
rum AC in D producat. Dico angulum exte-
riorem ACD duobus interioribus et oppositis
 CAB ABC aequalem esse; et trianguli tres in-
teriores angulos ABC BCA CAB duobus
rectis esse aequales. Ducatur enim per punctum
 E ipsi A B rectae lineae parallela CE . Et quo-
niam AB ipsi CE parallela est, et in ipsas inci-
dit AC , alterni anguli BAC ACE inter se
equales sunt. Rursus quoniam AB parallela est CE , et in ipsas incidit recta linea BD ,
exterior angulus ECD interiori et opposito ABC est aequalis. Ostensus autem est
angulus ACE aequalis angulo BAC . Quare totus ACD exterior angulus aequalis
est duobus interioribus et oppositis BAC ABC , communis apponatur ACB , an-
guli igitur ACD ACB tribus ABC BCA CAB aequales sunt. Sed anguli
 ACD ACB sunt aequales duobus rectis. Ergo et ACB BCA CAB duobus rectis
aequales erunt. Omnis igitur trianguli uno latere producto exterior angulus duo-
bus interioribus & oppositis est aequalis; et trianguli tres interiores anguli duobus
rectis aequales sunt. quod demonstrare oportebat.

Ex antece-
dente.

25. huius.

- * Ille magis manifestum est, quod si triangulum exteriori angulo utroque interiore
et opposito maiorem esse, sed & quanto maiorem. nam cum utriusque sit aequalis, maior quam
alteruter reliquo est. nec trianguli duos quoslibet angulos duobus rectis minores esse solum ex hoc
cognoscimus, sed quanto etiam minores reliquo. enim trium illa igitur quodam modo magis indefi-
nita fuerunt theoremata, hoc vero scientiae terminum utriusque attulit. eius theorematis, triangu-
lum scilicet interiores angulos duobus rectis aequales habere, inactionem ad Pythagoricos refert.
Eundem, quod ipsi aliter demonstrarunt, ut Proclus tradit. qui etiam huius theorematis duo-
ostendit conversam, ex quibus apparere potest, quomodo omni duo converantur. Cum igitur ex hoc
constet, trianguli tres interiores angulos duobus rectis esse aequales, aperta est nobis via, per qua
ceterarum quoque figurarum rectilinearum angulos invenimus, quos rectis aequales sine ut pu-

ra quadrilaterae, quinquelaterae, & aliarum, quae sequuntur. Itaque primo sciendum est omnem rectilineam figuram in triangula resolui; omnium si quidem constitutionis principium est triangulum. vnaqueque autem in triangula binario pauciora, quam sint propria latera, resoluta, ut si

Omnis recti
linea figura
in triangula
binario pau-
ciora quam
sit propria la-
tera resolu-
tur.

quattuor latera habeat, in duo resolutur triangula; si quinque in tria, si sex in quattuor, & simi-
liter reliquae. Quod cum omnis trianguli tres interiores anguli duobus rectis sint aequales, nu-
merus triangulorum, ex quibus vnaqueque figura constat, duplicatus multitudinem prebebit re-
storum, quibus ea aequales angulos habet. Quapropter omnis quadrilatera figura ex duobus trian-
gulis constans angulos habet quattuor rectis aequales. & omnis quinquelatera habet angulos
aequales sex rectis, & deinceps eodem modo, sed & illud sciendum est, omnem rectilineam
figuram vnoquoque ex eius lateribus semel producto, angulos qui extra constitu-
tur, quattuor rectis aequales habere] quod nos hoc modo demonstrabimus.

Sit triangulum ABC , et producantur latera
 AB BC CA ad puncta DEF . Dico angulos
 CBD BAE ACE , qui extra constituuntur,
quattuor rectis aequales esse.

Sumatur enim intra triangulum, quod vis punctum
 G , & iungatur GA GB GC . erunt triangulorum A
 GB BGC CGA omnes anguli sex rectis aequales;
sed & anguli CBA CBD BAC BAE ACE
 ACE sunt aequales sex rectis. Ergo istorum triangu-
lorum anguli angulis CBA CBD BAC BAE A
 CB ACE aequales sunt. communes auferantur CBA
 BAC ACB . reliqui igitur, qui sunt ad G sunt aequales angulis extra figuram constituuntur. an-
guli autem ad G quattuor rectis sunt aequales. ergo & anguli, qui extra figuram constituuntur, ni-
delicet CBD BAE ACE quattuor rectis aequales erunt. quod demonstrare oportebat. eode
modo demonstrabimus in reliquis figuris, angulos qui extra ipsas constituuntur, quattuor rectis es-
se aequales.

Omnis recti
linea figura
angulos qui
extra consti-
tuitur quat-
tuor rectis
aequales ha-
bere.

Corol. 15.

THEOREMA. XXIII. PROPOSITIO. XXXIII.

Quae aequales, et parallelas ad easdem partes coniungunt rectae
lineae, et ipsae aequales, et parallelae sunt.

Sint aequales et parallelae AB CD : et ipsas con-
iungant ad easdem partes rectae lineae AC BD . Dico AC
 BD aequales, et parallelas esse. iungatur enim BC .
et quoniam AB parallela est CD : in ipsasq; incidit
 BC , alterni anguli ABC BCD aequales sunt. Rur-
sus quoniam AB est aequalis CD , communis autem
 BC , duae AB BC duabus BC CD sunt aequales;
et angulus ABC aequalis angulo BCD . basis igitur
 AC basi BD est aequalis: triangulumq; ABC trian-

gulo

17. huius.

gulo B C D : et reliqui anguli reliquis angulis æquales erūt, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. ergo angulus A C B angulo C B D est æqualis. Et quoniam in duas rectas lineas A C B D recta linea B C incidens, alternos angulos A C B C B D æquales inter se efficit, parallela est A C ipsi B D. ostensa autem est et ipsi æqualis. Quæ igitur æquales et parallelas ad easdem partes coniungunt rectæ lineæ, et ipsæ æquales et parallelae sunt. quod oportebat demonstrare.

F. C. C O M M E N T A R I V S.

Parallelogrammum quomodo fiat.

Hoc theorema veluti confinium parallelarum, parallelogrammorumq, considerationis esse dicebamus. æqualium namque & parallelarum rectarum linearum symptoma quoddam dicere videtur, parallelogrammorumq, ortum latenter tradit. parallelogrammum enim fit ex æqualibus, & parallelis, quæ initio ductæ sunt, & ex ijs, quæ ipsas coniungunt rectis lineis: quæ etiam æquales & parallelae ostenduntur. Quæ propter quod statim sequitur, veluti constituto iam parallelogrammo, quæ per se insunt eiusmodi spacijs, contemplatur. Quanta autem diligentia in hac propositione adhibita sit, accurate & diligenter notauit Proclus.

T H E O R E M A XXIII. P R O P O . XXXIII.

Parallelogrammorum spaciolorum latera, quæ ex opposito, et anguli, inter se æqualia sunt; et diameter ea bifariam secat.

Sit parallelogrammum A C D B, cuius diameter B C. Dico A C D B parallelogrammi latera, quæ ex opposito, et angulos inter se æqualia esse; et diametrum B C ipsum bifariam secare. Quoniam enim parallela est A B ipsi C D, et in ipsas incidit recta linea B C; anguli alterni A B C B C D inter se æquales sunt. Rursus quoniam A C ipsi B D parallela est, et in ipsas incidit B C; alterni anguli A C B C B D æquales sunt inter se. duo igitur triangula sunt A B C C B D, quæ duos angulos A B C B C A duobus angulis B C D C B D æquales habent, alterum alteri: et vnum latus vni lateri æquale, quod est ad æquales angulos, utrique commune B C. ergo et reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, alterum alteri, et reliquum angulum reliquo angulo æqualem. æquale igitur est latus quidem A B lateri C D: latus vero A C ipsi B D; et angulus B A C angulo B D C æqualis. Et quoniam angulus A B C est æqualis angulo B C D; et angulus C B D angulo A C B; erit totus angulus A B D æqualis toti A C D. ostensus autem est, et angulus B A C angulo B D C æqualis, parallelogrammorum igitur spaciolorum latera, quæ ex opposito, et anguli, inter se æqualia sunt. Dico etiam diametrum ea bifariam secare. Quoniam enim æqualis est A B ipsi C D, communis autem B C, duæ A B B C duabus D C C B æquales sunt, altera alteri, et angulus A B C æqualis est angulo B C D. basis igitur A C basi D B æqualis. quare et triangulum A B C triangulo B C D æquale erit. ergo diameter B C parallelogrammum A C D B bifariam secat. quod oportebat demonstrare.

F. C. C O M M E N T A R I V S.

Theorema - tum alia uni uersalia, alia non uni uersalia.

Vniuersale duobus modis appellari consuevit.

Theorematum, ut inquit Proclus, alia vniuersalia sunt, alia non vniuersalia. quomodo autem verumque horum dicamus, commemorabimus, cum questionem pariter, quod vnam partem habet vniuersalem, alteram vero non vniuersalem. quamuis enim omne theorema vniuersale quidem esse fortasse videretur, & omne, quod ab Euclide ostenditur huiusmodi esse (quemadmodum in presentia quoque non solum latera, quæ ex opposito sunt, & angulos æquales habere vniuersæ de omnibus parallelogrammis dici videtur, verum etiam diametrum vnumquodque bifariam secare) attamen alia quidem vniuersæ ostendi dicimus, alia vero non vniuersæ. aliter enim vniuersale appellari consuevit, quod de omnibus verum dicitur, de quibus predicatur, aliter autem quod omnia comprehendit,

comprehendit, quibus idem symptoma inest. vniuersale siquidem est, & quod omne æquicruræ tres angulos duobus reſtis æquales habet, quoniam de omnibus æquicruris verum est; vniuersale autem, & quod omne triangulum habet tres angulos duobus reſtis æquales, quoniam omnia comprehendit, quibus hoc per se inest. Quocirca primum quoque hoc de triangulo ostendi dicimus, tres angulos duobus reſtis æquales habere. Itaque iuxta hanc significationem alia quidem vniuersalia theorematum dicentes, alia vero non vniuersalia, præſens theorema dicimus vnum quidem quæſitorum vniuersale habere: alterum vero non vniuersale. nam hoc quidem latera, quæ ex opposito sunt, & angulos æquales habere vniuersale est. solis enim parallelogrammis inest. hoc vero, diametrum bisariam ſpaciū ſecare, non vniuersale, quoniam non omnia comprehendit, in quibus symptoma hoc inſpicitur. etenim circulus, & ellipſibus hoc etiam inest. & videntur primæ quidem rerum huiusmodi notiones eſſe magis particulares, progreſſæ autem totum comprehendere. Cum enim antiqui contemplati fuiſſent, diametrum bisariam ſecare circulum, ellipſim, & parallelogrammum, commune in his poſtea contemplati fuere. Hallucinantur autem, inquit Ariſtoteles, quidā nō vniuersale tamquā vniuersale ostendens, eō quod commune eſt innominatū, cui primum symptoma inest. nam quid commune ſit numeris, & magnitudinibus, & motibus, & ſonis, quibus omnibus inest permutata proportio, dicere non licet. quid præterea cōmune ſit circulo, ellipſi, & parallelogrammo, difficile eſt exprimere, nā vna quidem figura reſtilinea eſt, altera circularis, altera vero mixta. Quapropter vniuersale eū oſtendere opinamur, qui demonſtrat, omne parallelogrammū à diametro bisariā ſecari, eo quod commune ſimul nō cernimus, propter quod hoc verum eſt. Hoc igitur in parallelogrammis etiam huiusmodi vniuersale non eſt propter iam dictam cauſſam. illud vero eſt, omne parallelogrammum latera, quæ ex opposito ſunt & angulos habere æqualia. Etenim ſi aliqua figura poſita fuerit, quæ ex opposito ſunt latera, & angulos æqualia habere, parallelogrammum hæc eſſe oſtenditur. hæc Proclus. Huius autem theorematis conuerſum, quatenus ad primam partem attinet, tale eſt.

Omne quadrilaterum, quod latera ex opposito, et angulos æqualia habet, parallelogrammum eſt.

Sit quadrilaterum $ABCD$, habens latera quidem AB æqualia lateri DC ; latera vero AD lateri BC ; angulumque ABC angulo ADC æqualem; & angulum BAD angulo BCD . Dico quadrilaterum $ABCD$ parallelogrammum eſſe. Ducatur diameter ED . Et quoniam AB eſt æqualis DC , & AD ipſi BC , quæ D à AB duabus BC CD æquales ſunt, anguloſque æquales cōtinet, & baſis BD vtrique cōis. triangulū igitur ABD triangu-
lo CDB æquale erit, et reliqui anguli reliquis angulis æquales, videlicet angulus AED angulo CDB , & angulus ADB angulo CED , qui ſunt alterni. ergo AB parallela eſt in ipſi DC & AD ipſi BC , ideōſque $ABCD$ parallelogrammum eſt. quod demonſtrare oportebat.

Conuerſum vero vt ad ſecundam partem huiusmodi erit ſomne quadrilaterum, quod ab vtriſque diametris bisariam ſecatur, parallelogrammum eſt. quod nos Paulo poſt demonſtrabimus.

THEOREMA XXV. PROPOSITIO. XXXV.

Parallelogramma in eadem baſi, et in eiſdem paralellis conſtituta, inter ſe æqualia ſunt.

Sint parallelogramma $ABCD$ $EBCF$ in eadem baſi BC , et in eiſdem paralellis AF BE conſtituta. Dico $ABCD$ $EBCF$ parallelogrammū parallelogrammo $EBCF$ æquale eſſe. Quoniam enim parallelogrammum eſt $ABCD$, æqualis eſt AD ipſi BC . Eadem quoque ratione, et E F eſt æqualis BC . Quare et AD ipſi EF æqualis erit: et communis DE . tota igitur A et toti D F eſt æqualis. eſt autem et AB æqualis DC . ergo duæ EA AB duabus FD DC æquales ſunt, altera alteri, et angulus FDC æqualis angulo EAB , exterior interiori. baſis igitur EB baſi FC eſt æqualis, et EAB

Tres angulos duobus reſtis æquales habere primum de triangulo oſtenditur.

Diametrum bisariam ſecare ſpaciū, inest non ſolum parallelogrammo ſed circuliſ, et ellipſibus.

27. huius.

4. huius.

triangulum $\triangle$ FDC, commune auferatur DGE, reliquum igitur trapezium ABGD reliquo trapezio E GCF est $\triangle$ quale. commune apponatur GBC triangulum, ergo totum parallelogrammum ABCD toti parallelogrammo EBCF $\triangle$ quale erit, parallelogramma igitur in eadem basi; et in eisdem parallelis constituta inter se $\triangle$ qualia sunt, quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Theoremata
localia.
Locus linear,
uel superfi-
ciei situs, qui
idē sympto-
ma efficit..

Linearum
aliæ planæ
aliæ solidæ.

Localium
theorematum
alia planum
habent locum,
alia solidum.
localia theo-
remata, quae
solida appel-
lantur.

Hyperbole
folida linea.
Localia pla-
na in rectis
lineis.

Localia plana in circumferentijs.

Theoremata
quæ in mate-
maticis ad-
mirabilia di-
cuntur. . . .

Angulorum
æqualitas, et
inæqualitas
maximam
uim habent
ad augenda
minuendaq;
spacia.

Theorema -
tis casus,
huius.

Quemadmodum theorematum, ut inquit Proclus, alia quidem vniuersalia, alia vero particu-
ria esse dicebamus, & quemadmodum hec diuidentur subingebamus, alia esse simplicia, alia com-
posita, & quid vnumquodque horum esset ostendebamus, ita sanè iuxta alià distinctionem, alia qui-
dem localia esse dicimus, alia vero non localia. Voco autem localia, quibuscumque idem symptoma
in toto quodam loco accidit, locum vero lineae, vel superficiei situm, qui vnum, idemq; symptoma
efficiat. localium enim alia in lineis confluitur, alia in superficiebz. Et quoniam linearum aliae
sunt planae, aliae solidae. & planae quidem, quarum simplex est in plano intelligentia, ut ipsius
rectae solidae vero quarum ortus ex quadam solidae figurae sectione apparet. ut Cylindricae heli-
cis, canonicarumque linearum, dicerem utique eorum etiam, quae in lineis confluntur, localium
theorematum, alia quidem planum habere locum, alia vero solidum. Praesens igitur theorema &
locale est, & in lineis locale, & planum. totum enim spacium, quod inter parallelas interit, lo-
cus est parallelogrammorum, quae in eadem basi confluntur. quae sanè aequalia quoque inter se
Euclides ostendit. eorum vero localium theorematum, quae solida uocantur, tale sit exemplum,
[parallelogramma, quae in asymptotis, et hyperbolae describuntur aequalia sunt.]
nam hyperbolae solidam esse lineam, manifestum est, quòd sit una ex conì sectionibus. Cum autem
in praesentia de rectilineis sermo sit, localia plana in rectis lineis tradit, in tertio autem libro, cū
de circulis, eorumq; symptomatibus pertractet, ea etiam, quae in circumferentijs confluntur lo-
calium simil, & planiorum theorematum docet, tale siquidem in illis est, quòd ait [Qui in ead-
em portione sunt anguli inter se sunt aequales] nec non illud. [Anguli qui in semicir-
culo recti sunt] nam si infiniti quòd anguli in circumferentia constituti fuerint, eadè existere basi,
omnes aequales esse ostenduntur. & illa quidem proportione respondent triangulis, & parallelo-
grammz, quae in eadem basi, & in eisdem sunt parallelis. Species igitur theorematum, quae mox
sequuntur talis est, quae apud antiquos mathematicos localis nuncupatur. Sunt praeterea haec theo-
remata ex eorum numero, quae admirabilia in mathematicis disciplinis appellantur. Super enim
vulgus statim si longitudo multiplicata spaciorum aequalitatem non destruit, eadem existere basi,
quantum enim parallelas producimus, tantum parallelogrammorum quoque longitudines augen-
tur. Sciendum autem esse angularum aequalitatem, & inequalitatem maximam um habere ad an-
genda minuendaq; spacia. quo enim magis angulos inequales effecimus, eò spacium magis diminui-
mus, si longitudo latitudoq; eadem sit. Hoc theorema plures habet casus, uel igitur latus BE se-
cat CD, uel non secatur. & si non secatur, uel E cadit inter AD uel in
D. Euclides autem difficiorem casum elegit, cum scilicet latus BE
ipsum CD secat. si uero E cadit inter AD ita argumentabimur. Quo-
niam enim AD est aequalis EF, quòd utraque ipsi BC sit aequalis,
communì ablata E D, erit reliqua AE aequalis reliquae DF. est au-
tem D C aequalis AB. Itaque duae FD D C duabus EA AB
aequales sunt, & angulos aequales continent. basi igitur FC basi
EB est aequalis. & FDC triangulum triangulo EAB, addatur cò-
mune trapezium EBC D. erit totum ABCD parallelogrammum
toti EBCF parallelogrammo aequale. Quòd si E cadat in D, simi-
liter demonstrabimus triangulum FDC aequale triangulo D
AB. quare addito utrique comuni DBC triangulo, totum
ABCD parallelogrammum toti parallelogrammo DBCF,
hoc est EB CF aequale erit.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO
XXXVI.

Parallelogramma in æqualibus basibus,

et in eisdem parallelis constituta inter se æqualia sunt.

Sint parallelogramma ABCD EFGH in æqualibus basibus B C F G, et in eisdem parallelis AH BG constituta. Dico parallelogrammum A B C D parallelogrammo E F G H æquale esse. coniungantur enim BE CH. Et quoniam æqualis est BC ipsi FG, & FG ipsi EH; erit et BC ipsi EH æqualis. suntque parallela, et ipsas coniungunt BE CH. quæ autem æquales, et parallelas ad easdem partes coniungunt, æquales, et parallelæ sunt. Ergo EB, CH et æquales sunt, et parallelæ: quare E B CH parallelogrammum est, et æquale parallelogrammo ABCD; basim enim eandem habet B C, et in eisdem parallelis B C, A D constituitur. simili ratione, et EFGH parallelogrammum eidem parallelogrammo EBCH est æquale. ergo parallelogrammum ABCD parallelogrammo EFGH æquale erit. Parallelogramma igitur in æqualibus basibus, et in eisdem parallelis constituta inter se sunt æqualia. quod oportebat demonstrare.

33. huius.

Ex antecedente.

F. C. COMMENTARIUS.

Precedens theorema easdem bases accipiebat, hoc vero æquales. commune autem utrisque est in eisdem esse parallelis. oportet igitur ipsa neque intra subiectas cadere parallelas, neque extra. parallelogramma enim in eisdem dicuntur esse parallelis, cum bases ipsorum, et quæ his ex opposito sunt, latera eisdem parallelis aptantur. Casus huius theorematum plures sunt. Nam vel bases omnino iunctæ sunt, vel se se contingunt, uel aliquam partem habent communem, utcumque se habeant latera, quæ basibus opponuntur. Et quamquam Proclus dicat Euclidem cum basim iunctam accepisset, theorema demonstrasse, attamen demonstratio, quam habemus omnibus casibus congruere mihi videtur, ut etiam ex hoc loco colligi possit demonstrationes Euclidis à Theone in meliorem formam redactas esse.

Parallelogramma in eisdem parallelis, quæ sunt. Theorema. Tis casus.

THEOREMA XXVII. PROPOSITIO XXXVII.

Triangula in eadem basi, & in eisdem parallelis constituta inter se æqualia sunt.

Sint triangula ABC DBC in eadem basi BC, et in eisdem parallelis AD BC constituta. Dico ABC triangulum triangulo DBC æquale esse. producat AD ex utraque parte in EF puncta: et per B quidem ipsi CA parallela ducatur BE, per C vero ipsi BD parallela CF, parallelogrammum igitur est utriusque ipsorum EBCA DBCF, et parallelogrammum EBCA est æquale parallelogrammo DBCF, etenim in eadem sunt basi BC, et eisdem parallelis BC EF, estque parallelogrammi quidem EBCA dimidium ABC triangulum, cum diameter AB ipsum bifariam fecerit: parallelogrammi vero DBCF dimidium triangulum DBC; diameter enim DC ipsum bifariam fecit. Quæ autem æqualium dimidia, inter se æqualia sunt. ergo triangulum ABC triangulo DBC est æquale. Triangula igitur in eadem basi, et in eisdem parallelis constituta inter se æqualia sunt. quod oportebat demonstrare.

31. huius.

35. huius.

34. huius.
7. com. no.

F. C.

Theorema-
ta de trian-
gulis localia,
& in lineis lo-
calia & plana

Sunt etiam hec theoremata de triangulis, quae in eadem basi, vel in aequalibus basibus, & in eisdem parallelis constituntur localia, & in lineis localia, & plana. dicuntur autem triangula in eisdem esse parallelis, quae cum bases habeant in una parallelarum, in reliqua vertex figunt.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO XXXVIII.

Triangula in basibus, æqualibus et in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia.

31. huius.

35. huius.

34. huius.

7. com. not.

Sint triangula ABCDEF in æqualibus basibus, B C E F, et in eisdem parallelis BF AD constituta. Dico ABC triangulum triangulo DEF æquale esse, producat enim AD ex utraq; parte in GH puncta: et per B quidem ipsi CA parallela ducatur BG: per F vero ducatur FH parallela ipsi DE. parallelogrammum igitur est utrumque ipsum GBCA DEFH. atque est parallelogrammum GBCA æquale parallelogrammo DEFH: in æqualibus enim sunt basibus BCEF, et in eisdem BF GH parallelis. parallelogrammi vero GBCA triangulum est ABC triangulum, nam diameter AB ipsum bifariam secat. et parallelogrammi DEFH dimidium est triangulum DEF, diameter enim DF ipsum secat bifariam. quæ autem equalium dimidia, inter se æqualia sunt. ergo ABC triangulum triangulo DEF est æquale. triangula igitur in æqualibus basibus, et in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia. quod demonstare oportebat.

F. C. COMMENTARIUS.

Casus in hoc theoremate tot sunt, quot in xxvi. videtur autem Euclides quod in his quatuor theorematibus ostendit, uno illo theoremate comprehendisse, in principio sexti libri. [triangula et parallelogramma, quæ eandem habent altitudinem inter se sunt, ut bases.] eadem enim altitudo nihil aliud est, nisi in eisdem esse parallelis. nam figuræ omnes quæ in eisdem sunt parallelis, eandem altitudinem habent, & contra, altitudo siquidem est perpendicularis, quæ ab altera parallelarum ad reliquâ pertinet. illic igitur per proportionem ostensum est, ita se se habere triangula, et parallelogramma, quæ eandem altitudinem habent, hoc est quæ in eisdem sunt parallelis, ut bases: & æqualibus existentibus basibus æqualia esse spacia, & dupla duplis, & aliam proportionem habentibus, eandem habere & spacia inter se proportionem: in presentia vero, quoniam non debet proportione utri, qui nondum de ipsa docuerat, contentus fuit æqualitate sola, atque identitate.

THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XXXIX.

Triangula æqualia in eadem basi, et ad easdem partes constituta, in eisdem quoque sunt parallelis.

Sint æqualia triangula ABC DBC in eadem basi BC constituta, et ad easdem partes. Dico et in eisdem parallelis esse. Iungatur enim A D. Dico AD parallelam esse ipsi BC. Si enim non est parallela, ducatur per A punctum ipsi BC parallela recta AE, et E C iungatur. æquale igitur est ABC triangulum triangulo EBC, in eadem enim est basi BC, et in eisdem BC, AE parallelis. Sed ABC triangulum triangulo DBC est æquale. ergo et triangulum

DBC

D B C æquale est ipsi E B C triangulo, maius minori, quod fieri non potest. non igitur A E ipsi B C parallela est. Similiter ostendemus neque aliam quampiam parallelam esse, præter ipsam A D. ergo A D ipsi B C est parallela. Triangula igitur æqualia in eadem basi, et ad easdem partes constituta in eisdem quoque sunt parallelis. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIUS.

Hoc theorema vigesimi septimi conuersum est, & quod sequitur est conuersum vigesimi octauum, ut inquit Proclus, cum triplex sit theorematum conuersio, aut enim totum toti conuertitur, ut duodecimum theorema undecimo; aut pars toti, ut tertium secundo; aut pars parti, ut quintum primo. non enim totum in altero datum, quesitum in altero est, nec quesitum datum, sed pars: talia videntur esse hæc quoque theoremata in triangulis. erat siquidem questio in precedentibus, triangula æqualia esse. hoc autem non solum in his datum est, quippe cum partem insuper sumpsit eius, quæ in illis erat, positionis: hoc enim, in eadem basi esse, & in æqualibus basi- bus tum in his, tum in illis datum est, præterquam quod in hisce positionibus quoddam adiecit, quod quidem nec quesitum, nec datum in illis erat. particula enim illa, ad easdem partes, extrinsecus insuper fuit assumpta. conuersa vero vigesimi quinti, & vigesimi sexti in parallelogrammis consulo omisit, quod eadem sit in utrisque demonstratio.

Theorematum conuersio triplex.

Et ad easdem partes. ¶ Quæ his respondent, videlicet καὶ τὰ αὐτὰ μέρη in aliquibus grecis exemplaribus, tum in hoc theoremate, tum in sequenti non leguntur, sed necessario addita sunt. fieri enim potest ut in eadem basi æqualia triangula sumantur, vnum quidē ad partes superiores, aliud vero ad inferiores, quæ tamen non sunt in eisdem parallelis, & quandoque non eadem altitudine.

Maius minori quod fieri non potest. ¶ Idē absurdū sequetur, si recta linea A E sumatur extra ipsam A D, ut notat Proclus. Ex his, quæ hoc loco demonstrata sunt, patebit conuersū, se cūq; partis vigesimi quarti theoremat, quod erat huiusmodi.

Omne quadrilaterum, quod ab utrisque diametris bifariam secatur, parallelogrammum est.

Sit quadrilaterum A B C D, cuius diametri A C E D ipsam bifariam secant. Dico A B C D parallelogrammum esse. Quoniam enim triangula A B C D B C eiusdem sunt dimidia, inter se æqualia sunt: & eandem habent basim B C. quare in eisdem sunt parallelis. parallela igitur est A D ipsi B C. similiter cum triangulum A B C æquale sit triangulo A B D, & sint in eadem basi A B, demonstrabitur rectam lineam D C ipsi A B parallelam esse. Ergo A B C D parallelogrammum erit. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XXX. PROPOSITIO XL.

Triangula æqualia in basibus æqualibus, et ad easdem partes constituta, in eisdem quoque sunt parallelis.

Sint æqualia triangula A B C C D E in æqualibus basibus B C C E constituta. Dico etiam in eisdem esse parallelis. coniungatur enim A D. Dico A D ipsi B E parallelam esse. Nam si non est, ducatur per A ipsi B E parallela A F, et F E iungatur. triangulum igitur A B C triangulo F C E est æquale, cum in æqualibus basibus, et in eisdem parallelis B E A F constituantur. Sed triangulū A B C æquale est triangulo D C E.

38. huius.

ergo

ergo et triangulum D C E triangulo F C E æquale erit, maius minori, quod fieri nõ potest. non igitur A F ipsi B E est parallela. similiter demonstrabimus neque aliam quampiam parallelam esse, præter A D. ergo A D ipsi B E parallela erit. Aequalia igitur triângula in basibus æqualibus, et ad easdem partes constituta, etiam in eisdem sunt parallelis. quod demonstrare oportebat.

F. C. C O M M E N T A R I U S .

Cum tria sint in iam dictis propositionibus, videlicet in æqualibus, vel eisdem basibus esse, in eisdem parallelis, & aequalia esse triângula, & parallelogramma; nos duo semper contextentes, unum vero relinquentes varie convertemus. aut enim bases easdem, vel æquales ponemus, in eisdemq; parallelis triângula, & parallelogramma, & quatuor faciemus theorematum: aut aequalia ipsa suscipiemus, & bases easdem, vel æquales, & faciemus alia quatuor; quorum duo quidem omisit Euclides, nimirum ea, quæ sunt in parallelogrammis; reliqua vero duo ostendit, videlicet ea, quæ in triángulis sunt: aut etiam cum aequalia sumpsimus, & in eisdem parallelis, reliqua ostendimus, vel in eisdem basibus esse, vel in æqualibus, & faciemus alia quatuor, quæ etiam Euclides omisit. in his namque eadem est demonstratio, nisi quod duo ex his quatuor per se vera non sunt. non enim aequalia parallelogramma, vel triângula, & quæ in eisdem sunt parallelis, necessario in eadem basi sunt. Sed totum hoc in hisce positionibus verum est, vel in eisdem esse basibus; vel in æqualibus; alteram autem, non omnino sumptas positiones consequitur. Quapropter cum decem sint omnia theorematum, sex quidem geometra conscripsit, quatuor vero omisit, ne rursus eadem ratione frustra laboraret, cum eadem sit demonstratio. ostendetur enim in triángulis hoc modo.

Triângula aequalia, et in eisdem parallelis constituta, vel in eisdem, vel in æqualibus basibus erunt.

Sint aequalia triângula A B C D E F in eisdem parallelis A D B F constituta. Dico in æqualibus quoque basibus esse. Non enim, sed si fieri potest, sint bases B C E F inæquales, & sit B C maior, absceidaturq; B H æqualis ipsi E F; & A H iungatur. Itaque quoniam triângula A B H D E F in æqualibus sunt basibus B H E F, & in eisdem parallelis, inter se aequalia sunt. Sed & ipsa A B C D E F triângula posita sunt aequalia. ergo triângulum A B C triângulo A B H est æquale; sed & maius, quod fieri non potest. Non igitur inæquales sunt triángulorum A D C D E F bases. Idem demonstrabitur, & in parallelogrammis. Quare cum modus demonstrandi idem sit, & id, quod fieri non potest, idem, totum, scilicet suæ parti æquale esse: non in merito ab Euclide præmissum fuit. hæc ex Proclo.

T H E O R E M A XXXI. P R O P O S I T I O X L I .

Si parallelogrammum, et triângulum eandem basim habeant, in eisdemq; sint parallelis; parallelogrammum ipsius triánguli duplum erit.

Parallelogrammum enim A B C D, et triângulum E B C, basim habeant eandem B C, et in eisdem sint parallelis B C A E. Dico parallelogrammum A B C D triánguli E B C duplum esse. Iungatur enim A C. triângulum igitur A B D triángulo E B C est æquale; namque in eadem basi B C, et in eisdem B C A E parallelis constituitur. Sed A B C D parallelogrammum duplum est triánguli A B C, cum diameter A C ipsum bifariam secet. Quare et ipsius E B C triánguli duplum erit. Si igitur parallelogrammum, et triângulum

gulum eandem basim habeant, et in eisdem sint parallelis; duplum erit parallelogrammum ipsius trianguli. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIIS.

Huius theorematis duo sunt casus, vel enim triangulum verticem habet intra parallelogrammum, vel extra. Sed in utrisque demonstratio eadem est. Quod si bases aequales sint, eodem modo offendemus, parallelogrammi diametrum ducentes. nam cum triangula in basibus aequalibus constituta inter se aequalia sint, parallelogrammum, quod alterius est duplum, reliqui quoque duplum erit. Sed duo eius conuersa similiter demonstrabuntur, quorum unum est.

Si trianguli parallelogrammum duplum fuerit, eandemque basim, aut æquales habuerint, et fuerint ad easdem partes: in eisdem etiam parallelis erunt.

Si enim non ita sit, totum parti erit æquale, eandemque ratio vigebit. necesse enim est, aut intra parallelas trianguli verticem cadere, aut extra: utro autem modo se se habuerit, idem sequetur absurdum, parallela ipsi basi per trianguli verticem ducta, alterum vero est.

Si trianguli parallelogrammum duplum fuerit, in eisdemque ambo fuerint parallelis; aut in una eademque basi, aut in æqualibus erunt.

Si enim in basibus inæqualibus sint, cum aequales sumperimus, totum parti æquale erit. In hoc igitur commune absurdum omnia hæc theoremata desinunt. Quare elementorum institutor nobis reliquit eam, quæ in his est, veritatem inuestigare, cum in simplicioribus ipse, & principioribus contemplationem contraxerit, ex Proclo.

PROBLEMA XI. PROPOSITIO XLII.

Dato triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

Sit datum triangulum ABC , datus autem rectilineus angulus D . Itaque oportet, dato triangulo ABC æquale parallelogrammum constituere in angulo rectilineo ipsi D æquali. secetur BC bifariam in E , et iuncta AE ad rectam lineam EC , atque ad punctum in EA , constitutur angulus CEF æqualis ipsi D : et per A quidē ipsi EC parallela ducatur AG ; per C vero ipsi FE ducatur parallela CG . parallelogrammum igitur est $FE CG$. Et quoniam BE est æqualis EC , erit et ABE triangulum triangulo AEC æquale; in æqualibus enim sunt basibus BE EC , et in eisdem BC AG parallelis. Ergo triangulum ABE triangulo AEC est duplum. est autem et parallelogrammum $FE CG$ duplum trianguli AEC ; basim enim eandem habet, et in eisdem est parallelis. æquale igitur est $FE CG$ parallelogrammum triangulo ABC , habetque CEF angulum æqualem angulo D dato. Dato igitur triangulo ABC æquale parallelogrammum $FE CG$ constitutum est, in angulo CEF , qui angulo D est æqualis. quod quidem facere oportebat.

23. huius.

37. huius.

38. huius.

34. huius.

THEOREMA XXXII. PROPOSITIO XLIII.

Omnis parallelogrammi spatij eorum, quæ circa diametrum sunt, parallelogrammorum supplementa inter se sunt æqualia.

Sit parallelogrammum $ABCD$, cuius diametrum AC : et circa ipsam AC parallelogramma quidem sint EH FG , quæ vero supplementa dicuntur BK KD . Dico BK supplementum supplemento KD æquale esse. Quoniam enim parallelogrammum est $ABCD$, et eius diametrum AC , æquale est ABC triangulum triangulo ADC .

34. huius.

G ADC .

A D C. Rursus quoniam $E K H A$ parallelogrammum est, cuius diameter $A K$, triangulum $A E K$ triangulo $A H K$ æquale erit. Eadem ratione, et triangulum $K G C$ triangulo $K F C$ est æquale. Cum igitur triangulum quidem $A E K$ æquale sit triangulo $A H K$; triangulum vero $K G C$ ipsi $K F C$; erit triangulum $A E K$ vñ cum triangulo $K G C$ æquale triangulo $A H K$ vñ cum $H F C$ triangulo. est autem et totum triagulum $A B E$ æquale toti $A D E$. reliquum igitur $B G$ supplementum reliquo supplemento $K D$ est æquale. Ergo omnis parallelogrammi spaci eorum, quæ circa diametrum sunt, parallelogrammorum supplementa inter se æqualia sunt, quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIUS.

Huius theorematris tres sunt casus: vel enim parallelogramma, quæ circa eandem consistunt diametrum, se se in puncto contingunt, vel se se secant, vel quadam diametri parte à se disjunguntur. In omnibus autem eadem congruit demonstratio, quamquam non semper quadrilatera sint supplementa. Euclides sumpsit ea parallelogramma, quæ proprie circa diametrum consistere dicuntur, videlicet quæ se se in puncto contingunt, in quo casu supplementa $B K K D$ quadrilatera sunt, vt apparet in prima figura. Sit rursus parallelogrammum $A B C D$, cuius diameter $B D$, & circa $B D$ parallelogramma sint $E F G D$ $H B L K$, quæ se se in punctis $M N$ secant. Dico quadrilatera $A H M E$ $N L C G$ inter se æqualia esse. Quoniam enim triangulum quidem $A B D$ est æquale triangulo $D B C$; triangulum vero $E F D$ triangulo $D F G$; erit reliquum quadrilaterum $A B F E$ æquale reliquo quadrilatero $C B F G$. Rursus quoniam triangulum $H B K$ est æquale triangulo $K B L$, triangulumq; $M F K$ triangulo $K F N$; erit reliquum quadrilaterum $H B F M$ æquale reliquo $L B F N$. erat autem & totum $A B F E$ æquale toti $C B F G$. reliquum igitur $A H M E$ quadrilaterum reliquo quadrilatero $N L C G$ æquale sit necesse est; & hæc quidem quadrilatera sunt, quæ supplementa dicuntur.

34. huius.

Sit denique parallelogrammum $A B C D$, & eius diameter $B D$, circa quam parallelogramma $E L F D$ $G B H K$, quæ à se inuicem disjunguntur parte ipsius diametri $K L$. Et quoniam triangulum $A B D$ est æquale triangulo $D B C$, & trianguia $E L D$ $G B K$ æqualia sunt triangulis $D L F$ $K B H$; erit reliquum quinquelaterum $A G K L E$ æquale reliquo $H K L F C$. atque hæc quidem parallelogrammorum supplementa sunt. At nomen supplementorum à re ipsa sumptū est, quatenus hæc quoque præter duo parallelogramma, quæ sunt circa diametrum, totum parallelogrammum complent. Illa autem parallelogramma circa eandem diametrum sunt, quæcunque partem totius diametri pro sua etiam diametro habent. Sed cum totius parallelogrammi diameter aliquod ex lateribus interni parallelogrammi secat, tunc parallelogrammum hoc toti parallelogrammo circa eandem diametrum non est, vt in parallelogrammo $A B C D$ diameter $B D$ secat $E F$ latus ipsius $E F G D$ parallelogrammi, quare $E F G D$ parallelogrammum non est circa eandem diametrum.

Supplementorum nomen a re ipsa sumptum.

PROBLEMA. XII. PROPOSITIO. XLIII.

Ad datam rectam lineam dato triangulo æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.

Sit data quidem recta linea A B; datum vero triangulum C, et datus angulus rectilineus D. oportet igitur ad datam rectam lineam A B, dato triangulo C æquale parallelogrammum applicare in angulo ipsi D æquali. constituatur triangulo C æquale parallelogrammum B E F G, in angulo E B G, qui est æqualis D. et ponatur B E in directum ipsi A B, producatursq; F G ad H: et per A alterutri ipsarum B G E F parallela ducatur A H, et H B iungatur. Quoniam igitur in parallelas A H E F recta linea H F incidit, anguli A H F H F E duobus rectis æquales sunt, quare B H G G F E duobus re-

ctis sunt minores. Quæ vero à minoribus, quam sint duo recti, in infinitum producantur, cõueniunt inter se. Ergo H B F E producta conuenient, producantur, et cõueniant in K: perq;

K alterutri ipsarum E A F H parallela ducatur K L, et A H G B ad I M, puncta producantur. parallelogrammum igitur est H L K F, cuius diameter H K, et circa H K parallelogramma quidem sunt A G M E; ea vero, quæ supplementa dicuntur L B B F: ergo L B ipsi B F est æquale. Sed et B F æquale est triangulo C, quare et L B triangulo C æquale erit. Et quoniam G B E angulus æqualis est angulo A B M, sed et æqualis angulo D: erit et angulus A B M angulo D æqualis. Ad datam igitur rectam lineam A B, dato triangulo C æquale parallelogrammum constitutum est L B, in angulo A B M, qui est æqualis angulo D, quod facere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Antiqua hæc sunt, ut ait Eudemus, & pythagoreorum inuenta, applicatio spaciõrum, excessus, & defectus: cum enim proposita recta linea, datum spacium toti rectæ lineæ coaptaueris, tunc spacium illud applicari dicunt; cum vero spacij longitudinem ipsa recta linea maiorem feceris, tunc excedere; cum autem minorem, ita ut spacio descripto aliqua rectæ lineæ pars extra sit, tunc deficere. & hoc modo Euclides in sexto libro, tum excessus, tum defectus mentionem facit. in presentia vero applicatione indiguit ad datam rectam lineam dato triangulo æquale parallelogrammum applicare uolens, ut non solum parallelogrammi, dato triangulo æqualis constitutionem habeamus; sed etiam ad terminatam rectam lineam, applicationem, ex Proclo.

PROBLEMA XIII. PROPOSITIO XLV.

Rectilineo dato æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

Sit datum rectilineum A B C D: datus vero angulus rectilineus E. Itaque oportet rectilineo A B C D æquale parallelogrammum constituere in angulo ipsi E æquali coniungatur enim D B, et constituitur triangulo A D B æquale parallelogrammum F H; in angulo H K F, qui est æqualis angulo E. deinde ad rectam lineam G H applicetur triangulo D B C æquale parallelogrammum G M, in angulo G H M, qui angulus E est æqualis. Et quoniam angulus E æqualis est utrique ipsorum H K F G H M; erit et H K F angulo G H M æqualis. communis apponatur K H G. anguli igitur F K H

G 2 K H G

29. huius.

KHG angulis KHG GHM æquales sunt. Sed FKH KHG sunt æquales duobus rectis. ergo et KHG GHM duobus rectis æquales erunt. Itaque ad aliquam rectam lineam GH, et ad datum in ea punctum H duæ rectæ lineæ KH HM non ad easdem partes positæ angulos deinceps duobus rectis æquales efficiunt. in directum igitur est KH ipsi HM. Et quoniam in parallelas KM FG recta linea HG incidit, alterni anguli MHG HGF æquales sunt. communis apponatur HGL. anguli igitur MHG HGL angulis HGF HGL sunt æquales. at anguli MHG HGL æquales sunt duobus rectis. quare et anguli HGF HGL duobus rectis æquales erunt. In directum igitur est FG ipsi GL. Et quoniam KF ipsi HG et equalis est, et parallela; sed et HG ipsi ML; erit KF ipsi ML et æqualis, et parallela: ipsasq; coniungunt rectæ lineæ KM FL. ergo et KM FL æquales et parallelae sunt. parallelogrammum igitur est KFLM. Quod cum triangulum quidem ABD æquale sit parallelogrammo HF: triangulum vero DBC parallelogrammo GM; erit totum ABCD rectilineum toti parallelogrammo KFLM æquale. Dato igitur rectilineo ABCD æquale parallelogrammum constitutum est KFLM in angulo FKM, qui est equalis angulo E dato. quod facere oportebat.

14. huius.

29. huius.

34. huius.

30. huius.

33. huius.

F. C. COMMENTARIUS.

Duobus problematibus, in quibus & constitutionem invenit; & applicationem æqualium dato triangulo parallelogrammorum, hoc vniuersalius est. siue enim triangulum, siue quadratum, siue omnino quadrilaterum, siue aliquod aliud multilaterum datum fuerit, per hoc problema æquale ipsi parallelogrammum constituemus. Omne enim rectilineum, ut prius diximus, per se in triacula resoluitur, & methodum inveniendæ triangulorum multitudinis tradidimus. resoluentes igitur datum rectilineum in triacula, & vni quidem ipsorum æquale parallelogrammum constituentes; reliquis vero ad datam rectam lineam æqualia applicantes parallelograma, nempe ad illam, ad quam prima applicatio facta est; habebimus ex his parallelogrammum æquale rectilineo, quod ex illis triangulis constat; et factum iam erit, quod proponebatur. Hec Proclus.

COROLLARIUM.

Ex iam dictis manifestum est, quomodo ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicari possit in dato angulo rectilineo.

PROBLEMA XIII. PROPOSITIO XLVI.

A data recta linea quadratum describere.

Sit data recta linea AB. oportet ab ipsa AB quadratū describere. Ducatur rectæ lineæ AB à puncto in ea dato A ad rectos angulos AC: & ipsi AB æqualis ponatur AD; perq; punctum D ducatur DE ipsi AB parallela: et per B ipsi AD parallela ducatur BE. parallelogrammum igitur est ADEB. et AB quidem est æqualis DE, A D vero ipsi BE. Sed et B A ipsi AD est æqualis. quattuor igitur BA, AD DE EB inter se æquales sunt, adeoq; æquilaterum est ADEB parallelogrammum. Dico etiam rectangulum esse. Quoniam enim in parallelas AB DE recta linea incidit AD, anguli BAD ADE duobus rectis sunt æquales. rectus autem est BAD. ergo et A D E rectus erit. parallelogrammorum vero spaciolum, quæ ex opposito sunt latera, et anguli inter se equalia sunt. rectus igitur est uterque oppositorum ABE BED angulorum: et ob id rectangulum est ADEB. ostensum autem est, et æquilaterum esse. quadratum igitur sit necesse est. atque est à recta linea AB descriptum. quod ipsum facere oportebat.

29. huius.

34. huius.

F. C.

Hoc problemate indigemus potissimum in sequentis theorematum constructionem. Videtur autem Euclides duorum in rectilineis optimorum ortus tradere voluisse: nimirum trianguli equilateri, & quadrati, quoniam ad constitutionem quoque mundanarum figurarum, & precipue earum quattuor, quarum & ortus est & resolutio, hisce rectangulis opus est. nam icosaedrum quidem, & octaedrum, & pyramis ex aequilateris triangulis constant; cubus vero ex quadratis. Proclus hoc loco duo theoremata demonstrat, quibus mathematici tanquam demonstratis passim utuntur, nempe hæc.

Quadrata ab æqualibus rectis lineis descripta, etiam inter se æqualia sunt.

Sint enim æquales rectæ lineæ AB CD , & ab ipsa quidem AB describatur $ABEG$ quadratum; ab ipsa vero CD quadratum $CDHF$. Dico hæc quadrata inter se æqualia esse. Quoniam enim rectæ linæ AB CD æquales sunt, erunt & ipsæ AG CH æquales, angulosq; æquales continent. ergo & basis GB est æqualis basi HD , & triangulum ABG æquale triangulo CDH , & ipsorum dupla sunt æqualia. quadratum igitur $ABEG$ quadrato $CDHF$ æquale erit. Sed & huius ipsius conversum.

Quadrata æqualia ab æqualibus rectis lineis descripta sunt.

Sint enim quadrata æqualia AF CG ; & ponatur ita, ut latus AB sit in directum ipsi BC . Cum igitur anguli recti sint, recta quoque linea FB rectæ BG in directum erit. iungantur FC CG GA AF rectæ linæ. Et quoniam AF quadratum est æquale quadrato CG , & AFB triangulum æquale erit triangulo CBG , commune apponatur BCF triangulum: totum igitur triangulum ACF toti CFG est æquale; ideoq; parallela est AG ipsi FC . Rursus quoniam angulus AFG est æqualis angulo CGB , cum uterque sit dimidia pars recti; erit AF ipsi CG parallela. æqualis igitur est recta linea AF rectæ linæ CG , parallelogrammi siquidem latera ex opposito iacentia sunt. Itaque quoniam duo sunt triacula ABF BCG , quæ alternos angulos æquales habent, quippe quod AF CG parallelae sint, & latus unum AF est æquale lateri CG ; erit & latus AB lateri BC , & latus BF lateri BG æquale. Ostemus igitur est latera etiam à quibus descripta sunt AF CG quadrata inter se æqualia esse, cum illa æqualia sint: possumus etiam aliter propositum demonstrare per deductionem ad id, quod fieri non potest in hunc modum.

Sint æqualia quadrata $ABCD$ $EFGH$. Dico rectas lineas AB EF à quibus ea describuntur inter se æquales esse. Si enim AB EF æquales non sint, altera earum est maior, sit maior AB , & abscindatur AK , quæ ipsi EF sit æqualis, & ex A K quadratum $AKLM$ describatur. Quoniam igitur AK est æqualis EF , erit & quadratum $AKLM$, ex ante demonstratis, æquale quadrato $EFGH$; sed et quadratum $ABCD$ æquale erit eidem $EFGH$ quadrato, ergo quadratum $ABCD$ quadrato $AKLM$ est æquale, totum parti, quod fieri non potest. non igitur æqualibus existentibus quadratis $ABCD$ $EFGH$ rectæ linæ AB EF , quibus ea describuntur, inæquales sunt. ergo inter se æquales sunt necesse est.

4. huius.

59. huius.

28. huius.
34. huius.

Non inutile autem erit ad parallelogrammorum etiam constitutionem problema, quod sequitur.

Ex duabus rectis lineis, quæ duabus datis æquales sint, et in dato angulo rectilineo parallelogrammum constituere.

23. huius.

Sint datæ quidem rectæ lineæ AB , datus autem angulus rectilineus C . oportet ex duabus rectis lineis, quæ ipsi AB æquales sint, & in angulo ipsi C æquali, parallelogrammum constituere. exponatur recta linea DE , quæ ipsi A sit æqualis. Itaque ad datam rectam lineam DE , & ad datum in ea punctum D , dato angulo rectilineo C æqualis angulus constituatur FDE : ita ut FD sit æqualis ipsi B rectæ lineæ datæ. postea per F ducatur FG parallela ipsi DE , & per E ducatur parallela ipsi DF , quæ cum FG in puncto G conveniat. parallelogrammum igitur est $FDEG$, ex rectis lineis DE DF constitutum, quæ datis rectis lineis AB sunt æquales, & angulum continent FDE dato angulo C æqualem. quod facere oportuit.

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XLVII.

In rectangulis triangulis, quod à latere rectum angulum subtendente describitur quadratum æquale est quadratis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur.

14. huius.

4. huius.
41. huius.

Sit triangulum rectangulum ABC , rectum habens BAC angulum. Dico quadratum descriptum à recta BC æquale esse quadratis, quæ ab ipsis BA AC describuntur. Describatur enim à B C quidem quadratum $BDEC$, ab ipsis vero BA AC quadrata $GBHC$, perq; A alterutri ipsarum BD CE parallela ducatur AL ; et AD FC iungatur. quoniam igitur uterque angulorum BAC BAG rectus est, ad aliquam rectam lineam BA , et ad datum in ea punctum A duæ rectæ lineæ AC AG non ad easdem partes posite, angulos qui deinceps sunt duobus rectis æquales efficiunt. in directum igitur est CA ipsi AG . eadem ratione, et AB ipsi AH est in directum. Et quoniam angulus DBC est æqualis angulo FBA , rectus enim uterque est, communis apponatur AB . C . totus igitur DBA angulus toti FBC est æqualis. Quod cum duæ AB BD duæ bus FBC æquales sint, altera alteri, et angulus DBA æqualis angulo FBC , erit et basis AD basi FC æqualis, et ABD triangulum triangulo FBC æquale. estq; trianguli quidem ABD duplum BL parallelogrammum; basim enim eandem habent BD , et in eisdem BD AL sunt parallelis: trianguli vero FBC duplum est $GBHC$ quadratum. rursus enim basim habent eandem FB , et in eisdem sunt parallelis FB GC . Quæ autem equalium dupla inter se æqualia sunt. ergo æquale est parallelogrammum BL ipsi $GBHC$ quadrato. Similiter iunctis AE BK , ostendetur etiam CL parallelogrammum æquale quadrato HCK . totum igitur $DBEC$ quadratum. duobus quadratis $GBHC$ est æquale. et describitur quidem $DBEC$ quadratum. à recta linea BC , quadrata vero $GBHC$ ab ipsis BA AC . quadratum igitur BE , à latere BC descriptum æquale est quadratis, quæ describuntur à lateribus BA AC . ergo in rectangulis triangulis, quadratum, quod describitur à latere rectum angulum

gulum subtendente æquale est quadratis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIUS.

Hoc theorema ad pythagoram referunt, dicuntq; eam cum illud inuenisset, bouem immolasse. Quod autem ab Euclide in sexto libro conscribitur multo vniuersalius est. ostendit enim in rectangulis triangulis figuram, quæ sit à latere rectum angulum subtendente æqualens esse figuris, quæ à lateribus rectum angulum continentibus, priori illi similes, & similiter positæ, describuntur.

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XLVIII.

Si quadratum, quod describitur ab vno laterum trianguli æquale sit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur; angulus reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus erit.

Trianguli enim ABC , quod ab vno latere BC describitur quadratum æquale sit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus BA AC describuntur. Dico angulum BAC rectum esse. Ducatur enim à puncto A ipsi AC ad rectos angulos AD ; ponaturq; AD ipsi BA æqualis, & DC iungatur. Quoniam igitur DA est æqualis AB , erit et quadratum, quod describitur ex DA , æquale quadrato, quod ex AB . cõmune apponatur quadratum, quod ex AC . ergo quadrata, quæ ex DA AC æqualia sunt quadratis, quæ ex BA AC describuntur. Sed quadratis quidem, quæ ex DA AC , æquale est, quod ex DC quadratum; rectus enim angulus est DAC ; quadratis vero, quæ ex BA AC æquale ponitur quadratum, quod ex BC . quadratum igitur, quod ex DC æquale est ei, quod ex BC quadrato. ergo et latus DC lateri CB est æquale. Et quoniam DA est æqualis AB , communis autem AC , duæ DA AC duabus BA AC æquales sunt; et basis DC est æqualis basi CB . angulus igitur DAC angulo BAC est æqualis. rectus autem est DAC . ergo et BAC rectus erit. Si igitur quadratum, quod describitur ab vno laterum trianguli, æquale sit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur, angulus reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus erit. quod oportebat demonstrare.

rr. huius.

8. huius.

F. C. COMMENTARIUS.

Conuertitur hoc theorema præcedenti, & totum toti conuertitur. si enim triangulum rectangulum fuerit, quod à latere rectum angulum subtendente describitur quadratum æquale est quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur. & si quod ab hoc eis, quæ à reliquis æquale fuerit, triangulum rectangulum erit, quippe quod eum. qui reliquis continetur angulum rectum habeat.

LIBRI PRIMIFINIS.

E V C L I D I S E L E M E N T O R V M LIBER SECVNDVS

CVM SCHOLIIS ANTIQVIS,
ET COMMENTARIIS

Federici Commandini Vrbinatis.

D I F F I N I T I O.

I.

MNE parallelogrammum rectangulum
contineri dicitur duabus rectis lineis,
quæ rectum angulum constituunt.

F. C. COMMENTARIVS.

Quid sit parallelogrammum rectangulum dictum est
superius. dicitur autem contineri duabus rectis lineis, quæ
sint circa rectum angulum, quoniam ex ductu alterius in
alteram prouenit eius rectanguli area, quod non contingit in
alijs parallelogrammis, quæ rectangula non sunt. Sit enim

parallelogrammum rectangulum $ABCD$: & sit, exempli gratia, latus
quidem AB pedum trium, latus vero BC quattuor erit totius rectan-
guli area pedum duodecim quadratorum. At in alijs parallelogrammis
area nota efficitur ex area rectangulorum, quæ eadem sunt altitudine,
& bases, vel easdem, vel æquales habent. Sit parallelogrammum
non rectangulum $EFGH$, cuius basis FG sit pedum quattuor, ducti
vero à puncto E ad FG perpendicularis EK sit duorum pedum. pro-
ducatur KG ad L , ita ut KL sit ipsi FG æqualis, & iungatur HL .
erit $EKLH$ parallelogrammum rectangulum. Quare parallelogram-
ma $EFGH$ $EKLH$ cum æquales habeant bases FG KL , sintq; ea-
dem altitudine, hoc est in eisdem parallelis, inter se æqualia sunt: sed
parallelogrammi $EKLH$ area est pedum octo. ergo & area paral-
lelogrammi $EFGH$ totidem pedum sit necesse est. Ve-
rum parallelogrammi rectanguli aream prouenire ex
ductu laterum, quæ circa rectum angulum sunt, in
presentia ponatur, quo ad ita esse manifesto apparebit.
Demonstratur autem hoc à Ioanne Regiomontano in
principio primi libri de triangulis, & à nobis in cõmen-
tarijs in librum Archimedis de dimensione circuli.

D I F F I N I T I O II.

Omnis parallelogrammi spacij vnum quodque eorum, quæ cir-
ca diametrum ipsius sunt, parallelogrammorum, cum duobus sup-
plementis gnomon vocetur.

SCHOLIUM.

Sciendum est gnomonem breuitatis causa à geometris inuentum fuisse. nomen vero ex accidente impositum est; ab ipso enim forma cognoscitur, vel totius spaci, vel reliqui, cum vel circumponitur, vel auferitur. & in horoscopijs eius officium duntaxat est præsentis horas notas efficere. supplementa autem dicit, non ut quæ parallelogramma non sint, sed vt non similia toti, complementia vero totius ad ipsum similitudinem.

Gnomon a Geometris breuitatis causa inuentus.

Gnomonis officium in horoscopijs. Supplementa.

F. C. COMMENTARIUS.

Quæ parallelogramma dicantur proprie circa diametrum consistere, superius dictum est, ut quæ se inuicem in puncto contingunt. Sit parallelogrammum $ABCD$, cuius diameter AC , parallelogramma vero circa diametrum sint $A E K H$, $K G C F$: & supplementa $B K K D$. Itaque duo supplementa vna cuius alterutro parallelogrammorum, quæ sunt circa diametrum, gnomon appellatur. & si parallelogrammo quidem GF circumponatur gnomon, reddit totum parallelogrammum AC simile ipsi GF . Si vero à parallelogrammo AC auferatur gnomon BFH reliquum est parallelogrammum EH simile toti. Quamobrè ab Aristotele dictum est, quadratū circūpositum gnomone creuit quidem, alteratum vero nihil factum est. Illud autem, quod in scholio additur supplementa non esse similia toti, non omnino verum est. fieri enim potest ut quandoque etiam sint similia. Sit parallelogrammum $A B C D$ circa diametrum AC , & secetur AC bisariam in E , per E ducatur FG alterutri ipsarum AD BC parallela, & per idem punctum E ducatur HK parallela alterutri ipsarum AB DC , erunt supplementa BE ED similia quidem toti, ipsis vero FH KG parallelogrammis, & similia & æqualia, quod ex ijs, quæ in sequentibus tradentur, facile demonstrare possumus.

THEOREMA I. PROPO. I.

Si sint duæ rectæ lineæ, altera autem ipsarum secta fuerit in quotcumque partes; rectangulum duabus rectis lineis contentum æquale est eis rectangulis, quæ recta linea infecta, et singulis partibus continentur.

Sint duæ rectæ lineæ $A B C$, et secta sit $B C$ vt cumque in punctis $D E$. Dico rectangulum rectis lineis $A B C$ contentum æquale esse rectangulo, quod $A B D$, et rectangulo, quod $A D E$, et ei, quod $A E C$ continetur. Ducatur enim à puncto B ipsi $B C$ ad rectos angulos $B F$: atque ipsi A ponatur equalis $B G$: et per G qui dem ipsi $B C$ parallela ducatur GH ; per $D E C$ vero ducatur $D K E L C H$ parallela ipsi $B G$. rectangulum igitur $B H$ est æquale rectangulis $B K D L E F$: atque est $B H$ quidem, quod $A B C$ continetur; etenim continetur $G B B C$: et $B G$ ipsi A est æqualis; rectangulum

15. primi.

3. primi.

31. primi.

H autem

E V C L I D . E L E M E N T .

autē B K est quod continetur ipsi A B D; continetur enim G B B D, quarū G B est aequalis A: et rectangulum D L est quod continetur A D E, quoniam D K, hoc est B G ipsi A est equalis: et similiter rectangulum E H est quod A E C continetur: ergo rectangulum contentum A B C est aequale rectanguloq; contento A B D, et contento A D E, et adhuc contento A E C. Si igitur sint duę rectę lineę, altera autem ipsarum secta fuerit in quocumque partes; rectangulum duabus rectis lineis contentum est aequale eis, quę recta linea infecta, et singulis partibus continentur. quod oportebat demonstrare.

F . C . C O M M E N T A R I V S .

Sed & non nulla his similia demonstrare libuit, quę tum ad alia, tum ad ea, quę in decimo libro traduntur, utilia erunt.

T H E O R E M A P R I M U M .

Si fuerint duę rectę lineę, quę secuntur in quocumque partes; rectangulum duabus rectis lineis contentum est aequale rectangulis, quę vnaquaque parte vnus ad vnamquamque partem alterius applicata continentur.

31. primi.

Sint duę rectę lineę A B B C rectum angulum A B C continentes, & sectur A B quidem in punctis D E, B C vero in punctis F G. dico rectangulum contentum A B B C aequale esse rectangulis, quę singulis ipsarum A D D E E B ad singulas B F F G G C applicatis continentur. completo enim parallelogrammo A B C H, ducantur per D E puncta rectę lineę D K E L, alterutri ipsarum A H B C parallelę; & per F G ducatur F M N O G P Q R parallelę alterutri ipsarum A B H C. erit parallelogrammum A C aequale parallelogrammis A N D M E F, quę continentur ipsi B F, & singulis partibus rectę lineę A B, videlicet A D D E E B; parallelogramma vero O Q N P M G sunt, quę continentur F G, & singulis partibus A D D E E B; & denique parallelogramma R K Q L P C, quę continentur G C, & singulis partibus eiusdem rectę lineę A B. Si igitur fuerint duę rectę lineę, quę secuntur in quocumque partes; rectangulum duabus rectis lineis contentum est aequale rectangulis, quę vnaquaque parte vnus ad vnamquamque partem alterius applicata continentur. quod oportebat demonstrare.

T H E O R E M A I I .

Si fuerint duę rectę lineę, quę vtrumque secuntur; rectangulum totis contentū vnā cum eo, quod continetur duabus partibus ipsarum est equalis rectangulis, quę continentur totis, et dictis partibus vnā cum eo, quod reliquis partibus continentur.

31. primi.

Sint duę rectę lineę A B B C, rectum angulum A B C continentes: & sectur A B quidem in puncto D; B C vero in puncto E. Dico rectangulum A B C vnā cum rectangulo contento duabus partibus ipsarum, videlicet D B E C aequale esse & rectangulo contento tota A B, & dista parte rectę lineę B C, videlicet E C, & contento tota B C, & dista parte D B vnā cum eo, quod reliquis partibus A D B E continetur. compleatur enim parallelogrammum A E C F, & à puncto D alterutri ipsarum B C A F parallelę ducatur D G: à puncto autem E ducatur E H K parallelę alterutri ipsarum A B F C. itaque constat rectangulum A B C aequale esse rectangulis A E K C. addatur vtrinq; commune rectangulum H C, quod continetur duabus partibus

D B

DE C. Rectangulum igitur ABC una cum rectangulo HC est aequale tribus rectangulis AEK C, & HC. quorum rectangulum quidem KC est quod continetur tota AB, hoc est KE, & parte EC. rectangulum vero DE una cum rectangulo HC est quod continetur tota BC, & parte D B. & reliquum AH est quod continetur reliquis partibus AD BE, hoc est AD DH. ergo rectangulum ABC una cum rectangulo HC est aequale & rectangulo contento tota AE, & EC, & contento tota BC, & DB una cum eo, quod reliquis partibus AD BE continetur. Si igitur duae rectae lineae utcumque secutur et reliqua, quod oportebat demonstrare. Eodem modo demonstrabitur & in alijs partibus.

THEOREMA II. PROPOSITIO II.

Si recta linea secta fuerit utcumque; rectangula quae tota, et singulis partibus continentur aequalia sunt ei, quod à tota fit quadrato.

Recta enim linea AB secta fit utcumque in puncto C. Dico rectangulum, quod AB BC continetur, una cum contento BA AC aequale esse quadrato, quod fit ex AD. Describatur enim ex AB quadratum ADEB, et per C ducatur alterutri ipsarum AD BE parallela CF, aequale igitur est AE rectangulis AF CE. atque est AE quidem quadratum, quod ex AB; AF vero rectangulum contentum BA AC; etenim DA AC continetur, quarum AD ipsi AB est equalis: et rectangulum CE continetur AB BC, cum BE sit equalis AB. ergo rectangulum BA AC una cum rectangulo ABC aequale est quadrato ex AB. Si igitur recta linea utcumque secta fuerit, rectangula, quae tota, et singulis partibus continentur, aequalia sunt ei, quod à tota fit quadrato. quod demonstrare oportebat.

46. primi.
31. huius.

F. C. COMMENTARIUS.

Similiter ut superius demonstrabitur, si recta linea secetur in quocumque partes, quadratum totius lineae aequale esse rectangulis, quae singulis partibus ad singulas applicatis continentur.

THEOREMA III.

PROPOSITIO III.

Si recta linea utcumque secta fuerit; rectangulum tota, et una eius parte contentum aequale est et rectangulo, quod partibus continetur, et ei quod à praedicta parte fit quadrato.

Recta enim linea AB secta fit utcumque in puncto C. Dico ABC rectangulum aequale esse rectangulo ACB una cum quadrato, quod fit ex B C. Describatur enim ex BC quadratum CDEB; producatursq; ED in F; et per A alterutri ipsarum CD BE parallela ducatur AF, aequale utriusque erit rectangulum AE ipsis AD CE: et est AE quidem rectangulum contentum AB BC; etenim AB BE continetur, quarum BE est equalis BC; rectangulum vero AD est quod continetur AC CB, cum DC

46. primi.
31. primi.

ipſi C B ſit æqualis: et D B eſt quadratum, quod ſit ex B C. ergo rectangulum A B C eſt æquale rectangulo A C B vna cum quadrato quod ex B C. Si igitur recta linea vtrumque ſecta fuerit; rectangulum tota, et vna eius parte contentum æquale eſt rectangulo, quod partibus continetur, et ei, quod à prædicta parte ſit quadrato.

T H E O R E M A I I I I . P R O P O S I T I O I I I I .

Si recta linea ſecta fuerit vtrumque, quadratum quod ſit à tota æquale erit, et quadratis, quæ à partibus ſunt, et ei, quod bis partibus continetur rectangulo.

46. primi.
31. primi.

19. primi.

5. primi.

6. primi.
34. primi.

19. primi.
34. primi.

41. primi.

Recta enim linea A B ſecta ſit vtrumque in C. Dico quadratum, quod ſit ex A B æquale eſſe, et quadratis ex A C C B, et ei rectangulo, quod bis A C C B continetur. Describatur enim ex A B quadratum A D E B, iungaturq; B D, et per C quidem alterutri ipſarum A D B E parallela ducatur C G F; per G vero alterutri ipſarum A B D E ducatur parallela H K. Et quoniam C F eſt parallela ipſi A D, et in ipſas incidit B D: erit exterior angulus B G C interiori et oppoſito A D B æqualis: angulus autem A D B eſt æqualis angulo A B D, quod et latus B A æquale eſt lateri A D. quare C G B angulus angulo G B C eſt æqualis: ac propterea latus B C lateri C G æquale. Sed et latus C B æquale eſt lateri G K, et C G ipſi B K. ergo et G K eſt æquale K B, et C G K B æquilaterum eſt. dico inſuper etiam rectangulum eſſe. quoniam enim C H eſt parallela ipſi B K, et in ipſas incidit C B; anguli K B C G C B duobus rectis ſunt æquales. rectus autem eſt K B C angulus. Ergo et rectus G C B, et anguli oppoſiti C G K G K B recti erunt. rectangulum igitur eſt C G K B. Sed oſtenſum fuit et æquilaterum eſſe. quadratum igitur eſt C G K B, quod quidem ſit ex B C. eadem ratione et H F eſt quadratum, quod ſit ex H G. hoc eſt ex A C. ergo H F C K ex ipſis A C C B quadrata ſunt. et quoniam rectangulum A G eſt æquale rectangulo G E, atque eſt A G quod A C C B continetur, eſt enim G C ipſi C B æqualis: erit et G E æquale ei, quod continetur A C C B, quare rectangula A G G E æqualia ſunt ei quod bis A C C B continetur. Sunt autem et H F C K quadrata ex A C C B. quattuor igitur H F C K A G G E et quadratis ex A C C B, et ei quod bis A C C B continetur rectangulo ſunt æqualia. Sed H F C K A G G E ſunt totum A D E B quadratum, quod ſit ex A B. quadratum igitur ex A B æquale eſt, et quadratis ex A C C B, et ei quod bis A C C B continetur rectangulo. quare ſi recta linea vtrumque ſecta fuerit; quadratum quod ſit à tota æquale erit et quadratis, quæ à partibus ſunt, et ei rectangulo, quod bis partibus continetur, atque illud eſt, quod demonſtrare oportebat.

5. primi.
32. primi.

19. primi.

6. primi.

A L I T E R. Dico quadratum ex A B æquale eſſe, & quadratis ex A C C B. et ei rectangulo, quod bis A C C B continetur. quoniam enim in eadem figura æqualis eſt B A ipſi A D; et angulus A B D angulo A D B æqualis erit: et cum omnis trianguli tres anguli duobus rectis ſint æquales; erunt trianguli A B D tres anguli A B D A D B B A D æquales duobus rectis. rectus autem eſt angulus B A D. ergo reliqui A B D A D B ſunt vni recto æquales, et ſunt æquales inter ſe ſe vtrumque igitur ipſorum A B D A D B eſt recti dimidius. Sed rectus eſt B C G, æqualis namque eſt angulo oppoſito, qui ad A. reliquis igitur C G B dimidius eſt rectus: propterea C G B angulus angulo C B G eſt æqualis; et latus B C æquale lateri C G. Sed C B eſt æqualis G K, et C G ipſi B K. æquilaterum igitur eſt C K; et cum habeat rectum angulum C B K, etiam eſt quadratum; quod quidem ſit ex C B. eadem ratione et H F quadratum

quadratum est, et æquale quadrato quod ex A C. quadrata igitur sunt CK HF, et quadratis ex A C C B æqualia. Rursus quoniam rectangulum AG est æquale ipsi G E, atque est AG id quod A C C B continetur, est enim CG ipsi C B æqualis: erit et GE æquale contento A C. C B. quare A G G E æqualia sunt ei, quod bis A C C B continetur. Sunt autem et CK HF æqualia quadratis ex A C C B. ergo CK HF A G G E æqualia sunt et quadratis ex A C C B, et ei quod bis A C C B continetur. Sed CK HF et A G G E sunt totum A E, quod fit ex A B quadratum. quadratum igitur ex A B æquale est, quadratisq; ex A C C B, et ei quod bis A C C B continetur rectangulo. quod ostendere oportebat.

34. primi.

43. primi.

COROLLARIUM.

Ex hoc perspicue constat in quadratis spacijs parallelogramma, quæ sunt circa diametrum, quadrata esse.

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

Si recta linea secta fuerit in partes æquales, et in partes inæquales, rectangulum inæqualibus totius partibus contentum vna cum quadrato lineæ, quæ inter sectiones interijcitur; æquale est ei quod à dimidia fit quadrato.

Recta enim linea quædam AB secta sit in partes æquales ad punctum C, et in partes inæquales ad D. Dico rectangulum contentum AD DB vna cum quadrato quod fit ex CD æquale esse ei quod ex CB quadrato. Describatur enim ex B C quadratum CEFB; iungaturq; BE; et per D qui dem alterutri ipsarum CE, BF parallela ducatur DHG; per H vero ducatur KLO parallela alterutri ipsarum CB EF; et prius per A ducatur alterutri CL, BO parallela

46. primi.

51. primi.

AK. Et quoniam CH supplementum æquale est supplemento HF, commune apponatur DO. totum igitur CO toti DF est æquale: sed CO est æquale AL, quoniam et A C ipsi C B. ergo et AL æquale est DF. commune apponatur CH. totum igitur AH ipsi FD DL æquale erit. Sed AH quid est quod AD DB continetur, etenim DH ipsi DB est æqualis: FD DL vero est gnomon MNX; gnomon igitur MNX æqualis est ei, quod AD DB continetur. commune apponatur LG, æquale scilicet quadrato quod ex CD. ergo MNX gnomon, et LG æqualia sunt rectangulo, quod continetur AD DB, et ei, quod fit ex CD quadrato. Sed MNX gnomon, et LG sunt totum quadratum CEFB, quod quidem fit ex C B. ergo rectangulum AD B vna cum quadrato quod ex CD æquale est ei, quod ex CB quadrato. Si igitur recta linea secta fuerit in partes æquales, et in partes inæquales, rectangulum inæqualibus totius partibus contentum vna cum quadrato lineæ, quæ inter sectiones interijcitur, æquale est ei, quod à dimidia fit quadrato. quod demonstrare oportebat.

43. primi.

36. primi.

THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

Si recta linea bifariam secetur, atque ipsi in rectum adijciatur quædam recta linea; rectangulum tota cum adiecta, et adiecta contentum, vna cum quadrato dimidiæ, æquale est quadrato, quod ab ea,

quæ

que ex dimidia, et adiecta cōstat tāquā ab vna linea describitur.

46. primi.

și primi.

26. primi.

43. primi.

le. fed C A quale est HF. ergo et A Lipi HF. a quale erit. commune apponatur C
M. totum igitur AM gnomoni N X O est equale: atq; est A M, quod A D D B cōtinē
tur, etenim DM est equalis DB. ergo et gnomoni N X O equalis est rectangulum ADB.
rursus commune apponatur L C, a quale scilicet quadrato, quod ex C B. refrangu
lum igitur A D B. vñā cum quadrato quod ex B C. equale est gnomoni N X O, et ip
si L G. Sed gnomon N X O, et L G totum sunt C E F D. quadratum; quod eūdem
fit ex C D. ergo rectangulum A D B vñā cum quadrato ex B C. a quale est ei, quod
fit ex C D. quadrato. Si igitur recta linea secetur bifariam, addiaturq; ipsi in re
ctum quādam recta linea; rectangulum tota cum adiecta, et adiecta contentum vñā
cum quadrato dimidia auale est quadrato, quod ab ea, quę ex dimidia, et adiecta
constat, tamquā ab vna linea describitur. quod oportebat demonstrare.

SCHOLIUM.

In hoc ostenditur arithmetica analogia. quo enim AD superat DC , videlicet ipsa CB , eo & CD superat DB : quod per numeros manifestius cognoscitur, cum medius semper equaliter & excedatur, & excedat. Theorema autem est. Quadratum quod fit ab excessu una cum eo, quod extremis continetur, quadrato medij aequale esse:

THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

Si recta linea vtrunque secta fuerit, quæ à tota, et vna parte
fiunt vtraque quadrata equalia sunt, et rectángulo, quod bis tota,
ac dicta parte continetur, et ei, quod à reliquâ parte fit quadrato.

46. primi.

43. primi.

E. CE sunt KLM gnomon, et quadratum CF, er-
go KLM gnomon, et quadratū CF dupla erit
rectanguli AF. est autem id quod bis AB B
continetur duplum ipsius AF; etenim B' B est
qualis

æqualis BC. gnomon igitur KLM, et quadratum CF æqualia sunt ei, quod bis A B BC continetur. commune apponatur DG, quod est ex AC quadratum. Ergo gnomon KLM, et quadrata BG GD æqualia sunt ei, quod bis A B BC continetur, et quadrato ex AC. at gnomon KLM, et quadrata BG GD totum sunt AD EB, et CF; quæ sunt ex A B BC quadrata. quadrata igitur ex A B BC æqualia sunt rectangulo, quod bis A B BC continetur vna cum eo, quod fit ex AC quadrato. ergo si recta linea vtrumque secta fuerit; quæ à tota, et vna parte fiunt vtrique quadrata æqualia sunt rectangulo; quod bis tota, ac dicta parte continetur, et ei, quod à reliqua parte fit, quadrato; quod ostendere oportebat.

F. C. COMMENTARIUS.

Non alienum esse videtur hoc loco apponere theorema, quod etiam in commentarijs in Apollonii pergei conica demonstrauimus: eo enim ad sequentia vtenur.

Si recta linea in partes inæquales secetur; earum partium quadrata æqualia sunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur vna cum quadrato eius lineæ, quæ maior pars superat minorem.

Secetur recta linea AB in partes inæquales in C ita vt AC maior sit quàm CB; & ipsi CB æqualis ponatur AD. Dico quadrata ex AC CB æqualia esse rectangulo, quod bis AC CB continetur vna cum quadrato rectæ lineæ DC, quæ scilicet AC ipsam CB superat. constituatur enim ex AC CB quadrata ACEF, CBGH: & per D ducta linea DK, ipsi CE parallela, producaturs GH, vt sect DK in L. Itaque quoniam AD est æqualis CB, addita vtrique communi DC; erit DB ipsi AC æqualis. Sed GL est æqualis BD, & CE æqualis AC. ergo & GL ipsi CE æqualis erit. est autem & CH æqualis HG. reliqua igitur EH reliqua HL est æqualis: ideoq; KH est quadratum, quod à linea KE, hoc est DC describitur. rectangula vero AK DG sunt quæ continentur lineis AC CB; etenim AD est æqualis BC, & DB ipsi AC. quadrata igitur ex AC CB æqualia sunt rectangulo, quod bis AC CB continetur vna cum ipsius DC quadrato. Si igitur recta linea in partes inæquales secetur; earum partium quadrata æqualia sunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur vna cum quadrato eius lineæ, quæ maior pars superat minorem. quod demonstrare oportebat.

46. primi.

31. primi.

34. primi.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

Si recta linea vtrumque secta fuerit; et quod quater tota, et vna parte continetur rectangulum vna cum quadrato reliquæ partis æquale est quadrato, quod ex tota, et dicta parte tamquam ex vna linea describitur.

Recta enim linea AB secta sit vtrumque in C. Di co rectangulum quater AB BC contentum vna cum quadrato quod ex AC æquale esse quadrato, quod ex AB BC, tamquam ex vna linea describitur. Producaturs enim recta linea AB in D; et ipsi CB ponatur æqualis BD; describaturq; ex AD quadratum AEFD; et dupla figura construatur. Quoniam igitur CB est æqualis BD, atque est CB ipsi CK æqualis; BD vero ipsi KN: erit et GK æqualis KN. eadem ratione et PR ipsi RO est æqualis. et quoniam CB est æqualis BD, et GK ipsi KN; erit rectangulum

34. primi.

quidem

36. primi.

43. primi.

quidem CK rectangulo KD; rectangulū vero GR ipsi RN æquale. Sed CK est æquale RN, supplemēta enim sunt parallelogrami CO. ergo et KD æquale est GR, et quattuor rectangula DK KC GR RN inter se æqualia; ideoq; quadrupla sunt rectanguli C K. Rursus quoniam C B est æqualis BD, et BD quidē ipsi BK, hoc est ipsi CG æqualis; CB vero ipsi GK, hoc est GP: erit et CG æqualis GP. est autem et PR ipsi RO æqualis. rectangulum igitur AG rectangulo MP, et rectangulum PL ipsi RF æquale erit. Sed MP est æquale PL; supplemēta enim sunt ML parallelogrammi. quare et AG ipsi RF est æquale. quattuor igitur AG MP PL RF inter se æqualia sunt, ac propterea ipsius AG quadrupla. Ostensum autem est et quattuor CK KD GR RN quadrupla esse CK. quare octo contentia gnomonem STY ipsius AK quadrupla sunt. et quoniam AK est quod AB BC continetur; etenim BK est æqualis B C; erit contentum quater AB BC ipsius A K quadruplum. At demonstratus est gnomon STY quadruplus AK. quod igitur quater AB BC continetur æquale est gnomoni STY. commune apponatur XH, quod quidem quadrato ex A C est æquale. ergo quod quater AB BC continetur vñā cum quadrato ex AC æquale est ipsi STY gnomoni, et quadrato XH. Sed STY gnomon, et YH totum sunt A E F D quadratum, quod describitur ex AD. rectangulum igitur quater AB BC contentum vñā cum quadrato ex AC æquale est ei, quod ex AD, hoc est ex AB BC tamquam ex vna linea describitur, quadrato. ergo si recta linea utcumque secta fuerit; quod quater tota, et vna parte continetur rectangulum, vñā cum quadrato relique partis æquale est quadrato, quod ex tota, et dicta parte tamquam ex vna linea describitur. quod ostendendum fuerat.

T H E O R E M A I X . P R O P O S I T I O I X .

Si recta linea in partes æquales, et in partes inæquales secta fuerit, quadrata, quæ ab inæqualibus totius partibus describuntur, dupla sunt et quadrati dimidiæ, et quadrati linea eius; quæ inter sectiones interijcitur.

11. primi.

31. primi.

5. primi.

32. primi.

29. primi.

6. primi.

41. primi.

Recta enim linea quedam AB secta sit in partes æquales ad C, et in partes inæquales ad D. Di co quadrata ex AD DB, quadratorum ex A C CD dupla esse. Ducatur enim à puncto C ipsi AB ad rectos angulos CE, et vtrique ipsarum AC CB equalis ponatur, iunganturq; EA EB. ac per D quidē in ipsi CE parallela ducatur DF; per F vero ipsi AB parallela FG, et AF iungatur. itaque quoniam A C est æqualis CE; erit et angulus EAC angulo AEC æqualis. Et cum rectus sit angulus ad C, reliqui AEC, EAC vni recto æquales erunt. et sunt æquales inter se. vterque igitur ipsorum AEC EAC recti est dimidius. eadem ratione et recti dimidius est vterque ipsorum CEB EBC. ergo totus angulus AEB rectus est. et quoniam angulus GEF dimidius est recti, rectus autem EGF; æqualis enim est interiori, et opposito ECB; erit et reliquus EFG recti dimidius: æqualis igitur est GEF angulus ipsi EFG. quare et latus EG lateri GF est æquale. rursus quoniam angulus ad B dimidius est recti, rectus autem FDB, quod sit æqualis interiori, et opposito ECB: reliquus BFD recti erit dimidius. angulus igitur ad B æqualis est angulo DFB; ideoq; latus DF lateri DB æquale. et quoniam AC est æqualis CE, erit et ex AC quadratum æquale quadrato ex CE. quadrata igitur ex AC CE dupla sunt quadrati ex AC. quadratis autem ex AC CE æquale est quadratum ex EA, siquidem rectus est angulus ACE, ergo quadratum ex EA quadrati ex AC est duplum. rursus quoniam EG æqualis est GF; et quadrati ex EG quadrato ex CF est æquale. quadrata igitur ex EG GF dupla sunt quadrati ex CF. at quadratis ex EG GF æquale est quod ex EF quadratum. Ergo quadratum

quadratum ex EF quadrati ex GF duplum erit. equalis autem est GF ipsi CD. quadratum igitur ex EF duplum est quadrati ex CD. Sed et quadratum ex AE quadrati ex AC est duplum. ergo quadrata ex AE EF dupla sunt quadratorum ex AC CD. quadratis vero ex AE EF æquale est ex AF quadratum; quoniam angulus AEF rectus est. quadratum igitur ex AF quadratorum ex AC CD est duplum. Sed quadrato ex AF equalia sunt ex AD DF quadrata. rectus enim est angulus qui ad D. ergo ex AD DF quadrata dupla sunt quadratorum ex AC CD. est autem DF ipsi DB æqualis. quadrata igitur ex AD DB quadratorum ex AC CD dupla erunt. Quare si recta linea in partes æquales, et in partes inæquales secta fuerit, quæ ab inæqualibus totius partibus describuntur quadrata dupla sunt, et quadrati dimidiæ, et quadrati lineæ eius, quæ inter sectiones interciitur, quod ostendere oportebat.

F. C. C O M M E N T A R I V S.

Possimus etiam illud aliter demonstrare hoc modo. Ipsidem enim positis quoniam recta linea AB secatur in partes æquales ad punctum C, et in partes inæquales ad D; erit DB recta linea, qua AC ipsam CD superat. Ergo ex his, quæ demonstrauimus ad septimam huius, quadrata ex AC CD æqualia sunt, & rectangulo, quod bis AC CD continetur, & ipsius DB quadrato: ideoque, quadrata ex AC CD inà cum rectangulo, quod bis AC CD continetur, & quadrato ipsius DB, dupla sunt quadratorum ex AC CD. Sed quadratum ex AD est æquale quadratis ex AC CD, & rectangulo bis AC CD contento. quadrata igitur ex AD DB quadratorum ex AC CD sunt dupla. quod oportebat demonstrare.

4. huius.

T H E O R E M A X. P R O P O S I T I O X.

Si recta linea secetur bifariam, et ipsi in rectum quædam recta lineæ adiciatur; quæ à tota cum adiecta, et adiecta fiunt vtraque quadrata dupla sunt, et quadrati dimidiæ, et quadrati, quod ab ea quæ ex dimidia, et adiecta constar, tamquam ab vna linea describitur.

Recta enim linea AB secetur bifariam in C, et ipsi in rectum adiciatur quædam recta linea BD. Dico quadrata ex ad DB quadratorum ex AC CD dupla esse. ducatur enim à puncto C ipsi AB ad rectos angulos CE, et vtrique ipsarum AC CB æqualis ponatur; iunganturque AE EB: et per E quidem ipsi AD parallela ducatur EF; per D vero ducatur DF parallela ipsi CE. et quoniam in parallelas EC FD recta quædam linea EF incidit, anguli CEF EFD æquales sunt duobus rectis. anguli igitur FEB EFD duobus rectis sunt minores. quæ autem à minoribus, quam sint duo recti in infinitum producantur, conueniunt inter se. Ergo EB FD productæ ad partes B D conueniunt; producantur, et conueniant in puncto G, et AG iungatur. itaque quoniam AC est æqualis CE, et angulus AEC angulo EAC æqualis erit; atque est rectus qui ad C. vterque igitur ipsorum EAC AEC est recti dimidijs. eadem ratione et recti dimidijs est vterque CEB EBC. ergo AEB est rectus. et quoniam EBC est dimidijs recti; erit et recti dimidijs DBG. cum sit aduerticem. Sed et BDG rectus est; etenim est æqualis ipsi DCE alterno. reliquus igitur DGB dimidijs est recti, et ob id ipsi DBG æqualis. ergo et latus BD æquale lateri DG. rursus quoniam EGF est dimidijs recti, rectus autem, qui ad F, est

27. primi.

31. primi.

29. primi.

Ex demon-

stratis ad.

29. primi.

5. primi.

15. primi.

29. primi.

I enim

enim angulo opposito qui ad C æqualis, erit et reliquus FEG recti dimidius, et æqualis ipsi E GF, quare et latus GF lateri EF est æquale. et cū EC sit æqualis CA; et quadratū ex EC æquale sit ei, quod ex CA, quadrato. ergo quadrata ex EC CA dupla sūt quadrati ex C A, quadratis aut ex EC CA æquale est quadratū ex E A. quadratū igitur ex EA quadrati ex AC est duplum. rursus quoniam GF est æqualis FE, æquale est et ex GF quadratū quadrato ex FE. quadrata igitur ex GF FE quadrati ex EF sūt dupla. at quadratis ex GF FE æquale est, quod ex EG quadratū. ergo quadratū ex E G duplum est quadrati ex E F. æqualis aut est EF ipsi CD. quadratū igitur ex EG quadrati ex CD duplum erit. Sed ostensum est quadratū ex EA duplum quadrati ex AC. ergo ex AE EG quadrata quadratorū ex AC CD sūt dupla. quadratis vero ex AE EG æquale est quod ex AG quadratum. quadratum igitur ex A G duplū est quadratorū ex AC CD. at quadrato ex A G æqualia sunt ex A D D G quadrata. ergo quadrata ex A D D G sunt dupla quadratorum ex AC CD. Sed D G est æqualis DB. quadrata igitur ex A D DB quadratorū ex A C CD sunt dupla. Ergo si recta linea bifariam secetur, et ipsi in rectū quædam recta linea adiciatur; quæ à tota cū adiecta, et adiecta fiunt vtraque quadrata dupla sunt, et quadrati dimidiæ, et quadrati, quod ab ea, quæ ex dimidia, et adiecta constat tamquam ab vna linea describitur. quod ostendere oportebat.

F. C. C O M M E N T A R I V S .

Hoc quoque aliter demonstrabimus.

Quoniam enim recta linea A B secatur bifariam in C, et ipsi adicitur B D, erit B D linea, quæ DC ipsam C A superat quare ex demonstratis ad septimā huius quadrata ex A C C D æqualia sunt rectangulo, quod bis continetur A C C D, et quadrato ipsius B D. ergo quadrata ex A C C D. vna cum rectangulo, quod bis A C C D continetur, et ipsius B D quadrato dupla sunt quadratorum ex A C C D. at quadratum ex A D est æquale quadratis ex A C C D, et rectangulo bis A C C D contento. quadrata igitur ex A D D B quadratorum ex A C C D dupla erunt. quod demonstrare oportuit.

P R O B L E M A I . P R O P O S I T I O X I .

Datam rectam lineā secare, ita vt quod tota, et altera parte continetur rectangulū æquale sit ei, quod à reliqua parte fit, quadrato.

Sit data recta linea A B. oportet ipsam A B ita secare, vt quod tota, et altera parte continetur rectangulū æquale sit ei, quod à reliqua parte fit, quadrato. Describatur enim ex A B quadratum A B C D: seceturque A C bifariam in E, et B E iungatur: deinde producta C A in F, ponatur ipsi B E æqualis E F: describaturque ex A E quadratum F G H A: et G H ad K producatur. Dico A B secam esse in H, ita vt A B H rectangulum æquale sit quadrato ex A H. Quoniam enim recta linea A C bifariam secatur in E, adiciturque ipsi in rectum A F; rectangulum C F A vna cum quadrato ex A E æquale erit quadrato ex E F. Sed E F est æqualis E B. rectangulum igitur C F A vna cum quadrato ex A E æquale est ei, quod fit ex E B, quadrato. quadrato autem ex E B æqualia sunt quadrata ex B A A E etenim angulus ad A rectus est. ergo rectangulum C F A vna cum quadrato ex A E æquale est quadratis ex B A A E. commune auferatur, quod ex A E quadratum. reliquum igitur rectangulum

i. huius.
47 primi.

lum CFA æquale est quadrato ex AB. est autem CFA quidem rectangulum FK. siquidem AF est æqualis FG: quadratum autem ex AB est ipsum AD. rectangulum igitur FK æquale est quadrato AD. commune auferatur AK. ergo reliquum FH reliquo HD est æquale. atque est HD rectangulum ABH, cum AB sit æqualis BD, et FH est quadratum ex AH. rectangulum igitur ABH quadrato ex AH æquale erit. quare data recta linea AB secta est in H, ita ut ABH rectangulum quadrato ex AH sit æquale. quod facere oportebat.

SCHOLIVM,

Ex hoc constat geometricam esse analogiam. quoniam enim AB secta est in H, & quod AB BH continetur quadrato AH est æquale. hoc autem soli geometrica accidit medietati. Hanc in sequentibus extrema, ac media ratione secari dicit. nunc autem, quoniam de proportionem. nihil traditum est, non dicit extrema, ac media ratione secari.

THEOREMA XI. PROPOSITIO. XII.

In obtusiangulis triangulis, quod à latere obtusum angulum subtendente fit quadratum maius est quàm quadrata, quæ sunt à lateribus obtusum angulum continentibus, rectangulo contento bis vno laterum, quæ sunt circa obtusum angulum, in quod scilicet protractum perpendicularis cadit, et linea assumpta exterius à perpendiculari ad angulum obtusum.

Sit obtusiangulum triangulum ABC. obtusum angulum habens BAC: et ducatur à puncto B ad CA protractam perpendicularis BD. Dico quadratum ex CB maius esse, quàm quadrata ex BA AC, rectangulo, quod bis CA AD continetur. Quoniam enim recta linea CD secta est utcumque in puncto A, erit quadratum ex CD æquale, et quadratis ex CA AD, et ei quod bis CA AD continetur rectangulo. commune apponatur ex DB quadratum. quadrata igitur ex CD DB æqualia sunt et quadratis ex CA AD DB, et rectangulo, quod bis CA AD continetur. Sed quadratis ex CD DB æquale est quadratum ex CB. rectus enim est angulus ad D, cum sit BD perpendicularis. quadratis vero ex CA AD DB æquale est quadratum ex AB. quadratum igitur ex CB æquale est et quadratis ex CA AB, et rectangulo bis CA AD contento. Ergo quadratum ex CB maius est, quàm quadrata ex CA AB, rectangulo quod bis CA AD continetur. In obtusiangulis igitur triangulis, quadratum, quod à latere obtusum angulum subtendente fit, maius est quàm quadrata, quæ sunt à lateribus obtusum angulum continentibus, rectangulo contento bis vno laterum, quæ sunt circa obtusum angulum, ad quod protractum perpendicularis cadit, et linea assumpta exterius à perpendiculari ad angulum obtusum. quod demonstrare oportebat.

12. primi.

4. huius.

47. primi.

COMMENTARIIVS.

Ex his, quæ in hoc theoremate demonstrata sunt possumus cuiuslibet trianguli obtusum angulum habentis aream dimetiri.

Sit triangulum obtusangulum ABC , habens angulum ACB obtusum; sitq; latus AB exempli gratia pedum viginti, BC octo, & C a sexdecim; & à puncto A ad BC protractam ducatur perpendicularis AD . Primum igitur quanta sit linea CD , quae adiungitur lateri, in quod perpendicularis cadit, hoc modo comperiemus. Quadrata utrorumq; laterum AC , CB , quae sunt circa obtusum angulum simul sumpta à quadrato lateris AB , quod obtuso angulo subtenditur, detrahemus; & quod reliquum fuerit, dividemus per duplum lateris BC . ex hac enim divisione provenit linea, quam querimus. est autem quadratum lateris AC 256, & quadratum ipsius BC 64, quae simul sumpta faciunt 320. demptis igitur 320 à 400, quod est quadratum lateris AB , relinquitur 80, atque his divisus per 16, videlicet per duplum ipsius BC prodibunt 5, & tot pedum erit linea CD . Itaque quoniam triangulum ACD rectangulum est, quadratum lateris AC aequale erit quadratis, quae sunt ex CD & AD . quare dempto quadrato lineae CD , quod est 25 à quadrato ipsius A 256, reliquum erit quadratum perpendicularis AD , quod est 231, cuius latus AD est $15\frac{1}{2}$ proximè. Quomodo autem numeri non quadrati propinquum latus inveniatur, docuimus in nostris commentarijs in librum Archimedis de circuli dimensione. Ut igitur trianguli ABC aream habeamus, secetur BD bisariam in puncto E , & ab eo ducatur EF ipsi AD parallela; rursusq; à puncto A ducatur parallela ipsi DB , & conveniens cum EF in F puncto. Erit parallelogrammum rectangulum AD E F aequale triangulo ABD : utrumque enim dimidium est parallelogrammi, cuius basis est BD , & altitudo eadem AD . Ergo ducta ED , quae est $6\frac{1}{2}$ in AD $15\frac{1}{2}$ proveniet area rectanguli AD E F , & ob id etiam ABD trianguli $98\frac{1}{2}$ pedum quadratorum. Eadem ratione invenietur area trianguli ACD esse eius modi pedum 38. Quare demptis 38 à $98\frac{1}{2}$ relinquentur $60\frac{1}{2}$ proximè, pro area trianguli ABC , quam nobis inquirendam proposuimus.

47. primi.

THEOREMA XII. PROPOSITIO. XIII.

In acutiangulis triangulis, quod à latere acutum angulum subtendente fit quadratum minus est, quàm quadrata, quae sunt à lateribus acutum angulum continentibus, rectangulo contento bis vno laterum, quae sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, et linea à perpendiculari intus assumpta ad angulū acutū.

Sit acutiangulum triangulum ABC acutum habens angulum ad B : et ducatur à puncto A ad BC perpendicularis AD . Dico quadratum, quod fit ex AC minus esse, quàm quadrata, quae ex CB & BA , rectangulo, quod bis CB & BD continetur. Quoniam enim recta linea CB secta est utcumque in D , erunt quadrata ex CB & CD aequalia, et rectangulo quod bis CB & BD continetur, et quadrato ex DC . commune apponatur quod ex AD quadratum. quadrata igitur ex CB & BD & A aequalia sunt, et rectangulo bis CB & BD contento, et quadratis ex AD & DC . Sed quadratis ex BD & A aequale est quod ex A & B quadratum; rectus enim angulus est qui ad D . quadratis vero ex AD & DC aequale est quadratum ex A & C . quadrata igitur ex CB & BA sunt aequalia quadrato ex A & C , et si quod bis CB & BD continetur, rectangulo. quare solum quadratum ex A & C minus est quàm quadrata ex CB & BA rectangulo, quod bis CB & BD continetur. In acutiangulis igitur triangulis quadratum, quod à latere acutum angulum subtendente fit, minus est quàm quadrata, quae sunt à lateribus acutum angulum continentibus, rectangulo contento bis vno laterum, quae sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, et linea à perpendiculari intus assumpta ad angulū acutū. quod demonstrare oportebat.

12. primi.

7. huius.

47. primi.

SCHOLIUM.

Quoniam in diffinitionibus dixit Acutiangulum triangulum esse, quod tres acutos angulos habet, sciendum est hoc loco non ita dicere, sed triangula omnia appellare acutiangula, propterea quod omnia angulum habent acutum, & quamquam non omnes acutos, vnum tamen habent. propositio igitur huiusmodi est. Omnis trianguli latus, quod acutum subtendit angulum, minus potest, quàm latera acutum angulum continentia, rectangulo contento bis vno laterum, & reliqua quæ sequuntur. Itaque si rectangulū sit triangulum ex lateribus acutum angulum continentibus accipiemus illud, quod recto angulo subtenditur, vt in ipsum perpendicularis cadat. & similiter faciemus, si obtusiangulum sit. Conuersum vero theorematiss est hoc.

Sit quadratū ex AB minus quàm quadrata ex BC CA, eo, quod bis BC CE cōtinetur, et reliqua deinceps; atque à pūcto C ipsi CA ad rectos angulos ducatur CD, quæ ipsi CB sit equalis. ergo quadrata ex BC CA equalia sunt quadratis ex DC CA. Sed quadratis ex BC CA minus est quadratum ex A B. ergo & quadratis ex DC CA minus erit. quadratis autem ex DC CA æquale est quadratum ex D A. quadratum igitur ex DA quadrato ex AB maius, et ipsa DA maior, quàm AB. Itaque quoniam duæ DC CA duabus BC CA æquales sunt, et basis DA maior basi AB, erit et angulus DCA angulo ACB maior. rectus autem est DCA. ergo ACB acutus erit. quod oportebat demonstrare.

47. primi.

25. primi.

F. C. COMMENTARIUS.

Hoc non solum in triangulis acutiangulis verum est, sed etiam in obtusiangulis, & rectangulis, quæ duos angulos necessariò habent acutos. Quare dicemus presens theorema tres habere casus, vel enim ducta perpendiculari AD, punctum D cadit inter B C, vel extra, vel in ipsum C, ita vt AD sit eadem, quæ AC. Euclidis demonstratio congruit primo casui in triangulis, quæ acutiangula dicuntur; in alijs autem si modo perpendicularis cadat in latus, quod angulo recto, vel obtuso subtenditur. At si cadat in alterum latus eorum, quæ acutis angulis subtenduntur, nihilominus idem sequetur, vt demonstrabimus.

Sit obtusiangulum triangulum ABC, obtusum habens ACB angulum, et ducatur à puncto A ad BC protractam perpendicularis AD. Dico quadratum, quod fit ex AC, acutum angulum ABC subtendente minus esse, quàm quadrata, quæ ex AB BC fiunt, rectangulo, quod bis CB BD continetur.

Quoniam enim ABD triangulum rectangulum est, quadratum, quod fit ex AB æquale est quadratis, quæ ex BD DA. commune addatur quadratū ex BC, ergo quadratū ex AB BC æqualia sunt quadratis ex BD DA BC. Sed quadrato ex BD æqualia

quadrato ex BD æqualia

æqualia sunt quadrata ex BC CD vna cum rectangulo, quod bis BC CD continetur. quadratis autem ex CD DA quadratum ex AC est æquale. Quadrata igitur ex AB BC æqualia sunt quadrato ex AC, & duplo quadrati, quod ex BC vna cum rectangulo, quod bis BC CD continetur, sed quadrato ex BC, et rectangulo, quod BC CD continetur æquale est rectangulum CBD, ac propterea duplo quadrati ex BC, & rectangulo, quod bis continetur BC CD æquale est rectangulum, quod bis CB BD continetur. ergo quadrata ex AB BC æqualia sunt, quadrato ex AC vna cum rectangulo, quod bis continetur CB BD. Quadratum igitur ex AC minus est, quam quadrata ex AB BC, rectangulo, quod bis CB BD continetur.

Sit triangulum rectangulum ABC rectum angulum habens ACB. Dico quadratum lateris AC, quod acutum angulum ABC subtendit minus esse, quam quadrata ex AB BC, rectangulo, quod bis CB BD continetur.

Quoniam enim triangulum rectangulum est, erit perpendicularis AD eadem, quæ latus trianguli AC, & punctum D idem, quod C. quadratum vero, quod fit ex AB æquale quadratis ex BC CA. cõmune addatur quadratum ex BC. Ergo quadrata ex AB BC æqualia sunt quadrato ex AC, & duplo quadrati eius, quod fit ex BC. hoc est rectangulo, quod bis continetur CB BD. Quadratum igitur ex AC minus est quam quadrata ex AB BC rectangulo, quod bis CB BD continetur. quod demonstrare oportebat.

Ex proxime demonstratis licetbit cuiusque trianguli, siue acutianguli, siue rectanguli, siue obtusianguli quod nota latera habeat, aream inuenire.

Sit triangulum ABC habens angulos ad BC acutos, & à puncto A ad BC perpendicularis ducatur AD, quæ inter BC necessario cadet. Sit autem latus AB pedum 13, BC 14, & CA 15. Itaque primum quadratum lateris AC, quod angulo acuto B subtenditur, à quadratis reliquorum laterum AB BC simul iunctis auferemus, & quod reliquum diuidemus per duplum lateris BC, in quod perpendicularis cadit; & proveniet recta linea BD, quæ à perpendiculari intus assumitur ad angulum acutum. Deinde à quadrato lateris AB, quod subtenditur angulo ADB recto, auferemus quadratum ipsius BD, et eius, quod proveniet quadrati latus erit perpendicularis AD magnitudo, ex qua denique totius ABC trianguli area nota efficietur. Quadratum igitur lateris AC est 225. quadratum vero ipsius AB 169, & quadratum BC 196, quæ duo simul iuncta faciunt 365. ergo sublatis 225 à 365 relinquuntur 140: atque bis per 28 diuisis provenient 5: ac propterea BD erit pedum quinque. Rursus si à quadrato lateris AB, hoc est à 169 auferatur quadratum BD, quod est 25, reliquetur 144, cuius quadrati latus est 12. ergo perpendicularis AD duodecim pedum erit. Itaque ductis 12 in basis BC dimidium, videlicet in 7 producentur 88, et totidem pedum quadratorum erit area triânguli ABC, quam à principio querebamus.

PROBLEMA II.

PROPOSITIO XIII.

Dato rectilineo æquale quadratum constituere.

Sit datum rectilineum A. oportet ipsi A rectilineo æquale quadratum constituere. constituatur rectilineo A æquale parallelogrammum rectangulum BCDE. Si igitur BE est æqualis ED factum iam erit, quod proponebatur, etenim rectilineo A æquale quadratum constitutum est BD: sin minus, vna ipsarum BE ED maior est. sit BE maior, et producat ad F, ponaturq; ipsi ED æqualis EF: deinde secta FB bifaria in G, centro

centro quidem G, intervallo autem una ipsarum GB GF semicirculus describatur BHF; producaturq; DE in H, et GH iungatur. quoniam igitur recta linea BF secta est in partes aequales ad G, et inaequales ad E; erit rectangulum BEF una cum quadrato, quod fit ex EG aequale quadrato ex GF. est autem GF aequalis GH, rectangulum igitur BEF una cum quadrato ex GE aequale est quadrato ex GH. Sed quadrato ex GH aequalia sunt ex HE EG quadrata; ergo rectangulum BEF una cum quadrato ex EG aequale est quadratis ex HE EG. commune auferatur ex EG quadratum, reliquum igitur rectangulum BEF est aequale quadrato ex EH. Sed rectangulum BEF est ipsum BD parallelogrammum, quoniam EF est aqualis ED, ergo BD parallelogrammum quadrato ex EH est aequale, parallelogrammum autem BD est aequale rectilineo A. rectilincum igitur A quadrato ex EH descripto aequale erit. quare dato rectilineo A aequale quadratum constitutum est, quod videlicet ex ipsa EH describitur. quod facere oportebat.

P. C. C O M M E N T A R I V S.

Hoc problemate multo universalis est, quod in sexto libro demonstratur, nempe. Dato rectilineo simile, et alteri dato aequale idem constituere.

L I B R I S E C U N D I F I N I S.

DEI NOTITIA

.I

LIB. SECUNDI. DE NOTITIA.

.II

LIB. SECUNDI. DE NOTITIA.

.III

LIB. SECUNDI. DE NOTITIA.

LIB. SECUNDI.

E V C L I D I S E L E M E N T O R V M

LIBER TERTIVS

CVM SCHOLIIS ANTIQVIS,
ET COMMENTARIIS

Federici Commandini Vrbinatis.

S C H O L I V M.

*Propositum Euclidi est hoc loco tractare de ijs, quæ circulis accidunt
cum ad rectas lineas, & ad angulos comparantur.*

DIFFINITIONES.

I.

EQVALES circuli sunt, quorum dia-
metri sunt æquales, vel quorum quæ ex
centris sunt æquales.

II.

Recta linea circulum contingere dici-
tur, quæ contingens circulum, et producta
ipsum non secat.

III.

Circuli continge-
re se se dicuntur, qui
contingentes se ip-
sos non secant.

Incirculo

IIII.

In circulo æqualiter distare à centro rectæ lineæ dicuntur, quando à centro ad ipsas perpendiculares ductæ sūt æquales.

V.

Magis autem distare à centro dicitur ea, ad quam maior perpendicularis cadit.

VI.

Portio circuli est figura, quæ recta linea, et circuli circumferentia continetur.

VII.

Portionis autem angulus est, qui recta linea, et circuli circumferentia cõprehenditur.

VIII.

In portione angulus est, quando in circumferentia portionis sumatur aliquod punctum, atque ab ipso ad terminos lineæ eius, quæ basis est portionis, rectæ lineæ ducantur, angulus vero ductis lineis fit cõtensus.

VIII.

Quando autem continentes angulum rectæ lineæ assumunt circumferentiam, in illa consistere angulus dicitur.

X.

Sector circuli est, quando angulus ad centrum cõstitit, figura contenta rectis lineis angulum comprehendentibus, et circumferentia ab ipsis assumpta.

K Similes

XI.

Similes circulorum
portiones sunt, quæ
angulos suscipiunt æ-
quales, vel in quibus
anguli æquales consi-
stunt.

XII.

A F E D. C O M M A N.

A D D I T A.

Similes circumferentie
circulorum sunt, in quibus
anguli consistunt æquales.

PROBLEMA I. PROPOSITIO I.

Dati circuli centrum inuenire.

10. primi.
11. primi.

Diffi. 15. pri.
8. primi.
diffi. 10. pri.

Sit datus circulus A B C. oportet circuli A B C centrum inuenire. ducatur in ipso quædam recta linea A B vtriusque, et in puncto D bifariam secetur. à puncto autem D ipsi A B ad rectos angulos ducta D C in E producat; et secetur C E bifariam in F. Dico punctum F circuli A B C centrum esse. Non enim, sed si fieri potest, sit G, et G A G D G B iungantur. itaque quoniam A D est æqualis D B, communis autem D G, erunt duæ A D D G duabus G D D B æquales, altera alteri: et basis G A æqualis est basi G B. sunt enim ex centro G. angulus igitur A D G angulo G D B est æqualis. Cum autem recta linea super rectam lineam insitens angulos, qui deinceps sunt, æquales inter se fecerit, rectus est vterque æqualium angulorum. ergo angulus G D B est rectus. Sed et rectus F D B. æqualis igitur est angulus F D B angulo G D B, maior minori, quod fieri non potest. quare G non est circuli A B C centrum. Similiter ostendemus neque aliud esse, præter ipsum F. ergo F centrum est circuli A B C. quod facere oportebat.

C O R O L L A R I U M.

Ex hoc perspicuum est, si in circulo quædam recta linea rectam lineam quandam bifariam, et ad angulos rectos secet, in secante circuli centrum inesse.

S C H O L I U M.

Conuersum
diffinitionis
circuli.

Ex theoremate ostenditur conuersum diffinitionis circuli. Si enim in ambitum figuræ ab aliquo puncto eorum, quæ sunt intra, incidant æquales rectæ lineæ, ea circulus est.

2. primi

Non

Non enim, sed si fieri potest, sit rectilineum, et sit aliquod
ipsum latus, in quod incidant duæ rectæ lineæ ipsum deter-
minantes. erit igitur æquicruræ triangulum: atque eius basi
bifariam secta, si ducatur recta linea rectos angulos faciet,
et viroque latere trianguli minor erit. quod est absurdum,
ponitur enim omnes rectæ lineæ, quæ incidunt, æquales esse.

AL I V D.

Quemadmodum in primo libro figurarum elementarium triangulo-
rum dico, eam, quæ maxime elementaris est, triangulum videlicet æqui-
laterum in factione initio proposuit, ob constructiones earum, quæ deinceps
sunt demonstrationum, ita & hoc loco centrum inuenire proponit.
hoc enim circuli ipsius ortus causa est.

Triangu-
lum æquila-
terum figu-
ra maxime
elementaris
est.
Centrum, cir-
culi ipsius
ortus causa
est.

THEOREMA I. PROPOSITIO. II.

Omnis quidem circulus habet proprium centrum natura determina-
tum; quatenus vero ad nos pertinet, non omnis, sed is tantum, cuius or-
tum videmus. In prioribus igitur theorematibus, tamquam factis iam
circulis, etiam centra manifesta sunt. at in his cum queratur substantia,
centrum etiam queritur: quod quidem substantiam circuli complet: hoc
autem primum, ut inquirunt, inter problemata, et theoremata medium est.
Quatenus enim querere, etiam aliquo modo facere proponit; quatenus
vero non in factionem, sed in inuentionem; ob id proponit contemplari.
Itaque mihi videtur formatam habens propositionem theorema esse, et
si de quarto quis dixerit. Duorum triangulorum, quorum duo latera
æqualia sunt, & anguli, inuenire si bases sint æquales. quemadmo-
dum enim illic symptoma quoddam inquit, quod duorum triangulo-
rum naturæ inest, ita & hoc loco, quod inest naturæ circuli. At si pro-
blematis proprium, & contrarium propositioni suscipit, multo magis
quod propositum est problematis denominationem effugiet.

Centrum sub-
stantiam cir-
culi cõplet.
Inter proble-
mata, ac
theoremata
medium.

THEOREMA I. PROPOSITIO. II.

Si in circumferentia circuli, duo quævis pun-
cta sumantur, quæ ipsa coniungit recta linea in-
tra circumulum cadet.

Sit circulus ABC, et in circumferentia ipsius sumantur
duo quævis puncta AB. Dico rectam lineam, quæ à puncto
A ad B ducitur, intra circumulum cadere. non enim, sed si
fieri potest, cadat extra, ut AEB, et sumpto circuli ABC
centro, quod sit D, iungantur DA, DB, et producat DF
in E. Quoniam igitur DA est æqualis DB, erit et angulus
DAE angulo DBE æqualis, et quoniam anguli DAE vnu

Ex antec-
edente.
5. primi.

K 2 latus

EVCLID. ELEMENT.

16. primi.

13. primi.

latus AEB protēditur, angulus DEB angulo DAE maior erit. angulus autem DAE equalis est angulo DBE. ergo DEB angulus angulo DBE est maior. Sed maiori angulo maius latus subtēditur. maior igitur est DB ipsa DE. est autē DB equalis DF. Ergo DF est maior DE, minor maiore, quod fieri nō potest. non igitur a puncto A ad B ducta recta linea extra circulū cadet. Similiter ostēdemus neque in ipsam cadere circumferentiā. Ergo extra cadat necesse est. Si igitur in circumferentiā circuli duo quęvis puncta sumantur, quę ipsa cōiungit recta linea intra circulū cadet. quod oportebat demōstrare.

F. C. COMMENTARIUS.

16. primi.

13. primi.

Similiter ostēdemus neque in ipsam cadere circumferentiā. Si enim in ipsam circumferentiā caderet, eadem ratione sequeretur angulum DEB maiorem esse angulo DAF, hoc est angulo DBF, ac propterea latus DB latere DF maius esset. sed & aequale, quod fieri non potest. non igitur in ipsam circumferentiā cadet.

THEOREMA II. PROPOSITIO III.

Si in circulo recta linea per centrum ducta rectam lineam quandam non ductā per cētrū bifariā secet, et ad angulos rectos ipsam secabit. quod si ad angulos rectos ipsam secet, et bifariam secabit.

x. huius.

Diff. 10. primi.

9. primi.

16. primi.

Sit circulus ABC, et in ipso recta linea per centrum ducta CD rectam lineam quandam AB non ductam per centrum bifariam secet in puncto F. Dico et ad angulos rectos ipsam secare. Sumatur enim circuli ABC centrum, quod sit E, et EA EB iungantur. quoniam igitur AF est equalis FB, communis autem FE, duę duabus aequales sunt, et basis EA basi EB est equalis. ergo et angulus AFE angulo BFE equalis erit. Cum autem recta linea super rectam insistentis angulos, qui deinceps sunt, aequales inter se fecerit, rectus est uterque aequalium angulorum. uterque igitur AFE BFE est rectus. quare recta linea CD per centrum ducta rectam lineam AB non ductam per centrum bifariam secans, et ad angulos rectos ipsam secabit. Sed CD secet AB ad rectos angulos. Dico et bifariam ipsam secare, hoc est AF ipsi FB equalem esse. Iisdem enim constructis, quoniam EA, quę ex centro est equalis EB, et angulus EAF angulo EBF equalis erit. est autem et AFE rectus equalis recto BFE. duo igitur triangula EAF EBF duos angulos duobus angulis aequales habet, unumquę latus vni lateri aequale EF, commune scilicet utrisque, quod vni angulorum aequalium subtenditur. ergo et reliqua latera reliquis lateribus equalia habebunt. atque erit AF ipsi FB equalis. Si igitur in circulo recta linea per centrum ducta rectam lineam quandam non ductam per centrum bifariam secet, et ad angulos rectos ipsam secabit. quod si ipsam secet ad rectos angulos, et bifariam secabit. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA. III. PROPOSITIO. IIIL

Si in circulo duę rectę lineę se inuicem secent non ductę per centrum, se se bifariam non secabunt.

Sit circulus ABCD; et in ipso duę rectę lineę AC BD se inuicem secent in puncto E, non ductę per centrum. Dico eas se se bifariam nō secare. Si enim fieri potest, secant

secant se se bifariam, ita ut AE sit æqualis EC, et BE ipsi ED: sumaturq; centrum ABCD circuli, quod sit F; et EF iungatur. quoniam igitur recta linea FE per centrū ducta rectam lineam quandam AC non ductam per centrum bifariam secat, et ad rectos angulos ipsam secabit. quare rectus est FEA angulus. rursus quoniam recta linea FE rectam lineam quandam BD non ductam per centrū bifariam secat, et ad angulos rectos ipsam secabit. rectus igitur angulus est FEB. ostensus autem est rectus et FEA. ergo FEA angulus ipsi FEB æqualis erit, minor maiori, quod fieri non potest. non igitur AC BD se se bifariam secant. quare si in circulo duæ recte lineæ se inuicem secant, non ducte per centrum, se se bifariam non secabunt. quod ostendere oportebat.

i. huius.

Ex antecedente.

S C I H O L I U M.

Si recta linea per centrum transirent, quærendum utique non esset, an bifariam se inuicem secant ipsorum enim centrum bipartita sectio est. similiter & si altera per centrum transiente, altera non sit per centrum. nam quæ per centrum transiit bifariam non secatur.

THEOREMA III. PROPOSITIO V.

Si duo circuli se inuicem secant, non erit ipsorum idem centrū,

Duo enim circuli se inuicem secant ABC CD in punctis BC. Dico ipsorum idem centrū nō esse. Si enim fieri potest, sit centrū E iungaturq; EC, et EFG utcumque ducatur. Et quoniam E centrū est circuli ABC, erit CE ipsi EF æqualis. rursus quoniam E centrū est CDG circuli, æqualis est CE ipsi EG. Sed ostensa est CE æqualis EF. ergo EF ipsi EG æqualis erit, minor maiori, quod fieri non potest. non igitur punctum E centrū est circulorum ABC CDG. quare si duo circuli se inuicem secant, non erit ipsorum idem centrū. quod ostendendum fuit.

THEOREMA V. PROPOSITIO VI.

Si duo circuli se se intra contingant, ipsorum idem centrum non erit.

Duo enim circuli ABC CDE contingat se se intra in puncto C. Dico ipsorum non esse idem centrum. si enim fieri potest, sit F iungaturq; FC, et FEB utcumque ducatur. quoniam igitur F centrū est circuli ABC, æqualis est CF ipsi FB. rursus quoniam F centrū est circuli CDE, erit CF æqualis FE. ostensa autem est CF æqualis FB. ergo et FE ipsi FB æqualis, minor maiori; quod fieri non potest. non igitur F punctum centrū est circulorum ABC CD. Equare si duo circuli se se intra contingant, ipsorum idem centrum non erit. quod demonstrare oportebat.

THEO.

T H E O R E M A V I . P R O P O S I T I O V I I .

Si in circuli diametro aliquod punctum sumatur, quod non sit centrum circuli; et ab eo in circulum cadant quedam rectæ lineæ: maxima quidem erit, in qua centrum; minima vero reliquæ: aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum transit, semper remotiore maior est. at duæ tantum æquales ab eodem puncto in circulum cadent ad utrasque partes minime.

20. primi.

24. primi.

25. primi.

4. primi.

Sit circulus ABCD, cuius diameter AD: et in ipsa AD sumatur aliquod punctum F, quod non sit centrum circuli. Sit autem circuli centrum E: et à puncto F in circulum ABCD cadant quedam rectæ lineæ FB EC FG. Dico FA maximam esse, et FD minimam: aliarum vero FB quidē maiorem quam FC, et FC maiorem quam FG. Iungatur enim BE CE GE. Et quoniam omnis trianguli duo latera reliqua sunt maiora: erunt BE EF maiores quam BF. est aut AE æqualis EB. Ergo BE EF ipsi AF sit æquales. maior igitur est AF quam FB. rursus quoniam BE est equalis EC, communis autem FE, duæ BE EF duabus CE EF æquales sunt. Sed BEF angulus maior est angulo CEF. basis igitur BF basi FC est maior. eadem ratione et CF maior est quam FG. rursus quoniam GE FE maiores sunt quam EG, æqualis autem GE ipsi ED, erunt GE FE maiores quam ED. communis auferatur EF. ergo reliqua GE maior est quam ED. maxima igitur est FA, et FD minima: maior vero BF quam FC, et CF quam FG maior. dico et à puncto F duas tantum rectas lineas cadere in circulum ABCD ad utrasque partes minimæ FD. constituatur enim ad lineam EF atque ad datum in ea punctum E angulo GEF æqualis angulus FEH: et FH iungatur. quoniam igitur GE est æqualis EH, communis autem EF, duæ GE EF duabus HE EF æquales sunt: et angulus GEF est æqualis angulo HEF. basis igitur FG basi FH æqualis erit. dico à puncto F in circulum non cadere aliam ipsi FG æqualem. Si enim fieri potest, cadat FK. et quoniam FK est æqualis FG, estq; ipsi FG æqualis FH, erit et FK ipsi FH æqualis, videlicet propinquior ei, quæ per centrum transit, æqualis remotiori, quod fieri non potest. Vel hoc modo. iungatur EK. et quoniam GE ipsi EK est æqualis, communis autem FE, et basis GF æqualis basi FK, erit et angulus GEF æqualis angulo KEF. Sed angulus GEF angulo HEF est æqualis. angulus igitur HEF ipsi KEF æqualis erit, minor maiori, quod fieri non potest. quare à puncto F in circulum non cadet alia recta linea æqualis ipsi GE. ergo una tantum cadet. Si igitur in circuli diametro aliquod punctum sumatur, quod non sit centrum circuli, et reliqua quæ sequuntur. quod demonstrare oportebat.

S C H O L I U M .

CONVERSUM. Si intra circulum punctum sumatur, atque à puncto in circulum cadant quotcumque rectæ lineæ, quarum una quidem maxima sit, una vero minima, & reliquarum aliæ sint æquales, aliæ inæquales; maxima quidem per centrum transibit, minima vero erit reliqua pars diametri; & aliarum maiores quidem sunt centro propinquiores, æquales autem ab eo æqualiter distant.

Per

Per punctum enim E, quod est intra circulum maxima quidem sit EC, minima vero ED; et FE quàm EB maior. Dico CE per centrum transire, et DE ipsi esse in directum; EF vero centro propinquiorem esse, quàm EB. Si enim CE non transit per centrum, sed alia quædam à puncto E in circulum cadēs, illa maxima erit per septimum theorema. est autem et EC maxima, quod fieri non potest. diameter igitur est CE, et ipsi in directum ED. Dico EF centro H propinquiorem esse, quàm EB. Si enim non est propinquior, vel remotior est, vel æqualiter distat: et siquidem remotior, maior erit BE, quàm EF, quod fieri non potest. non enim ponitur ita esse. Quod si æqualiter distant, æquales sunt. sed neque hoc ponitur. propinquior igitur est FE ipsi H, quàm EB, et GE ipsi EB est æqualis. Ergo à centro H æqualiter distant, inæqualiter enim distantes inæquales sunt, per septimum theorema, quod ostendere oportebat.

F. C. COMMENTARIUS.

Illud quoque verum est, quod nos demonstravimus in commentario in propositionem octavam libri Archimedis de lineis spiraliibus.

Si in circumferentia circuli aliquod sumatur punctum, ab eoq; in circulum ducantur rectæ lineæ; quæ per centrum transit, omnium erit maxima, aliarum verò quæ transeunt per cætrum propinquoires sunt, remotioribus erunt maiores; duæ autem tantum æquales sunt ad utraq; partes maxima.

THEOREMA VII. PROPOSITIO VIII.

Si extra circulum aliquod punctum sumatur, atque ab eo ad circulum ducantur quædam rectæ lineæ, quarum una per centrum transeat; aliæ vero utcumque: earum quidem, quæ in concavam circumferentiam cadunt, maxima est, quæ per centrum transit; aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum, semper remotiore maior est: at earum, quæ in convexam circumferentiam cadunt minima est, quæ inter punctum, et diametrum interiicitur; aliarum vero quæ propinquior minimæ semper remotiore est minor. duæ autem tantum æquales à puncto in circulum cadunt ad utraq; partes minimæ.

Sit circulus ABC, et extra circulum sumatur aliquod punctum D: ab eo autem in circulum ducantur rectæ lineæ quædam DA DE DF DC: sitq; DA per cætrum. Dico earum quidem quæ in concavam AEFC circumferentiam cadunt, maximam esse DA, quæ per centrum transit; et minimam, quæ inter punctum D, et diametrum AG interiicitur, videlicet DG: maiorem autem DE quàm DF, et DF maiorem quàm DC: earum vero, quæ in convexam circumferentiam HLKG cadunt, quæ propinquior minime DG semper remotiore esse minorem, hoc est DK minorem, quàm DL, et DL minorem quàm DH. Sumatur enim centrum circuli ABC, quod sit M, et iungantur ME MF MC MK ML MH. et quoniam AM est æqualis ME, communis

nis apponatur MD. Ergo AD est æqualis ipsis EM MD. Sed EM MD sunt maiores quàm ED. Ergo et AD quàm ED est maior. rursus quoniam æqualis est ME ipsi MF, communis apponatur MD. erunt EM MD ipsis MF MD æquales; et angulus EMD maior est angulo FMD. basis igitur ED basi FD maior erit. Similiter demonstrabimus et FD maiorem esse quàm CD. ergo maxima est DA; maior aut DE quàm DF, et DF quàm DC maior. præterea quoniam MK KD sunt maiores quàm MD, et MG est æqualis MK; erit reliqua KD quàm reliqua GD maior. quare GD minor quàm KD, et idcirco CD minima est. et quoniam trianguli MLD in vno latere MD, duæ rectę lineæ MK KD intra constituuntur, erunt MK KD minores ipsis ML LD, quarum MK est æqualis ML. reliqua igitur DK minor est quàm reliqua DL. Similiter ostendemus et DL quàm DK minorem esse. Ergo DG minima est. minor vero DK quàm DL, et DL minor quàm DH. dico et duas tantum æquales à puncto D in circulum cadere ad utrasque minimas partes. constituatur ad rectam lineam MD, ad datumq; in ea punctum M angulo K MD æqualis angulus DMB, et DB iungatur. itaque quoniam MK est æqualis MB, communis autem MD, duæ KM MD duabus BM MD æquales sunt, altera alteri. et angulus KMD æqualis angulo BMD. basis igitur DK basi DB est æqualis. dico à puncto D nullam aliam ipsi DB æqualem in circulum cadere. si enim fieri potest, cadat DN. et quoniam DK est æqualis DN, et DK ipsi DB est æqualis; erit et DB æqualis DN, propinquior scilicet minimæ æqualis remotiori, quod fieri non posse ostensum est, vel et aliter. iungatur MN. et quoniam æqualis est KM ipsi MN, communis autem MD; et basis DK basi DN æqualis erit, et propterea angulus KMD æqualis angulo D MN. Sed KMD angulus est æqualis angulo BMD. angulus igitur BMD angulo NM D æqualis erit, minor maiori, quod fieri non potest. quare, non plures quàm duæ rectę lineæ à puncto D in circulum ABC ad utrasque partes minimas GD cadent. Si igitur extra circulum aliquod punctum sumatur, et reliqua deinceps. quod ostendere oportebat.

34. primi.

2. primi.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO IX.

Si intra circulum sumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant plures quàm duæ rectę lineæ æquales; punctum quod sumitur, circuli centrum erit.

Sit circulus ABC, et intra ipsum sumatur punctum D, à quo in circulum cadant plures, quàm duæ rectę lineæ æquales, videlicet DA DB DC. Dico punctum D circuli ABC centrum esse. Iungantur enim AB BC, secenturq; bifariam in punctis EF; et iunctæ ED DF ad puncta GK HL producantur. quoniam igitur AE est æqualis EB, communis autem ED, erunt duæ AE ED duabus BE ED æquales; et basis DA est æqualis basi DB. angulus igitur AED angulo BED æqualis erit, et idcirco uterque angulorum AED BED est rectus. Ergo GK bifariam secans AB, et ad angulos rectos secat. et quoniam si in circulo quædam recta linea, rectam lineam quan-

8. primi.
13 primi.

quam

Idam bifariam, et ad angulos rectos secet, in secante est circuli centrum; erit in GK centrum circuli ABC. Eadē ratione et in HL centrum est ABC circuli, et nullum aliud commune habent rectæ siue GH HL, nisi punctum D. Ergo D circuli ABC est centrum. Si igitur intra circulum sumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant plures quàm duæ rectæ lineæ æquales; punctum, quod sumitur circuli centrum erit.

Corol. I. huius.

A L I T E R.

Sumatur enim intra circulum ABC punctum aliquod D: atque à puncto D in circulum A B C cadant plures quàm duæ rectæ lineæ æquales DA DB DC. Dico punctum D, quod sumitur, circuli ABC esse centrum. non enim, sed si fieri potest, sit E, et iuncta DE in FG producat. ergo FG diameter est ABC circuli. itaque quoniam in FG diametro circuli ABC sumptum est aliquod punctum D, quod non est centrum circuli; maxima quidem erit DG, maior autem DC quàm DB, et DB quàm DA maior. Sed et æquales, quod fieri non potest. non igitur E centrum est circuli ABC. Similiter ostendemus neque aliud punctum centrum esse præter ipsum D. ergo D circuli ABC centrum erit. quod oportebat demonstrare.

7. huius.

THEOREMA IX. PROPO. X.

Circulus circulum in pluribus, quàm duobus punctis non secat.

Si enim fieri potest, circulus ABC circulum DEF secet in pluribus punctis, quàm duobus, videlicet in B G H F: et iunctæ BG BH bifariam secentur in KL. atque à punctis KL ipsis BG BH ad rectos angulos ductæ KC LM in puncta AE producantur. quoniam igitur in circulo ABC quædam recta linea AC rectam lineam quandam BH bifariam et ad angulos rectos secat, in ipsa AC circuli ABC erit centrum. rursus quoniam in eodē circulo ABC quædam recta linea NX rectam lineam quandam BG bifariam secat, et ad rectos angulos; in ipsa NX centrum erit circuli. ostensum autem est et in ipsa AC centrum esse, et in nullo alio puncto conveniunt inter se rectæ lineæ AC NX, præterquàm in O. ergo O circuli ABC est centrum. Similiter ostendemus punctum O centrum esse circuli DEF. ergo duorum circulorum se se secantium ABC DEF. idem erit centrum O. quod fieri non potest. non igitur circulus circulum secat in pluribus punctis, quàm duobus.

Corol. I. huius.

5. huius.

A L I T E R.

Circulus enim ABC rursus circulum DEF secet in pluribus punctis, quàm duobus; nempe in B G F H, et circuli A B C centrum sumatur, quod sit K; et KB KG KF iungantur. quoniam igitur intra circulum DEF sumptum est aliquod punctum K, à quo in circulum DEF incident plures, quàm duæ rectæ lineæ KB KG KF; erit punctum K circuli DEF centrum. est autem et circuli ABC centrum K. duorum igitur circulorum, qui se se secant, idem erit K centrum, quod fieri non potest. quare circulus circulum in pluribus, quàm duobus punctis non secat, quod oportebat demonstrare.

THEOREMA X. PROPOSITIO. XI.

Si duo circuli se se intus contingant, et sumantur centra ipsorum

L rum

rum; recta linea ipsorum centra coniungens, et producta in circuitum contactum cadet.

10. primi. Duo enim circuli ABC ADE se se intus contingant in puncto A, et sumatur circuli quidem ABC cetrum, quod sit F, circuli vero ADE cetrum G. Dico rectam lineam à puncto G ad F ductam, si producat in punctum A cadere. Non enim, sed si fieri potest, cadat ut FG DH. et AF AG iungantur. Itaque quoniam AG GF maiores sunt, quam FA, hoc est quam FH, communis auferatur FG. reliqua igitur AG maior est, quam reliqua GH. Sed AG est æqualis CD. ergo CD ipsa GH est maior, minor maiore, quod fieri non potest. Non igitur à puncto F ad G ducta recta linea extra contactum A cadet. quare in ipsum cadat necesse est. Si igitur duo circuli se se intus contingant, recta linea ipsorum centra coniungens, si producat in contactum circuitum cadet. quod oportebat demonstrare.

A L I T E R.

10. primi. Sed cadat ut GFC, et producat in directum CF. G ad punctum H: iunganturque AG AF. Quoniam igitur AG GF maiores sunt quam AF, et AF est æqualis FC, hoc est ipsi FH, communis auferatur FG. reliqua igitur AG reliqua GH est maior: hoc est DG maior ipsa GH, minor maiore, quod fieri non potest. Similiter et si extra circuitum paruum sit cetrum maioris circuli, idem sequi absurdum ostendemus.

THEOREMA XI. PROPOSITIO XII.

Si duo circuli se se extra contingant, recta linea ipsorum centra coniungens per contactum transibit.

20. primi. Duo enim circuli ABC ADE se se extra contingant in puncto A; et sumatur circuli quidem ABC cetrum, quod sit F: circuli vero ADE cetrum G. Dico rectam lineam, quæ à puncto F ad G ducitur, per contactum A transire. Non enim sed si fieri potest, cadat, ut FCDG: et FA AG iungantur. Quoniam igitur F cetrum est circuli ABC, erit AF æqualis FC. Rursus quoniam G cetrum est ADE circuli, erit AG ipsi GD æqualis. ostensa est autem et AF æqualis FC. sunt igitur FA AG ipsi FC DG æquales. ergo tota FG maior est, quam FA AG. Sed et minor, quod fieri non potest. Non igitur à puncto F ad G ducta recta linea per contactum A non transibit. quare per ipsum transeat necesse est. Si igitur duo circuli se se extra contingant, recta linea ipsorum centra coniungens per contactum transibit. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XII. PROPOSITIO XIII.

Circulus circulum non contingit in pluribus punctis, quam vno, siue intus, siue extra contingat.

Si

Si enim fieri potest, circulus ABDC circumulum EBF D contingat primum intus in pluribus punctis, quàm vno, videlicet in BD: et sumatur circuli quidē ABDC centrum G; circuli vero EBF D centrum H: ergo recta linea, quæ à puncto G ad H ducitur, in puncta BD cadet. cadat vt BGHD. et quoniam G centrum est circuli ABDE, erit BG ipsi GD æqualis. maior igitur est B G, quàm HD: et BH quàm HD multo maior. Rursus quoniam H centrum est EBF D circuli, æqualis est BH ipsi HD. atqui ostensa est ipsa multo maior, quod fieri non potest. non igitur circulus circumulum intus contingit in pluribus punctis, quàm vno. Dico etiam neque extra contingere. Si enim fieri potest, circulus ACK circumulum ABDC extra cōtingat in pluribus pñctis, quàm vno, videlicet in AC, et AC iungatur. Itaque quoniam in circumferentia vtrorumque circulorum ABDC ACK sumpta sunt duo quæuis puncta A C; recta linea, quæ ipsa coniungit intra vtrumque cadet. Sed in tra circumulum quidem ABDC cadit, extra circumulum vero ACK, quod est absurdum. non igitur circulus circumulum extra cōtingit in pluribus punctis, quàm vno. ostensum autem est neque intus contingere. circulus igitur circumulum non contingit in pluribus punctis; quàm vno, siue intus, siue extra contingat. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XIII. PROPOSITIO XIII.

In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter à centro distant, et quæ æqualiter à centro distant; inter se sunt æquales.

Sit circulus ABDC, et in ipso æquales rectæ lineæ AB C D. Dico eas à centro æqualiter distare. Sumatur enim circuli ABDC centrum, quod sit E, et ab ipso ad AB CD perpendiculares ducantur EF EG, et AE EC iungantur. Quoniam igitur recta linea quædam per centrum ducta EF rectam lineam quandam AB non ductam per centrum ad rectos angulos secat, et bifariam ipsam secabit. quare AF est æqualis FB, ideoq; AB ipsius AF dupla. Eadem ratione et C D dupla est CG. atque est AB ipsi CD æqualis. æqualis igitur et AF ipsi CG. Et quoniam AE est æqualis EC, erit et quadratum ex AE quadrato ex EC æquale. Sed quadrato quidem ex AE æqualia sunt ex AF FE quadrata, rectus enim angulus est ad F: quadrato autem ex EC æqualia sunt quadrata ex EG GC, cum angulus ad G sit rectus. Quadrata igitur ex AF FE æqualia sunt quadratis ex CG GE, quorum quadratum ex AF quadrato ex CG est æquale, etenim æqualis est AF ipsi CG. reliquum igitur, quod sit ex FE quadratum æquale est reliquo, quod ex EG; ac propterea FE ipsi EG est æqualis. in circulo autem æqualiter distare à centro rectæ lineæ dicuntur, quando à centro ad ipsas perpendiculares ductæ æquales sunt. ergo AB CD à centro æqualiter distant. Sed AB CD æqualiter distant à centro, hoc est æqualis sit FE ipsi EG. Dico AB ipsi CD æqualem esse. Iisdem enim cōstructis, similiter ostēdemus AB duplicem esse ipsius AF, et CD duplicem ipsius CG. Et quoniam æqualis est A E ipsi EC, erit et ex AE quadratū quadrato ex EC æquale. Sed quadrato quidē ex A E æqualia sunt quadrata ex EF FA: quadrato autē ex EC æqualia quadrata ex EG G C. quadrata igitur ex EF FA quadratis ex EG GC æqualia sunt. quorum quadratū ex EG æquale est quadrato ex EF; est enim EG ipsi EF æqualis reliquum igitur ex AF quadratū æquale est reliquo ex CG. ergo AF ipsi CG est æqualis, atque est AB ipsius AF dupla, et CD dupla ipsius CG. quare AB ipsi CD æqualis erit. In circulo.

3. huius.

47. primi.

EVLID. ELEMENT.

igitur æquales rectæ lineæ æqualiter à centro distant, et quæ æqualiter à centro distant, inter se sunt æquales. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XIII. PROPOSITIO. XV.

In circulo maxima quidem est diameter; aliarum vero semper propinquior ei, quæ per centrum transit, remotiore maior est.

Sit circulus ABCD, cuius diameter AD; centrum E; et propinquior quidem diametro AD sit BC; remotior vero FG. Dico AD maximam esse, et BC maiorem quam FG. Ducantur enim à centro ad BC FG perpendiculares EH EK. Et quoniam BC propinquior est ei, quæ per centrum transit, remotior autem FG; erit EK, quam EH maior. ponatur ipsi EH æqualis EL, et per L ipsi EK ad rectos angulos ducta LM, in N producatur, et iungantur E M EN EF EG. Quoniam igitur EH est æqualis EL, erit et BC ipsi MN æqualis. Rursum quoniam æqualis est AE ipsi EM, et DE ipsi EN, erit et AD ipsis ME EN æqualis. Sed ME EN maiores sunt, quam MN. ergo et AD maior est quam MN. at MN est æqualis BC. est igitur AD quam BC maior. Quod cum duæ EM EN duabus FE EG æquales sint, angulusq; MEN maior angulo FEG, et basis MN basi FG maior erit. ostensa autem est MN æqualis BC. ergo et BC quam FG est maior. Maxima igitur est AD diameter, et BC maior, quam FG. Quare in circulo maxima est diameter, aliarum vero semper propinquior ei, quæ per centrum transit remotiore est maior. quod demonstrare oportebat.

Ex anteceden-
te.

24. primi.

THEOREMA XV. PROPOSITIO XVI.

Quæ diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducitur, cadit extra circulum: et in locum qui inter rectam lineam, et circumferentiam interijcitur altera recta linea non cadet: et semicirculi angulus omni angulo acuto rectilineo maior est; reliquus autem minor.

Sit circulus ABC circa centrum D, et diametrum AB. Dico rectam lineam, quæ à puncto A ipsi AB ad rectos angulos ducitur extra circulum cadere. non enim, sed si fieri potest, cadat intus, ut AC, et DC iungatur. Itaque quoniam æqualis est DA ipsi DC, erit et angulus DAC angulo ACD æqualis. rectus autem est DAC. ergo et ACD est rectus; ac propterea anguli DAC ACD duobus rectis æquales sunt. quod fieri non potest. Non igitur à puncto A ipsi BA ad rectos angulos ducta cadet intra circulum. Similiter ostendemus neque in circumferentiam cadere, extra igitur cadat necesse est. cadat ut AE. Dico in locum, qui inter rectam lineam AE, et circumferentiam CHA interijcitur, alteram rectam lineam non cadere. Si enim fieri potest, cadat ut FA, et à puncto D ad FA perpendicularis ducatur DG. Et quoniam rectus est angulus ACD, minor autem recto DAG, erit AD quam DG maior, æqualis autem est DA ipsi DH. maior igitur est DH ipsa DG, minor maiore, quod fieri non potest. Non igitur in locum, qui inter rectam lineam, et circumferentiam interijcitur, altera recta linea cadet. Dico præterea angulum semicirculi, qui recta

5. primi.

17. primi.

29. primi.

linea

linea BA, et circumferentia CHA continetur, omni angulo acuto rectilineo maiorem esse; reliquum vero contentum circumferentia CHA, et recta linea AE omni angulo acuto rectilineo esse minorem. Si enim est aliquis angulus rectilineus maior quidem contento recta linea BA, et CHA circumferentia, minor autem contento CHA circumferentia, et recta linea AE, in locum, qui inter circumferentiam CHA, et rectam lineam AE interjicitur, cadet aliqua recta linea, quæ faciet angulum maiorem quidem contento recta linea BA, et CHA circumferentia, qui scilicet rectis lineis continetur, minorem vero contento circumferentia CHA, et AE recta linea. non cadit autem. non igitur erit angulus acutus, qui rectis lineis continetur, maior angulo contento recta linea BA, et CHA circumferentia, neque minor contento circumferentia CHA, et AE recta linea.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum est, rectam lineam, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, circumulum contingere: et rectam lineam contingere circumulum in vno tantum puncto, quoniam quæ occurrit in duobus punctis intra ipsū cadit, ut ostensum est.

PROBLEMA II. PROPOSITIO XVII.

A dato puncto rectam lineam ducere, quæ datum circumulum contingat.

Sit datum quidem punctum A, datus autem circumulus BCD. oportet à puncto A rectam lineam ducere, quæ circumulum BCD contingat. Sumatur enim centrum circuli E; et iuncta AE, centro quidem E, intervallo autem EA circumulus AFG describatur: et à puncto D ipsi EA ad rectos angulos ducatur DF: iunganturq; EBF AB. Dico à puncto A ductam esse AB, quæ circumulum BCD contingit. Quoniam enim E centrum est circumulorum BCD AFG, erit EA æqualis EF, et ED ipsi EB. Duæ igitur AE EB duabus FE ED æquales sunt, et angulum communem continent, qui est ad E. ergo basis DF basi AB est equalis; triangulumq; DEF æquale triangulo EBA, et reliqui anguli reliquis angulis. equalis igitur est angulus EBA angulo EDF. et EDF rectus est. quare et rectus EBA: atque est EB ex centro. quæ autem diametro circuli ab extremitate ad rectos angulos ducitur, circumulum contingit. ergo AB contingit circumulum. A dato igitur puncto A ducta est recta linea AB, quæ circumulum BCD contingit. quod facere oportebat.

4. primi.

Ex antecede.

THEOREMA XVI. PROPOSITIO XVIII.

Si circumulum contingat quædam recta linea, à centro autem in contactum recta linea ducatur, ea ad contingentem perpendicularis erit.

Circulum enim ABC contingat quædam recta linea DE in puncto C: et circuli ABC centrū sumatur F, à quo ad C ducatur FC. Dico FC ad ipsam DE perpendiculariorem esse. Si enim non ita sit, ducatur à puncto F ad DE perpendicularis FG. Quoniam igitur angulus FGC rectus est, erit GCF acutus; ac propterea FGC angulus maior angulo FCG. maiorem autem

12. primi.

19. primi.

angulum

EVLID. ELEMENT.

angulum maius latus subtendit. maior igitur est FC, quàm FG. æqualis autem FC ipsi FB. ergo FB ipsa FC est maior, minor maiore, quod fieri non potest. non igitur FG est perpendicularis ad DE. Similiter ostendemus neque aliam quampiam esse præter ipsam FC. ergo FC ad DE est perpendicularis. Si igitur circulum contingat quædam recta linea, à centro autem in contactum recta linea ducatur, ea ad contactum perpendicularis erit. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO XIX.

Si circulum contingat quædam recta linea, à contactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea ducatur; in ea circuli centrum erit.

Circulum enim ABC contingat quædam recta linea DE in C, et à puncto C ipsi DE ad rectos angulos ducatur CA. Dico in ipsa AC circuli centrum esse. Non enim, sed si fieri potest, sit F centrum; et iungatur CF. Quoniam igitur circulum ABC contingit quædam recta linea DE, et à centro ad contactum ducta est FC; erit FC ad ipsam DE perpendicularis. rectus igitur angulus est FCE. est autè et ACE rectus. ergo FCE angulus est æqualis angulo ACE, minor maiori, quod fieri non potest. Non igitur F centrum est ABC circuli. Similiter ostendemus neque aliud aliquod esse, præterquam in ipsa AC. Quare si circulum contingat quædam recta linea, à contactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea ducatur; in ea circuli centrum. quod demonstrare oportebat.

SCHOLIUM.

CONVERSUM. Si circulum contingat quædam recta linea, à contactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea extra circumlum ducatur; producta ad eas partes, in quibus est circulus in circuli centrum cadet.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XX.

In circulo angulus, qui ad centrum duplus est eius, qui ad circumferentiam, quando circumferentiam eandem pro basi habeat.

Sit circulus ABC, ad cuius centrum quidem angulus sit BEC, ad circumferentiam vero BAC, et eandem circumferentiam BC pro basi habeant. Dico BEC angulum anguli BAC duplum esse. Iungatur enim AE et ad F producat. Itaque quoniam EA est æqualis EB, erit et angulus EAB angulo EBA æqualis. anguli igitur EAB EBA dupli sunt ipsius anguli EAB. Sed angulus BEF est æqualis angulis EAB EBA. ergo BEF angulus anguli EAB est duplus. Eadem ratione et angulus FEC duplus est ipsius EAC. totus igitur BEC totius BAC duplus erit. Rursus insciatur, et sit alter angulus BDC, iunctaq; DE ad G producat. Similiter ostendemus angulum GEC anguli EDC duplum esse; quorum GEB duplus est ipsius EDB. ergo reliquus BEC reliqui BDC est duplus

s. primi.

g. primi.

plus. In circulo igitur angulus, qui ad centrum duplus est eius, qui ad circumferentiam, quando circumferentia eandem pro basi habeant. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIUS.

Illud quoque verum est, spacium quod est ad centrum duplum esse anguli, qui ad circumferentiam, quando circumferentiam eandem pro basi haberint.

Sit enim circulus ABC , cuius centrum E . Dico spacium BEC quod est ad centrum duplum esse anguli EAC . iuncta enim AE , & ad D producta, iunctisque BD DC , similiter demonstrabitur angulus BED anguli BAE duplus, et angulus CED duplus anguli CAE , totum igitur spacium BEC quod est ad centrum, anguli BAC qui ad circumferentiam duplum erit. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XXI.

In circulo qui in eadem portione sunt anguli inter se æquales sunt.

Sit circulus $ABCDE$, & in eadem portione $BAED$ anguli sint BAD BED . Dico eos inter se æquales esse. Sumatur enim circuli $ABCDE$ centrum quod sit F ; iunganturque BF FD . & quoniam angulus quidem BFD est ad centrum, angulus vero BAD ad circumferentiam, & circumferentiam eandem pro basi habent BCD ; erit BFD angulus anguli BAD duplus. Eadem ratione angulus BFD duplus est etiam anguli BED . ergo angulus BAD angulo BED æqualis erit. In circulo igitur qui in eadem portione sunt anguli, inter se æquales sunt. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIUS.

Euclidis demonstratio congruit in maiore tantum circuli portione, nisi fortasse spacium quodcumque ad centrum pro angulo accipitur, ex ijs quæ nos proxime demonstravimus, possumus autem & hoc modo demonstrare.

Sint in portione $BAED$ circuli $ABCDE$, anguli BAD , & BED . Dico eos inter se æquales esse. Sit enim primum $BAED$ maior portio, ut in antecedenti figura sonatur, circuli centrum quod sit F ; & BF FD iungantur. quoniam igitur angulus BFD est ad centrum, angulus vero BAD ad circumferentiam, & eandem basin habent, nempe circumferentiam BCD ; erit angulus BFD anguli BAD duplus: & eadem ratione duplus quoque anguli BED . angulus igitur BAD angulo BED æqualis erit. Sit deinde $BAED$ portio minor: & iungantur BC AC EC DC . Itaque quoniam ex ijs, quæ proxime demonstravimus, angulus BAC est æqualis angulo BEC , itemque angulus CAD angulo CED ; erit et totus angulus BAD toti BED æqualis.

Ex antecedente.

ALITER.

Iungatur AE . erit angulus ABE æqualis angulo ADE . angulus autem AGB ad verticem angulo EGD est æqualis. ergo & reliquus angulus BAD reliquo BED æqualis erit. In circulo igitur

Ex demonstratis.
13. primi.

igitur, qui in eadem portione sunt anguli, inter se æquales sunt, quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XX.

PROPO. XXII.

Quadrilaterorum, quæ in circulis describuntur, anguli oppositi duobus rectis æquales sunt.

Sit circulus ABCD, et in ipso quadrilaterum ABCD. Dico angulos ipsius oppositos duobus rectis æquales esse. Iungantur AC BD. Quoniam igitur omnis trianguli tres anguli duobus rectis sunt æquales, erunt trianguli ABC tres anguli GAB, ABC, BCA æquales duobus rectis. Sed angulus CAB est æqualis angulo BDC, in eadem enim sunt portione BADC, et angulus ACB æqualis ipsi ADB, quod sint in eadem ADCB portione. totus igitur angulus ADC angulis BAC ACB est æqualis. communis apponatur ABC angulus duobus angulis, qui sunt ad A et C, et seorsum vni angulo, qui est ad D; erunt anguli ABC BAC ACB angulis ABC ADC æquales. Sed ABC BAC ACB sunt æquales duobus rectis. ergo et anguli ABC ADC duobus rectis æquales erunt. Similiter ostendemus angulos quoque BAD DCB duobus rectis esse æquales. Quadrilaterorum igitur, quæ in circulis describuntur, anguli oppositi duobus rectis æquales sunt. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO. XXIII.

In eadem recta linea duæ circulorum portiones similes et inæ-

* quales ex eadem parte non constituuntur.

Si enim fieri potest, in eadem recta linea AB duæ circulorum portiones similes, et inæquales constituentur ex eadem parte ACB ADB; ducaturq; ACD, et CB BD iungantur. Itaque quoniam portio ACB similis est portioni ADB, similes autem circulorum portiones sunt, quæ angulos suscipiunt æquales; erit ACB angulus æqualis angulo ADB, exterior interiori, quod fieri non potest. Non igitur in eadem recta linea, duæ circulorum portiones similes, et inæquales ex eadem parte constituentur. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIUS.

* Ex eadem parte. ἐκ τῆς αὐτῆς μερὸς.

In vetusto codice hæc non leguntur, quamquam ad demonstrationem necessaria sint, tamen neutra ex parte similes, & inæquales circulorum portiones constitui possunt in eadem recta linea. Si enim fieri potest, in eadem recta linea AB constituatur ex altera parte portio AEB similis, & inæqualis portioni ACB. Intelligatur autem ex eadem parte portio AFB similis & æqualis ipsi ACB; & ducta AFE, iunctisq; FB BE, similiter demonstrabitur angulus AFB æqualis an-

gulo

gulo AEB , exterior interiori, quod fieri non potest. Non igitur in eadem recta linea similes & inæquales circuli portiones constituantur, quod demonstrandum fuerat.

THEOREMA XXII. PROPOSITIO. XXIII.

In æqualibus rectis lineis similes circuli portiones inter se æquales sunt.

Sint enim in æqualibus rectis lineis AB CD similes circuli portiones AEB CFD . Dico portionem AE B portioni CFD æqualem esse. congruente enim AEB portione portioni CFD , et posito puncto quidem A in C , recta vero linea AB in CD ; congruet et B punctum puncto D , propterea quod AB ipsi CD sit æqualis. congruente autem recta linea AB rectæ CD , congruet et A EB portio portioni CFD . Si. n. AB congruet ipsi CD , portio autē AEB portioni CFD non congruet, sed permutabitur, ut CGD , circulus circulum in pluribus quam duobus punctis secabit. etenim circulus CGD circulum CFD secat in pluribus punctis, quam duobus, videlicet in punctis CGD , quod rursus fieri non potest. Non igitur congruente recta linea AB rectæ CD , non congruet et ACB portio portioni CFD . quare congruet et ipsi æqualis erit. In æqualibus igitur rectis lineis similes circuli portiones inter se æquales sunt, quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIUS.

Si enim AB congruet ipsi C D ; portio autem AEB portioni CFD non congruet, sed permutabitur, ut CGD , et reliqua.

Si enim AB recta linea ipsi CD congruente, portio AEB portioni CFD non congruet, circumferentia eius vel extra ipsam AEB cadit, vel intra, vel partim extra partim intra, cadat primum extra, vel intra. ergo in eadem recta linea duae circuli portiones similes & inæquales ex eadem parte constituentur, quod fieri non posse in antecedente demonstratum est. cadat deinde partim extra, partim intra, ut CGD . circulus igitur circulum in pluribus quam duobus punctis secabit, quod idem fieri non potest, ex decima huius. Euclides autem primum casum velut nimis perspicuum omisisse videtur.

Sed & cuiusque predictorum contrarium etiam verum est, quod ita demonstrari potest.

In eadem recta linea, vel in æqualibus rectis lineis æquales circuli portiones similes sunt.

Si enim fieri potest, sint primum in eadem recta linea AC portiones ABC AEC æquales, sed tamen dissimiles: necesse erit circumferentiam AEC neque congruere circumferentiæ ABC , alioqui & æquales essent & similes: neque extra, vel intra ipsam cadere. æquales enim non essent. quare relinquitur ut partim intra, partim extra

tra cadat. quod si ita sit, circulus circulum in pluribus, quam duobus punctis secabit. quod fieri non potest. Similiter demonstrabitur neque ex altera parte, neque in aequalibus rectis lineis constitui posse aequales & dissimiles circulorum portiones; nempe altera portione alteri aptata; ut superius dictum est. In eadem igitur recta linea vel in aequalibus rectis lineis aequales circulorum portiones similes sint. quod demonstrare oportebat.

PROBLEMA III. PROPOSITIO XXV.

Circuli portione data describere circulum, cuius ea portio est.

23. primi. 6. primi. Sit data circuli portio ABC. itaque oportet portionis ABC describere circulum, cuius est portio. Secetur AC bifariam in D: et à puncto D ipsi AC ad rectos angulos ducatur DB; et AB iungatur. vel igitur angulus ABD maior est angulo BAD, vel minor, vel ipsi æqualis. Sit primum maior et ad rectam lineam BA, atque ad datum in ea punctum A constituatür angulus BAE æqualis angulo ABD; et DB ad E producatür, iungaturq; EC. Quoniam igitur angulus ABE est æqualis angulo BA E, erit et BE recta linea ipsi EA æqualis. et quoniam AD est æqualis D C, communis autè DE, duæ AD DE duabus CD DE æquales sunt; altera alteri; et angulus ADE æqualis angulo CDE, rectus. n. vterque est. ergo et basis AE basi EC est æqualis. Sed ostensa est AE æqualis EB. quare et BE ipsi EC est æqualis, ac propterea tres rectæ lineæ AE EB EC inter se æquales sunt. centro igitur E, intervallo autem vna ipsarum AE EB EC circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta, et circulus descriptus erit. Quare circuli portione data descriptus est circulus; cuius ea portio est. Sed et illud constat, portionem ABC semicirculo minorem esse; propterea quod centrum ipsius extra cadit. Similiter et si angulus ABD sit æqualis angulo BAD, facta AD æquali vtrique ipsarum BD DC, erunt tres rectæ lineæ AD DB DC inter se æquales, atque erit D circuli descripti centrum, et portio ABC semicirculus. Si vero angulus ABD minor sit angulo BAD, constituetur ad rectam lineam BA, & ad punctum in ea datum A, angulo ABD æqualis angulus intra portionem ABC. erit centrum in ipsa DB, atque erit ABC portio semicirculo maior. Circuli igitur portione data descriptus est circulus, cuius portio est. quod facere oportebat.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXVI.

In æqualibus circulis æquales anguli æqualibus insistant circūferentijs, siue ad centra, siue ad circumferentias insistant.

Sint æquales circuli ABC DEF, & in ipsis æquales anguli ad centra quidem BGC EHF, ad circumferentias vero BAC EDF. Dico BKC circumferentiam circumferentiæ ELF æqualem esse. Iungantur enim BC EF. Et quoniam æquales sunt ABC DEF circuli, erunt et quæ ex cætris æquales. duæ igitur

BC GC duabus FH, HF æquales sunt: & angulus ad G æqualis angulo ad H. Ergo et basis BC basi EF est æqualis. Rursus quoniam æqualis est angulus ad A angulo ad D, portio BAC similis erit portioni EDF. et sunt in æqualibus rectis lineis BC EF. quæ autem in æqualibus rectis lineis similes sunt circularum portiones inter se æquales sunt. portio igitur BAC portioni EDF est æqualis. Sed et totus ABC circulus æqualis est toti DEF. ergo et reliqua circumferentia BKC reliquæ ELF æqualis erit. In æqualibus igitur circulis æquales anguli æqualibus insistant circumferentiis, siue ad centra siue ad circumferentias insistant. quod oportebat demonstrare.

4. primi.
Diffi. II.
24. huius.

F. C. COMMENTARIUS.

Similiter demonstrabitur in eisdem circulis, & propositio magis vniuersalis erit hoc modo.
In eisdem vel æqualibus circulis æquales anguli æqualibus insistant circumferentiis, siue ad centra, siue ad circumferentias insistant.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO. XXVII.

In æqualibus circulis anguli, qui æqualibus insistant circumferentiis inter se æquales sunt; siue ad centra, siue ad circumferentias insistant.

In æqualibus enim circulis ABC DEF, æqualibus circumferentiis BC EF insistant anguli ad centra quidem BGC EHF, ad circumferentias vero BAC EDF. Dico angulum BGC angulo EHF, et angulum BAC angulo EDF æqualem esse. Si quidem igitur angulus BGC æqualis sit angulo EHF, manifestum est angulum quoque BAC angulo EDF esse æqualem. Sin minus, unus ipsorum est maior. sit maior BGC, et constituatur ad rectam lineam BC, et ad punctum in ipsa G angulo EHF æqualis angulus BCK. æqualis autem anguli æqualibus insistant circumferentiis, quando ad centra fuerint. Ergo circumferentia BK æqualis est circumferentiæ EF. Sed circumferentia EF æqualis est ipsi BC. ergo et BK ipsi BC est æqualis, minor maiori, quod fieri non potest. Non igitur inæqualis est angulus BGC angulo EHF. ergo est æqualis. atque est anguli quidem BGC dimidius angulus qui ad A; anguli vero EHF dimidius qui ad D. angulus igitur qui ad A angulo qui ad D est æqualis. In æqualibus igitur circulis anguli, qui æqualibus insistant circumferentiis inter se æquales sunt siue ad centra, siue ad circumferentias insistant. quod oportebat demonstrare.

23. primi.
Ex antecedentibus.

F. C. COMMENTARIUS.

Eadem demonstratio erit, si anguli æqualibus circumferentiis eisdem circuli insistant, ut propositio magis vniuersalis fiat, hoc pacto.
In eisdem vel æqualibus circulis anguli, qui æqualibus insistant circumferentiis inter se æquales sunt, siue ad centra, siue ad circumferentias insistant.

THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXVIII.

In æqualibus circulis æquales rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, maiorem quidem maiori, minorem vero minori.

EVCLID. ELEMENT.

Sint æquales circuli ABC DEF; et in ipsis æquales rectę lineę BC EF, quę circumferentias quidem BAC EDF maiores auferant, circumferentias vero BGC EHF minores. Dico circumferentiam BAC maiorem maiori circumferentia EDF, et minorem circumferentiam BGC minori EHF æqualem esse. Sumatur enim centra circulorum K L, iunganturq; BK KC EL LF. Et quoniam circuli æquales sunt, erunt et quę ex centris æquales. duę igitur BK KC sunt æquales duabus EL LF: et basis BC æqualis est basi EF. Ergo angulus BKC angulo ELF est æqualis: æquales autem anguli equalibus insunt circumferentiis, quando ad centra fuerint. quare circumferentia BGC æqualis est circumferentia EHF. Sed et totus ABC circulus toti DEF est æqualis. reliqua igitur circumferentia BAC relique EDF æqualis erit. Ergo in æqualibus circulis æquales rectę lineę circumferentias æquales auferunt, maiorem quidem maiori, minorem vero minori. quod demonstrare oportebat.

1. huius.
Diffi. 1.
8. primi.
16. huius.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO XXIX.

In æqualibus circulis, æquales circumferentias æquales rectę lineę subtendunt.

Sint æquales circuli ABC DEF: et in ipsis æquales assumantur circumferentię BGC EHF: et BC EF iungantur. Dico rectam lineam B C rectę EF æqualem esse. Sumentur enim centra circulorum K L, et iungantur BK KC EL LF. quoniam igitur circumferentia BGC

1. huius.

16. huius.
Diffi. 1.
4. primi.

est æqualis circumferentia EHF, erit et angulus BKC angulo ELF æqualis. Et quoniam circuli ABC DEF sunt æquales, et quę ex centris æquales erunt. duę igitur BK KC sunt æquales duabus EL LF; et æquales angulos continent. quare basis BC basi EF est æqualis. In æqualibus igitur circulis æquales circumferentias æquales rectę lineę subtendunt. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIUS.

Non aliter etiam in duabus antecedentibus cum demonstrationes eędem sint, propositiones magis unięersales fieri poterunt, in hunc modum.

In eisdem vel æqualibus circulis æquales rectę lineę circumferentias æquales auferunt, maiorem quidem maiori, minorem vero minori.

In eisdem vel æqualibus circulis æquales circumferentias æquales rectę lineę subtendunt.

Sed cę harum quoddammodo conuersas, atque alias his non dissimiles demonstrare hoc loco non inutile arbitrati sumus.

PROPOSITIONES.

Si æquales rectę lineę æquales, et similes circumferentias auferant, circuli æquales erunt, quorum illę sunt circumferentia.

Si enim

Si enim fieri potest, sint circuli inæquales, & in maiori circulo AEC , circa idem centrum G æqualis minori describatur DEF ; & iungatur AG GC DG GF , ita ut punctum F cadat in recta linea GC ; & AG secet circumulum DEF in H . Quoniam igitur rectæ lineæ AC DF æquales sunt, erit angulus AGC minor angulo DGF ; quod deinceps demonstrabitur. quare circumferentia HF minor erit circumferentia DF . Sed circumferentia HF similis est circumferentiae AC , ex 12 definitione huius. in ipsis enim idem angulus AGC consistit, ergo circumferentia DF circumferentiae AC non est similis. atqui similis ponebatur. quod est absurdum. non igitur circuli in æquales sunt. ergo æquales esse necessarian est. At vero angulum AGC minorem esse angulo DGF , ita demonstrabimus.

Intelligatur triangulum AGC seorsum, & triangulum DGF punctum D in A statuatur; & punctum F in C . sunt enim AC DF inter se æquales. cadet triangulum DGF intra triangulum AGC . quare ex 21 primi libri angulus AGC minor est angulo DGF . quod demonstrare oportebat.

PROPOSITIO. II.

In circulis inæqualibus æquales rectæ lineæ dissimiles circumferentias auferunt.

Hoc autem ex ijs, quæ nos proxime demonstrauius perspicue apparet. æquales enim rectæ lineæ AC DF dissimiles auferunt circumferentias.

PROPOSITIO. III.

In circulis inæqualibus similes circumferentias inæquales rectæ lineæ subtendūt.

Hoc sic similiter apparet ex ante demonstratis. repetatur enim eadem figura, & iungatur HF . Itaque quoniam triangulum DGF duo latera DG GF æqualia habet duobus lateribus HG GF trianguli HGF , & angulum DGF maiorem angulo HGF , erit basis DF basi HF maior. Sed recta linea AC est æqualis ipsi DF . ergo AC HF inæquales sunt, & similes circumferentias subtendūt. quod oportebat demonstrare.

PROPOSITIO IIII.

Similes et inæquales circumferentias inæquales rectæ lineæ subtendunt.

Si enim rectæ lineæ æquales sint, & circuli item æquales, erunt circumferentiae, quas subtendunt, & æquales & similes. Si vero circuli sint inæquales, circumferentiae dissimiles erunt. quod non ponitur. Similes igitur & inæquales circumferentias, inæquales rectæ lineæ subtendunt. quod demonstrare oportebat.

PROBLEMA XIII. PROPOSITIO. XV.

Datam circumferentiam bifariam secare.

Sit data circumferentia ADB . oportet ADB circumferentiam bifariam secare. Iungatur AB , & in C bifariam secetur: à puncto autem C ipsi AB ad rectos angulos ducatur CD , & iungantur AD DB . Quoniam igitur AC est æqualis CB , communis autem CD , duæ AC CD duabus

10. primi.

BC,

4. primi.
28. huius.

BC CD æquales sunt: et angulus ACD æqualis angulo BCD , rectus enim uterque est: ergo basis AD basi DB est æqualis. æquales autem rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, maiorem quidem maiori, minorem vero minori: et est utraque ipsarum AD DB circumferentiarum semicirculo minor. quare circumferentia AD circumferentia DB æqualis erit. data igitur circumferentia bifariam secta est. quod facere oportebat.

THEOREMA XXVII. PROPOSITIO XXXI.

In circulo angulus, qui in semicirculo rectus est, qui vero in maiori portione minor est recto, & qui in minori maior recto; & insuper maioris quidem portionis angulus recto maior est, minoris vero portionis angulus recto minor.

5. primi.

31. primi.

13. primi.

17. primi.

22. huius.

Sit circulus $A B C D$ cuius diameter $B C$, centrum autem E ; et iungantur $B A$ $A C$ $A D$ $D C$. Dico angulum quidem, qui est in semicirculo $B A C$ rectum esse; qui vero in portione $A B C$ maiore semicirculo, videlicet angulum $A B C$ minorem esse recto, et qui in portione $A D C$ minore semicirculo, hoc est angulum $A D C$ recto maiorem. iungatur $A E$, et $B A$ ad F producat. Itaque quoniam $B E$ est æqualis $E A$, erit et angulus $E A B$, angulo $E B A$ æqualis. Rursus quoniam $A E$ est æqualis $E C$, et angulus $A C E$ angulo $C A E$ æqualis erit. totus igitur angulus $B A C$ est æqualis duobus $A B C$ $A C B$ angulis. est autem et angulus $F A C$ extra triangulum $A B C$, duobus $A B C$ $A C B$ æqualis. angulus igitur $B A C$ est æqualis angulo $F A C$. ac propterea uterque ipsorum rectus. Quare in semicirculo $B A C$ angulus $B A C$ rectus est. et quoniam trianguli $A B C$ duo anguli $A B C$ $B A C$ duobus rectis sunt minores, rectus autem $B A C$, erit $A B C$ angulus recto minor, atque est in portione $A B C$ maiore semicirculo. Quod cum in circulo quadrilaterum sit $A B C D$, quadrilaterorum vero, qui in circulis describuntur, anguli oppositi duobus rectis sint æquales: erunt $A B C$ $A D C$ anguli æquales duobus rectis. et angulus $A B C$ minor est recto. reliquus igitur $A D C$ recto maior erit, atque est in portione $A D C$ minore semicirculo. Dico præterea maioris portionis angulum, qui continetur $A B C$ circumferentia et recta linea $A C$ recto maiorem esse; angulum vero minoris portionis contentum circumferentia $A D C$; et recta linea $A C$ recto minorem. quod quidem perspicue apparet. Quoniam enim angulus, qui rectis lineis $B A$ $A C$ continetur rectus est, erit et contentus $A B C$ circumferentia, et recta linea $A C$ recto maior. Rursus quoniam angulus contentus rectis lineis $C A$ $A F$ rectus est, erit qui continetur recta linea $C A$, et $A D C$ circumferentia minor recto. In circulo igitur angulus qui in semicirculo rectus est, qui vero in maiori portione minor est recto, et qui in minori maior recto. et insuper maioris quidem portionis angulus recto maior est: minoris vero recto minor. quod demonstrare oportebat.

ALITER demonstrabitur angulum $B A C$ rectum esse. Quoniam enim angulus $A E C$ duplus est anguli $B A E$, etenim duobus interioribus, et oppositis est æqualis: est autem et $A E B$ duplus ipsius $E A C$: anguli $A E B$ $A E C$ anguli $B A C$ dupli erunt. Sed et $A E B$ $A E C$ anguli duobus rectis sunt æquales. ergo angulus $B A C$ rectus est. quod demonstrare oportebat.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum est, si trianguli vnus angulus sit æqualis duobus

bus, eum rectum esse; propterea quod & qui deinceps est, iisdem est equalis. quando autem anguli deinceps sunt equales, necessario recti sunt.

S C H O L I V M.

Si semicirculi omnes ob similitudinem aequales angulos suscipiunt, nempe rectos, maiores autem portiones suscipiunt rectis minores, perspicuum est cum similes sint aequales suscipere angulos. quo enim maiores sunt semicirculis, eo rectum angulum diminuunt: similiter et minores semicirculis rectum proportionem augent. Ergo similes portiones aequales suscipiant angulos necesse est. portionum autem anguli, quod heterogenei sint, respectu rectilineorum, sunt enim mixti, cum illis non comparantur determinata magnitudine, nisi maioriata tantum, ut sic dicam, & minoriata. Quamobrem contingit maiore portione ad minorem procedente per medium circumulum, angulum ipsius maiorem simpliciter recto ad minorem procedere, & non per rectum. rectus enim magnitudo determinata est. Videbitur autem hoc admirabile esse, nam quae in contraria transmutantur, per media transire consueverunt. Sed et in alijs innuere licet hoc modo opposita absque medio. etenim quae circumulum comprehendit linea, cum conuexa sit, et caua, recta non est.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO XXXII.

Si circumulum contingat quaedam recta linea, a contactu autem in circumulum ducatur recta linea ipsum secans; anguli quos ad contingentem facit, aequales erunt ijs, qui in alternis circuli portionibus consistunt.

Circulum enim ABCD contingat quaedam recta linea EF in B, et a puncto B ad circumulum ABCD ducatur recta linea BD ipsum utcumque secans. Dico angulos, quos BD, cum EF contingente facit, equales esse ijs, qui in alternis circuli portionibus consistunt, hoc est angulum FBD esse aequalem angulo, qui constituitur in DAB portione, videlicet ipsi DAB; angulum vero EBD aequalem angulo DCB, qui in portione DCB constituitur. Ducatur enim a puncto B ipsi EF ad rectos angulos BA: et in circumferentia BD sumatur quod vis punctum C iunganturque AD DC CB. Quoniam igitur circumulum ABCD contingit quaedam recta linea EF in puncto B: et a contactu B ad rectos angulos contingentem ducta est BA: erit in ipsa BA centrum ABCD circuli, quare BA eiusdem circuli diameter est, et angulus ADB in semicirculo est rectus. reliqui igitur anguli BAD ABD vni recto equales sunt. Sed et ABF est rectus. ergo angulus ABF aequalis est angulis BAD ABD. communis auferatur ABD. reliquus igitur DBF ei, qui in alterna circuli portione consistit, videlicet angulo BAD est equalis. Et quoniam in circulo quadrilaterum est ABCD, et anguli eius oppositi aequales

ii. primi.

19. huius.
Ex antecede-
nte.
32. primi.

22. huius.

si æquales sunt duobus rectis; erunt DBF DBE angulis BAD BCD æquales. quorum BAD ostensus est aqualis ipsi DBF. ergo reliquus DBE ei, qui in altera circuli portione DCB constituitur, videlicet ipsi DCB æqualis erit. Si igitur circulum contingat quædam recta linea, a contactu vero in circulum ducatur recta linea ipsum secans; anguli, quos facit ad contingentem, æquales erunt iis, qui in alteris circuli portionibus consistunt. quod oportebat demonstrare.

PROBLEMA V. PROPOSITIO XXXIII.

In data recta linea describere portionem circuli, quæ suscipiat angulum dato angulo rectilineo æqualem.

23. primi.
11. primi.
10. primi.

4. primi.

Corol. 16. huius.

Ex antecede.

23. primi.

Corol. 16. huius.

23. primi.

23. primi.

Sit data recta linea AB, datus autem angulus rectilineus, qui ad C. itaque oportet in data recta linea AB describere portionem circuli, quæ suscipiat angulum æqualem angulo, qui est ad C. vel igitur angulus ad C acutus est, vel rectus, vel obtusus. Sit primum acutus, ut in prima figura, et ad rectam lineam AB, et ad punctum in ea datum A, constituatur angulus BAD angulo qui est ad C æqualis. acutus igitur angulus est BAD, et a puncto A ipsi AD ad rectos angulos ducatur AE; secetur autem AB bifariam in F, et a puncto F ducatur FG ad rectos angulos ipsi AB; et GB iungatur. Quoniam igitur AF est æqualis FB, communis autem FG, duæ AF FG duabus BF FG æquales sunt: et angulus AFC æqualis angulo GFB. ergo basis AG basi GB est æqualis. Itaque centro G, intervallo autem AG circulus descriptus transibit etiam per B, describatur et sit ABE, iungaturque EB. Quoniam igitur ab extremitate diametri AE, et a puncto A ipsi AE ad rectos angulos ducta est AD, ipsa AD circulum continget, et quoniam circulum ABE contingit quædam recta linea AD, et a contactu, qui est ad A in circulum ABE ducta est recta linea AB, erit angulus DAB æqualis angulo, qui in altera circuli portione constituitur, videlicet ipsi AEB. Sed angulus DAB angulo, qui ad C est æqualis. ergo et angulus ad C angulo AEB æqualis erit. In data igitur recta linea AB portio circuli descripta est AEB, suscipiens angulum AEB dato angulo, qui ad C æqualem. Sit deinde angulus, qui ad C rectus, et oporteat rursus in recta linea AB describere circuli portionem, quæ suscipiat angulum æqualem recto angulo, qui est ad C. constituatur enim rursus angulo recto, qui ad C æqualis angulus BAD, ut in secunda figura, seceturque AB bifariam in F, et centro F, intervallo autem alterutra ipsarum AF FB circulus describatur AEB, ergo AD recta linea circulum ABE contingit, propterea quod rectus est qui ad A angulus, et angulus BAD æqualis angulo, qui est in portione AEB. rectus enim et ipse est, in semicirculo consistens, sed BAD æqualis est ei qui ad C. Ergo et qui in portione AEB ei, qui ad C est æqualis. descripta igitur est rursus in AB recta linea, portio circuli AEB, suscipiens angulum angulo recto, qui ad C æqualem. Denique sit angulus ad C obtusus, et ad rectam lineam AB, et ad punctum A constituatur ipsi æqualis angulus BAD, ut hæt in tertia figura, et ipsi AD recta linea ad rectos angulos ducatur AE; seceturque rursus AB bifariam in F. ipsi vero AB ducatur ad rectos angulos FG, et CB iungatur. Et quoniam AF est æqualis FB, communis autem FG, duæ AF FG duabus BF FG æquales sunt, et angulus AFC angulo BFG æqualis.

lis.basis igitur AG est æqualis basi GB. Quare centro G, intervallo autem AG circulus descriptus etiam per B transibit.transseat vt AEB. Et quoniam diametro AE ab extremitate ad rectos angulos ducta est AD, ipsa AD circulum AEB continget: et à contactu, qui ad A ducta est AB. quare angulus BAD ei; qui in alterna circuli portione AHB constituitur est equalis. Sed BAD angulus æqualis est angulo, qui ad C. angulus igitur, qui in portione AHB angulo, qui ad C æqualis erit. Ergo in data recta linea AB descripta est AHB circuli portio, suscipiens angulum æquale ei, qui est ad C. quod facere oportebat.

4. primi.

Corol. 16. huius.

PROBLEMA VI. PROPOSITIO XXXIII.

A dato circulo portionem abscindere, quæ suscipiat angulum dato angulo rectilineo æqualem.

Sit datus circulus ABC: datus autem angulus rectilineus. qui ad D. oportet à circulo ABC portionem abscindere, quæ suscipiat angulum angulo qui ad D æqualem. Ducatur recta linea EF circulum ABC in puncto B contingens: et ad rectam lineam BF, et ad punctum in ea B constituitur angulus FBC angulo qui est ad D æqualis. Quoniam igitur circulum ABC contingit quædam recta linea EF in B puncto, et à contactu B ducta est BC, erit angulus FBC equalis ei, qui in alterna circuli portione constituitur. Sed FBC angulus angulo qui ad D est æqualis. ergo et angulus, qui in portione BAC angulo qui ad D æqualis erit. A dato igitur circulo ABC abscissa est portio quædam BAC suscipiens angulum dato angulo rectilineo, qui est ad D, æqualem. quod facere oportebat.

17. huius.

23. primi.

THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XXXV.

Si in circulo duæ rectæ lineæ se se mutuo secant rectangulum portionibus vnus contentum æquale est ei, quod alterius portionibus continetur.

In circulo enim ABCD duæ rectæ lineæ AC BD se se mutuo in puncto E secant. Dico rectangulum contentum AE EC equalis esse ei, quod DE EB continetur. Si igitur AC BD per centrum transeant, ita vt E sit cætrum ABCD circuli manifestum est æqualibus existentibus AE EC DE EB, et rectangulum contentum AE EC equalis esse ei, quod DE EB continetur. Itaque AC BD non transeant per centrum; et sumatur centrum circuli ABCD quod sit F: et ab F ad rectas lineas AC BD perpendiculares ducantur FG FH: iunganturq; FB FC FE. Quoniam igitur recta quædam linea GF per centrum ducta rectam lineam quandam AC non ductam per centrum ad rectos angulos secat, et bifariam ipsam secabit. quare AG ipsi GC est æqualis. Et quoniam recta linea AC secta est in partes æquales in puncto G, et in partes inæquales in E, erit rectangulum AE EC contentum vnâ cum ipsius EG quadrato, quale quadrato ex GC. commune addatur ex GF quadratum. ergo rectangulum AEC vnâ cum iis, quæ ex EG GF quadratis æquale est quadratis ex CG GF. Sed quadratis quidem ex EG

3. huius.

5. secundi.

N GF

47. primi.

GP æquale est quadratū ex FE: quadratis vero ex CG: GP æquale quod ex FC quadratum. rectangulum igitur AEC vnā cū quadrato ex FE æquale est quadrato ex FC: est autem CF æqualis FB. Ergo rectangulum AEC vnā cum quadrato ex EF æquale est ei, quod ex FB quadrato. Eadē ratione et rectangulum DEB vnā cū quadrato ex FE æquale est quadrato ex FB. ostensum autē est et rectangulum AEC vnā cum quadrato ex FE æquale ei, quod ex FB quadrato. ergo rectangulum AEC vnā cum quadrato ex FE æquale est rectangulo DEB vnā cum quadrato ex FE. commune auferatur quod ex FE quadratum. reliquum igitur rectangulum AEC reliquo DEB rectangulo æquale erit. Quare si in circulo duę rectę lineę se se mutuo secēt, rectangulū portionibus vnus cōtēntū æquale est ei, quod alterius portionibus continetur; id quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XXX. PROPOSITIO. XXXVI.

Si extra circulum aliquod punctum sumatur, et ab eo in circulum cadant duę rectę lineę, quarum altera quidem circulum secet, altera vero contingat; rectangulum, quod tota secante, et exterius assumpta inter punctum, et curuam circumferentiam continetur; æquale erit ei, quod à contingente fit quadrato.

Extra circulum enim ABC sumatur aliquod punctum D, et ab eo ad dictum circulum cadāt duę rectę lineę DCA DB: et DCA quidem circulum ABC secet; DB vero contingat. Dico rectangulum ADC quadrato, quod fit ex DB æquale esse. Vel igitur DCA per centrum transit, vel non transeat primum per centrum circuli ABC, quod sit F: et FB iungatur. erit angulus FBD rectus. Itaque quoniam recta linea AC bifariam secta est in F, et ipsi adiicitur CD; rectangulū ADC vnā cum quadrato, quod

18. huius,

6. secundi,

ex FC æquale erit ei, quod fit ex FD quadrato. æqualis autem est CF ipsi FB. ergo rectangulū ADC vnā cum quadrato quod ex FB æquale est quadrato ex FD. Sed quadratum ex FD est æquale quadratis ipsarum FB BD; rectus enim angulus est FBD. rectangulum igitur ADC vnā cum quadrato ex FB æquale est ipsarum FB BD quadratis. commune auferatur quadratū, quod ex FB. ergo reliquum ADC rectangulum quadrato quod fit à contingente DB æquale erit. Sed DCA non transeat per centrum ABC circuli: sumaturq; centrū E, et ab ipso E ad AC perpendicularis agatur EF: et iungantur EB EC ED. rectus igitur est EFD angulus. Et quoniam recta linea quędam EF per centrum ducta, rectam lineam quandam AC non ductam per centrum ad rectos angulos secat, et bifariam ipsam secabit. quare AF ipsi FC est æqualis. Rursus quoniam recta linea AC bifariam secta est in F, atque ipsi adiicitur CD, erit rectangulum ADC vnā cum quadrato ex FC æquale quadrato, quod ex FD. commune apponatur quod ex FE quadratum. rectangulum igitur ADC vnā cum

1. huius,

6. secundi,

cum

cum quadratis ex CF FE est æquale quadratis ex DF FE . sed quadratis quidem ex DF FE æquale est, quod ex DE quadrati; etenim rectus est angulus EDF quadratis vero ex CF FE æquale est quadratum ex CE . ergo rectangulum ADC unā cū quadrato, quod ex CE est æquale quadrato ex ED æqualis autem est CE ipsi EB . rectangulum igitur ADC unā cum quadrato ex EB æquale est ei, quod ex ED quadrato. sed quadrato ex ED æqualia sunt quadrata ex EB BD ; si quidem rectus est angulus EBD . ergo rectangulum ADC unā cū quadrato ex EB æquale est eis, quæ ex EB BD quadratis. commune auferatur quadratum ex EB . reliquum igitur ADC rectangulum quadrato, quod fit ex DB æquale erit. Si igitur extra circulum aliquod punctum sumatur, et quæ deinceps sunt, quod oportebat demonstrare.

P. C. COMMENTARIUS.

Ex proxime demonstratis duo corollaria sequuntur, ut et adnotavit Campanus. nempe hæc.

Si à puncto extra circulum sumpto ducatur in circulum quotcumque rectę lineę, ipsę secantes, rectangula quę totis secarum portionibus extrinsecis continentur, inter se æqualia sunt; quod singula quadrato lineę contingentis sint æqualia.

A puncto extra circulum sumpto ductę duę rectę lineę circulum contingentes inter se æquales sunt. etenim utriusque ipsarum quadrata sunt æqualia rectangulo, quod recta linea ab eodem puncto ducta, quę circulum secet, et eius portione extrinseca continetur. ergo et ipse lineę æquales sint necesse est. neque vero plures quam duę esse possunt, quod ex demonstratis in octavo huius perspicue apparet.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO. XXXVII.

Si extra circulum sumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant duę rectę lineę, quarum altera quidem circulum secet, altera vero incidat; sit autem quod tota secante, et exterius assumpta inter punctum, et curvam circumferentiam continetur, æquale ei, quod ab incidente fit quadrato: incidens linea circulum continget.

Extra circulum enim ABC sumatur aliquod punctum D , atque ab ipso in circulum cadant duę rectę lineę DC A DB ; et DCA quidem circulum secet, DB vero incidat, sitq; rectangulum ADC æquale quadrato, quod fit ex D B . Dico ipsam DB circulum ABC contingere. Ducatur enim recta linea DE contingens circulum ABC , et sumatur circuli ABC centrum quod sit F , iunganturq; FE FB FD . ergo angulus FED rectus est. Et quoniam DE circulum ABC contingit, secat autem DCA , rectangulum ADC æquale erit quadrato quod ex DE . sed rectangulum ADC ponitur æquale quadrato, quod ex DB . quadratum igitur quod ex DE quadrato ex DB æquale erit, ac propterea linea DE ipsi DB æqualis, est autem et FE æqualis FB . duę igitur DE EF duabus DB BF æquales sunt; et basis ipsarum communis FD . angulus igitur DEF est æqualis angulo DBF . rectus autem DEF . ergo et DBF est rectus; atque est FB producta diameter. quę vero ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur circulum contingit. ergo DB circulum ABC contingat necesse est. Similiter demonstrabitur et si centrum sit in ipsa AC . Si igitur extra circulum sumatur aliquod punctum, et reliqua, quod demonstrare oportebat.

18. huius.

8. primi.

TERTIUS LIBER IN FINIS.

E V C L I D I S E L E M E N T O R V M

LIBER QVARTVS

CVM SCHOLIIS ANTIQVIS,
ET COMMENTARIIS

Federici Commandini Vrbinatis.

DIFFINITIONES.

I.

IGVRA rectilinea in figura rectilinea describi dicitur, quādo vnus quisque figuræ descriptæ angulus vnūquodque latus eius, in qua describitur, contingit.

II.

Figura similiter circa figuram describi dicitur quando vnumquodque latus descriptæ vnumquemque angulum eius, circa quam describitur, contingit.

III.

Figura rectilinea in circulo describi dicitur, quando vnusquisque descriptæ figuræ angulus circuli circumferentiam contingit.

III.

Figura rectilinea circa circumulum describi dicitur, quando vnumquodque latus descriptæ circuli circumferentiā cōtingit.

V.

Circulus similiter in figura rectilinea describi dicitur, quando circuli circumferentia vnumquodque latus eius, in qua describitur, contingit.

Circulus

Circulus circa figuram rectilineam describi dicitur, quando circuli circumferentia vnumquemque angulum eius, circa quam describitur, contingit.

Recta linea in circulo aptari dicitur, quando eius extrema ad circuli circumferentiam se applicant.

PROBLEMA I.
PROPOSITIO I.

In dato circulo datæ rectæ lineæ, quæ diametro eius maior nō sit, æqualem rectam lineam aptare.

Sit datus circulus ABC , data autem recta linea non maior circuli diametro D . oportet in circulo ABC rectæ lineæ D æqualem rectam lineam aptare. Ducatur circuli ABC diameter BC . Si quidem igitur BC sit æqualis ipsi D , factum iam erit, quod proponebatur. etenim in circulo ABC aptata est AC rectæ lineæ D æqualis. Sin minus, maior est BC quàm D , ponaturq; ipsi D æqualis CE : et centro quidem C intervallo autem CE circulus describatur AEF : et CA iungatur.

Itaque quoniam punctum C centrum est AEF circuli; erit CA ipsi CE æqualis. Sed D est æqualis CE . ergo et D ipsi AC æqualis erit. In dato igitur circulo ABC datæ rectæ lineæ D , non maiori circuli diametro, æqualis aptata est AC . quod facere oportebat.

S C H O L I U M.

Cum varia sit circumscriptio, et inscriptionum contemplatio, Euclides non multum admodum progressus est. nam perueniens ad hexagonum, & postremo quindecagoni angulos tradens, qui ad astrorum scientiam magis pertinent, finem dicendi fecit. Primum autem theorema lemma quoddam est, pentagoni constitutioni inserviens: & quæcumque in hoc ordinantur, in illa præordinari oportebat. Sed quoniam simpliciores habet constructionem, quàm trianguli constitutio, iure merito ante alia theoremata positum est. Sciendum autem si quidem data recta linea diametro sit æqualis, uno tantum modo, vel etiam absque ulla experientia fieri problema. Si vero minor, duobus modis. ab eodem namque puncto ut C ad AF ductæ rectæ lineæ inter se æquales sunt.

Problema

Problema hoc est ex eorum numero, quae determinata appellantur. posset enim & hoc modo explicari.

In dato circulo data recte linea æqualem rectam lineam aptare, oportet autem datam rectam lineam diametro circuli non esse maiorem.

Licet etiam problema aliud absolvere huiusmodi.

In dato circulo rectam lineam rectę lineę datę, quę diametro maior non sit, æqua-
lem, et alteri datę parallelam aptare.

Sit datus circulus ABC, cuius centrum D, & recta linea non maior diametro circuli EF: altera vero recta linea sit, in qua G. Itaque oportet in circulo ABC aptare rectam lineam aequalem ipsi EF, & ipsi G parallelam. Ducatur per D recta linea ADC parallela ipsi G, quae circuli diameter erit. & si quidem AC sit equalis EF, factū iā erit quod proponebatur: si vero AC sit maior, quam EF, secetur EF bifariam in H: & ipsi HE aequalis abscindatur à semidiametro cir-

11. primi.

3.tertij.

14. tertij.

28. primi.

33. primi.

30 pri mi.

culi d. *A* quae fit DK. ipsi vero H F aequalis fiat DL; per q̃, p̃l̃cta KL ipsi AC ad rectos angulos ducantur MN OP; & MO iungatur. Quoniam igitur recta linea quaedam AC per centrum ducit rectam lineam MN non ducit per centrum ad rectos angulos secar; & bisariam ipsam secabit. quare MK est aequalis KN. Et ob eandem causam OL est aequalis LP. sunt autem MN OP inter se aequales, cum aequidistant a centro diffl̃t; & sint parallelae, anguli enim M K L O L K recti sunt. quare et earum dimidiae K M LO & aequales erunt, & parallelae. At quae aequales, & parallelas ad easdem partes coniungunt, ipsae aequales, et parallele sunt. ergo MO est aequalis KL, hoc est ipsi EF, & parallela ipsi G; sunt enim utrequē ipsi KL parallelae. Eadem ratione iuncta NP demonstrabitur aequalis eidē EF, & parallela ipsi G. In circulo igitur ABC aptata est MO rel. NP aequalis E F, & ipsi G parallela. quod facere oportebat.

PROBLEMA II. PROPOSITIO. II.

' In circulo dato, dato triangulo æquiangulum triangulum describere.

17. tertii. 23. primi.

32 primi.

Quoniam igitur circulus ABC contingit quadam recta HAC; à contactu autem in circulo ducta est AC: erit HAC angulus equalis ei, qui in altera circuli portione consistit, videlicet ipsi ABC. Sed HAC angulus equalis est angulo DEF. ergo et angulus ABC angulo

angulo

angulo DEF est æqualis. Eadem ratione et angulus ACB est æqualis angulo DFE, reliquus igitur BAC angulus reliquo EDF æqualis erit. Ergo triangulum ABC triangulo DEF est æquiangulum. et descriptum est in circulo ABC. In dato igitur circulo dato triangulo æquiangulū triangulū descriptū est. quod facere oportebat.

PROBLEMA III. PROPOSITIO III.

Circa datum circulum triangulo dato æquiangulum triangulum describere.

Sit datus circulus ABC: datum autem triangulum DEF. oportet circa circulum ABC describere triangulum triangulo DEF æquiangulum. protrahatur ex utraque parte EF ad puncta HG: et sumatur circuli ABC centrum K: et recta linea KB ut cumque ducatur: constituturq; ad rectam lineam KB, et ad punctum in ea K angulo quidem DEG æqualis angulus BKA; angulo autem DFH æqualis angulus BKC. et per ABC puncta ducantur rectæ lineæ LAM MBN NCL circulum ABC, contingentes. Quoniam igitur circulū ABC contingunt LM MN NL, in punctis ABC, a centro autem K ad ABC puncta ducuntur KA KB KC, erunt anguli ad puncta ABC recti. Et quoniam quadrilateri AMBK anguli quattuor quattuor rectis æquales sunt; etenim in duo triangula dividitur; quorum anguli KAM KBM sunt recti; erunt reliqui AKB AMB duobus rectis æquales. Sunt autem et DEG DEF æquales duobus rectis. anguli igitur AKB AMB angulis DEG DEF æquales sunt; quorum AKB ipsi DEG est æqualis. ergo reliquus AMB reliquo DEF æqualis erit. Similiter demonstrabitur angulus LNB ipsi DFE æqualis. ergo et reliquus MLN est æqualis reliquo EDF. æquiangulum igitur est LMN triangulum triangulo DEF, et descriptum est circa circulum ABC. Quare circa datum circulum triangulo dato æquiangulum triangulum descriptum est. quod facere oportebat.

23. primi.

17. tertij.

18. tertij.

PROBLEMA IIII. PROPOSITIO IIII.

In dato triangulo circulum describere.

Sit datum triangulum ABC. oportet in triangulo ABC circulum describere. secantur anguli ABC BCA bifariam rectis lineis BD CD, quæ conveniant inter se in D puncto; et a puncto D ad rectas lineas AB BC CA perpendiculares ducantur DE DF DG. Et quoniam angulus ABD est æqualis angulo CBD: est autem et rectus BED recto BFD æqualis: erunt duo triangula EBD DBF, duos angulos duobus angulis æquales habentia, et unum latus vni lateri æquale, et vtrique commune BD, quod scilicet vni æqualium angulorum subtrahitur. ergo et reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt: atque erit DE æqualis DF. et eadem ratione DG æqualis DF. ergo et DE ipsi DG est æqualis. tres igitur rectæ lineæ DE DF DG inter se æquales sunt; quare centro D intervallo autem vna ipsarum DE DF DG circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta; et rectas lineas AB BC CA cōtinget; propterea quod recti sunt ad EFG anguli. si enim ipsas secet, quæ ab extremitate diametri

9. primi.

12. primi.

26. primi.

16. tertij.

metri circuli ad rectos angulos ducitur, intra circulum cadet. quod est absurdū. nō igitur cētro D, interuallo aut vna ipsarum DE DF DG circulus descriptus secabit rectas lineas AB BC CA. quare ipsas cōtinget; atque erit circulus descriptus in triāgulo ABC. In dato igitur triangulo ABC circulus EFG descriptus est. quod facere oportebat.

F. C. C O M M E N T A R I V S.

Questum est à nonnullis, quomodo in triangulo quadratum describi possit, quamquam fortasse improprie in eo dicatur describi. Fuerunt qui in triangulo æquilatelo tantum problemā absoluerunt. Nos autem vniuersē in omnibus absolvere aggrediemur, postea quā nonnulli in quinto, ac sexto libro demonstrata fuerint.

T H E O R E M A V. P R O P O S I T I O V.

Circa datum triangulum circulum describere.

Sit datū
triangulum
ABC. oportet
circa datum trian-
gulum ABC
circulū describere. se-
cundum AB
AC bisariam

10. primi.

11. primi.

4. primi.

in D E punctis : et à punctis D E ipsis AB AC ad rectos angulos ducantur DF EF; quæ quidem vel intra triangulum ABC conuenient, vel in recta linea BC, vel extra ipsam. Conueniant primum intra triangulum in puncto F: et BF FC FA iungantur. Quoniam igitur AD est æqualis DB, communis autem, et ad rectos angulos DF; erit basis AF basi FB æqualis. Similiter ostendetur et CF equalis FA. ergo et BF est æqualis FC. tres igitur FA FB FC inter se æquales sunt. quare centro F, interuallo autem vna ipsarum FA FB FC circulus descriptus etiam per reliqua puncta transibit: atque erit circulus descriptus circa triangulum ABC. et describatur vt ABC. Sed DF EF conueniant in recta linea BC, in puncto F, vt habet in secunda figura, & AF iungatur. Similiter demonstrabimus punctum F centrum esse circuli circa triangulum ABC descripti. Postremo DF EF conueniant extra triangulum ABC rursus in F puncto, vt in tertia figura: et iungantur AF FB FC. Et quoniam rursus AD est æqualis DB, communis autem, et ad rectos angulos DF; basis AF basi FB æqualis erit. Similiter demonstrabimus et CF ipsi FA æqualem esse: quare et BF est æqualis FC. Rursus igitur centro F, interuallo autem vna ipsarum FA FB FC circulus descriptus et per reliqua transibit puncta; atque erit circa triangulum ABC descriptus. et describatur vt ABC. Circa datum igitur triangulum circulus descriptus est. quod facere oportebat.

Et manifestum est, quando centrum circuli intra triangulum cadit, angulum BAC existentem in portione semicirculo maiore minorem esse recto. quando autem centrum circuli cadit in recta linea BC, angulum BAC, quod sit in semicirculo, rectum esse. & quādo extra BC, quod sit in portione minore semicirculo, recto esse maiorem. Quare et quando datus angulus minor sit recto, DF EF intra triangulum conuenient: quādo autem rectus in ipsa BC,

& quando maior recto, extra BC. quod ostendere oportebat.

PROBLEMA VI. PROPOSITIO. VI.

In dato circulo quadratum describere.

Sit datus circulus ABCD. oportet in ABCD circulo quadratum describere. Ducantur circuli ABCD diametri ad rectos angulos inter se AC BD: et AB BC CD DA iungantur. Quoniam igitur BE est equalis ED, etenim centrum est E, communis autem et ad rectos angulos EA; erit basis BA equalis basi AD. Et eadem ratione utraque ipsarum BC CD utriusque BA AD equalis. æquilaterum igitur est ABCD quadrilaterum. Dico et rectangulum esse. Quoniam enim recta linea BD diameter est ABCD circuli, erit BAD semicirculus. quare angulus BAD rectus est. et eadem ratione unusquisque ipsorum ABC BCD CDA est rectus. rectangulum igitur est ABCD quadrilaterum. ostensum autem est, et æquilaterum esse. ergo quadratum necessario erit, et descriptum est in circulo ABCD. In dato igitur ABCD circulo quadratum ABCD descriptum est, quod facere oportebat.

31. tertij.

PROBLEMA VII. PROPOSITIO VII.

Circa datum circulum quadratum describere.

Sit datus circulus ABCD. oportet circa ABCD circulum quadratum describere. ducantur circuli ABCD duæ diametri AC. BD ad rectos inter se angulos, et per puncta A BCD ducantur circuli ABCD contingentes FG GH HK KF. Quoniam igitur FG contingit circulum ABCD, à centro autem E ad contactum qui est ad A ducitur EA; erunt anguli ad A recti. Eadem ratione et anguli ad puncta B C D recti sunt. Et quoniam angulus AEB rectus est, est autem et rectus EBG; erit GH ipsi AC parallela. Eadẽ ratione et AC parallela est HK. Similiter demonstrabimus et utramque ipsarum GF HK ipsi BED parallelam esse. quare et GF est parallela HK. parallelogramma igitur sunt GK GC AK FB BK, ac propterea GF quidem est equalis HK, GH vero ipsi FK. Et quoniam AC equalis est BD: Sed AC quidem utrique ipsarum GH FK est equalis; BD vero equalis utrique GF HK. et utraque GH FK utrique GF HK equalis erit. Aequaliterum igitur est FGHK quadrilaterum. Dico et rectangulum esse. Quoniam enim parallelogrammum est GBEA, atque est rectus AEB angulus, et ipse AGB rectus erit. Similiter demonstrabimus angulos etiã qui ad puncta HKF rectos esse. rectangulum igitur est quadrilaterum FGHK; demonstratum autem est et æquilaterum. Ergo quadratum sit necesse est. et descriptum est circa circulum ABCD. Circa datum igitur circulum quadratum descriptum est, quod facere oportebat.

17. tertij.

18. tertij.

28. primi.

34. primi.

PROBLEMA VIII. PROPOSITIO VIII.

In dato quadrato circulum describere.

Sit datum quadratum ABCD. oportet in quadrato ABCD circulum describere. Secetur utraque ipsarum AB AD bifariam in punctis FE. et per E quidem alterutrius ipsarum AB CD parallela ducatur EH; per F vero ducatur FK parallela alterutri AD BC. parallelogrammum

35. primi.

10. primi.

31. primi.

O igitur

34 primi.

igitur est vnūquodque ipsorum AK KB AH HD A G GC BG GD : et latera ipsorum quę ex opposito sunt equalia . Et quoniam DA est æqualis AB : et ipsius quidē AD dimidia est AE ; ipsius vero AB dimidia AF ; erit AE ipsi AF equalis . quare et opposita latera equalia sunt . ergo FG est æqualis GE . Similiter demonstrabimus et vtramque ipsarum GH HK vtrique FG GE æqualem esse . quattuor igitur GE GF GH GK inter se sunt equalēs . Itaque centro quidem G , internallo autem vna ipsarum GE GF GH GK circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta ; et rectas lineas AB BC CD DA continget , propterea quod anguli ad E F H K recti sunt . Si enim circulus secabit rectas lineas AB BC CD DA , quę ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur intra quadratum cadet . quod est absurdum . non igitur centro quidem G , internallo autem vna ipsarum GE GF GH GK circulus descriptus rectas lineas AB BC CD DA secabit . quare ipsas necessario continget : atque erit descriptus in quadrato ABCD . In dato igitur quadrato circulus descriptus est . quod facere oportebat .

16. tertij.

PROBLEMA IX. PROPOSITIO IX.

Circa datum quadratum circulum describere .

Sit datum quadratum ABCD . oportet circa ABCD quadratum circulum describere . Iungātur enim AC BD , quę se inuicem in puncto E secant . Et quoniam DA est æqualis AB , communis autem AC ; duę DA AC duabus BA AC equalēs sunt ; et basis DC æqualis basi CB ; erit angulus DAC angulo BAC æqualis . angulus igitur DAB bifariam sectus est recta linea AC . Similiter demonstrabimus vnumquemque angulorum ABC BCD CDA rectis lineis AC DB bifariam sectum esse . Quoniam igitur angulus DAB angulo ABC est æqualis : atque est anguli quidem DAB dimidius angulus EAB , anguli verō ABC dimidius EBA ; et EAB angulus angulo EBA æqualis erit . quare et latus EA lateri EB est equalē . Similiter demonstrabimus , et vtramque rectarum linearum EC ED vtrique EA EB æqualem esse . ergo quattuor rectę lineę EA EB EC ED inter se sunt equalēs . centro igitur E in puncto transibit . atque erit descriptus circa ABCD quadratum . describatur vt ABCD . circa datum igitur quadratum circulus descriptus est . quod facere oportebat .

PROBLEMA X. PROPOSITIO X.

Aequicrurre triangulum cōstituere , habens vtrumque angulorum , qui sunt ad basim duplum reliqui .

11. secundi.

1. huius.

Exponatur recta quedam linea AB , et secetur in C puncto , ita vt rectangulum contentum AB BC æquale sit ei , quod ex CA describitur quadrato : et centro quidem A , internallo autem AB circulus describatur BDE : apteturq ; in BDE circulo recta linea BD æqualis ipsi AC , quę non sit maior diametro circuli BDE : et iunctis DA DC , circa ADC triangulum circulus ACD describatur . Itaque quoniam rectangulum ABC æquale est quadrato , quod fit ex AC ; æqualis autem est AC ; ipsi BD , erit ABC rectangulum quadrato

quadrato quod ex BD æquale. Et quoniam extra circulum ACD sumptum est ali-
quod punctum B: et à puncto B in circulum ACD cadunt duę rectę lineę BCA B
D; quarum altera quidem secat, altera vero incidit, atque est rectangulū ABC æqua-
le quadrato, quod ex BD; recta linea BD circulum ACD continger. Quoniam igitur
BD contingit, et à contactu, qui ad D ducta est DC; erit BDC angulus æqualis
ei, qui in alterna circuli portione constituitur, videlicet angulo DAC. Quod cum
angulus BDC æqualis sit ipsi DAC, communis apponatur CDA. totus igitur BD
A est æqualis duobus angulis CDA DAC. Sed ipsis CDA DAC exterior an-
gulus BCD est æqualis. ergo et BDA æqualis est ipsi BCD. sed BDA angulus
est æqualis angulo CBD, quoniam et latus AD lateri AB est æquale. ergo et DBA
ipsi BCD æqualis erit. Trēs igitur anguli BDA DBA BCD inter se æquales
sunt. Et quoniam angulus DBC æqualis est angulo BCD, et latus BD lateri
DC est æquale. Sed BD ponitur æqualis ipsi CA. ergo et AC est æqualis CD. qua-
re et angulus CDA æqualis est angulo DAC. anguli igitur CDA DAC ipsius angu-
li DAC dupli sunt. est autē et BCD angulus angulis CDA DAC æqualis. ergo et B
CD duplus est ipsius DAC. Sed BCD est æqualis vtrique ipsorū BDA DBA. qua-
re et vterque BDA DBA ipsius DAB est duplus. Acquirere igitur triāgulum con-
stitutum est ADB, habens vtrumque eorum angulorum, qui sunt ad basim, duplum
reliqui. quod facere oportebat.

Vlt. tercij.
32. tercij.

32. primi.

6. primi.

PROBLEMA XI. PROPOSITIO. XI.

In dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum
describere.

Sit datus circulus ABCDE. opor-
tet in ABCDE circulo pentagonū
æquilaterum, et equiāgulum descri-
bere. Exponatur triangulum æqui-
curre FGH, habens vtrumque eorū
qui sunt ad G H angulorum duplū
anguli qui est ad F: et describatur
in circulo ABCDE triangulo FGH
æquiangulum triangulum ACD,
ita vt angulo quidem, qui est ad F
æqualis sit angulus CAD: vtrique
vero ipsorum, qui ad GH sit æqua-
lis vterque ACD CDA. et vterque igitur ACD CDA anguli CAD est duplus.

Ex antecede-
nte.

8. huius.

9. primi.

26. tercij.

29. tercij.

Secetur vterque ipsorum ACD CDA bifariam rectis lineis CE DB: et AB BC
CD DE EA iugātur. Quoniā igitur vterque ipsorū ACD CDA duplus est ipsius
CAD, et secti sunt bifaria rectis lineis CE DB; quinque anguli DAC ACE ECD
CDB BDA inter se sunt æquales. æquales autē anguli in æqualibus circumferen-
tiis insunt. quinque igitur circumferentię AB BC CD DE EA æquales sunt in
ter se. Sed æquales circumferētię æquales rectę lineę subtrahunt. ergo et quinque
rectę lineę AB BC CD DE EA inter se æquales sunt. æquilaterum igitur est AB
CDE pentagonum. Dico et æquiangulum esse. Quoniam enim circumferētia AB
æqualis est circumferētię DE, communis apponatur BCD. tota igitur ABCDE
circumferētia toti circumferētię EDCB est æqualis, et in circumferētia quidē
ABCD insitit angulus AED, in circumferētia vero EDCB insitit BAE. Ergo et BA
E angulus est æqualis angulo AED. Eadem ratione, et vnusquisque angulorum AB
C BCD CDE vnicuique ipsorum BAE AED est æqualis. æquiangulum igitur est
ABCDE pentagonū: ostensum autem est et æquilaterū esse. Quare in dato circulo
pentagonum æquilaterum, et æquiangulum descriptum est. quod facere oportebat.

EVCLID. ELEMENT.
PROBELMA XII. PROPOSITIO. XII.

Circa datum circulum pentagonum æquilaterum, et equiangulum describere.

Ex antecede -
dente.

17. tertij.

18. tertij.

8. primi.

27. tertij.

15. primi.

Sit datus circulus ABCDE. oportet circa circulum ABCDE pentagonum æquilaterum, et æquiangulum describere. intelligantur pentagoni in circulo descripti angulorum puncta ABCDE, ita ut circumferentiæ AB BC CD DE EA sint æquales; et per puncta ABCDE ducatur circulum contingentes GH HK KL LM MG, et sumpto circuli ABCDE centro F iungantur FB FK FC FL FD: quoniam igitur recta linea KL contingit circulum ABCDE in puncto C, et à centro F ad contactum, qui est ad C ducta est FC: erit FC ad ipsam KL perpendicularis. rectus igitur est vterque angulorum qui sunt ad C. Eadem ratione et anguli qui ad puncta B D recti sunt. et quoniam rectus angulus est FCK, quadratum quod fit ex FK æquale est quadratis quæ ex FC CK. Et ob eandem causam quadratis ex FB, BK æquale est quod ex FK quadratū. Quadrata igitur ex FC CK quadratis ex FB BK æqualia sunt: quorum quod ex FC ei quod ex FB est æquale. Ergo reliquū quod ex CK reliquo quod ex BK æquale erit. æqualis igitur est BK ipsi CK. Et quoniam FB est æqualis FC, communis autem FK, duæ BF FK duabus CF FK æquales sunt: et basis BK est æqualis basi KC: erit angulus quidem BFK angulo KFC æqualis, angulus vero BKF angulo FKC. duplus igitur est angulus BFC anguli KFC, et angulus BKC duplus ipsius FKC. Eadem ratione et angulus CFD anguli CFL est duplus: angulus vero CLD duplus anguli CLF. et quoniam circumferentia BC circumferentiæ CD est æqualis, et angulus BFC angulo CFD æqualis erit. atque est angulus quidem BFC anguli KFC duplus: angulus vero DFC duplus ipsius FLC. æqualis igitur est angulus KFC angulo CFL. Itaque duo triangula sunt FKC FLC, duos angulos duobus angulis æquales habentia, alteri alteri, et vnum latum vni lateri æquale, quod ipsis commune est FC. Ergo et reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, et reliquum angulum reliquo angulo æqualem. recta igitur linea KC est æqualis rectæ CL, et angulus FKC angulo FLC. Et quoniam KC est æqualis CL, erit KL ipsius KC dupla. Eadem ratione et HK ipsius BK dupla ostendetur. Rursus quoniam BK ostensa est æqualis ipsi KC: atque est KL quidem dupla KC, HK vero ipsius BK dupla: erit HK ipsi KL æqualis. Similiter et vnaqueque ipsarum GH HM ML ostendetur æqualis vtrique HK KL. Aequilaterum igitur est GHKLM pentagonum. Dico etiam equiangulum esse. Quoniam enim angulus FKC est æqualis angulo FLC: et ostensus est ipsius quidem FKC duplus angulus HKL; ipsius vero FLC duplus KLM: erit et HKL angulus KLM æqualis. Simili ratione ostendetur et vnusquisque ipsorum KHG HGM GML vtrique HKL KLM æqualis. Quinque igitur anguli GHK HKL KLM LMG MGH inter se æquales sunt: ergo equiangulum est GHKLM pentagonū. ostensum autem est etiam æquilaterum esse: et descriptum est circa ABCDE circulum. quod facere oportebat.

PROBLEMA XIII. PROPOSITIO. XIII.

In dato pentagono, quod æquilaterum, et equiangulum sit, circulum describere.

Sic datum pentagonum æquilaterum, et æquiangulum ABCDE. oportet in ABCDE pentagono circulum describere. secetur uterque angulorum BCD CDE bifariam rectis lineis CF DF; et à puncto F, in quo conveniunt inter se CF DF, ducantur rectæ lineæ FB FA FE. Quoniam igitur BC est æqualis CD, communis autem CF, duæ BC CF duabus DC CF æquales sunt, et angulus BCF est æqualis angulo DCF, basis igitur BF basi FD est æqualis, et BFC triangulum æquale triângulo DCF, et reliqui anguli reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera subtenduntur, angulus igitur CBF angulo CDF æqualis erit. Et quoniam angulus CDE anguli CDF est duplus, et angulus quidem CDE angulo ABC, angulus vero CDF angulo CBF æqualis; erit et CBA angulus duplus anguli CBF; ac propterea angulus ABF angulo FBC æqualis. angulus igitur ABC bifariam sectus est recta lineâ BF. Similiter demonstrabitur et vnumquemque angulorum BAE AED rectis lineis AF FE bifariam sectum esse. Itaque à puncto F ad rectas lineas AB BC CD DE EA ducantur perpendiculares FG FH FK FL FM. Et quoniam angulus HCF est æqualis angulo KCF; est autem et rectus FHC recto FKC æqualis: erunt duo triângula FHC FKC, duos angulos duobus angulis æquales habentia, et vnum latus vni lateri æquale, commune scilicet vtrisque FC, quod vni æqualium angulorum subtenditur. ergo et reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, atque erit perpendicularis FH perpendiculari FK æqualis. Similiter ostendetur et vnaquaque ipsarum FL FM FG æqualis vtrique FH FK. quinque igitur rectæ lineæ FG FH FK FL FM inter se æquales sunt. quare centro F, intervallo autem vna ipsarum FG FH FK FL FM circulus descriptus, etiam per reliqua transibit puncta, et rectas lineas AB BC CD DE EA cõtinget, propterea quod anguli ad G H K L M recti sunt. Si enim non continget, sed ipsas secabit, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur intra circulum cadet, quod absurdum esse ostensum est. non igitur centro F, et intervallo vno ipsorum punctorum G H KLM circulus descriptus rectas lineas AB BC CD DE EA secabit. quare ipsas cõtingat necesse est. describatur vt GHKLM. In dato igitur pentagono quod est æquilaterum, et æquiangulum, circulus descriptus est. quod facere oportebat.

9. primi.

4. primi.

26. primi.

16. tertij.

PROBLEMA. XIII. PROPOSITIO. XIII.

Circa datum pentagonum, quod æquilaterum, et æquiangulum sit, circulum describere.

Sit datum pentagonum æquilaterum et æquiangulum ABCDE. oportet circa pentagonum ABCDE circulum describere, secetur vterque ipsorum BCD CDE angulorum bifariam rectis lineis CF FD: et à puncto F, in quo conveniunt rectæ lineæ ad puncta BAE ducantur FB FA FE. Similiter vt in antecedenti demonstrabitur vnumquemque angulorum CBA BAE AED rectis lineis BF FA FE bifariam sectum esse. Et quoniam angulus BCD angulo CDE est æqualis: atque est anguli quidem BCD dimidius angulus FCD, anguli vero CDE dimidius CDF; erit et FCD angulus æqualis angulo FDC. quare et latus CF lateri FD est æquale. Similiter demonstrabitur et vna quæque ipsarum FB FA FE æqualis vnicuique FC FD. quinque igitur rectæ lineæ FA FB FC FD

E V C L I D . E L E M E N T .

FC FD FE inter se æquales sunt. ergo centro F, et intervallo vna ipsarū FA FB F C FD FE circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta: atque erit descriptus circa pentagonum ABCDE, quod æquilaterum est, et æquiangulum. describatur, et sit ABCDE. Circa datum igitur pentagonum æquilaterum et æquiangulum circulus descriptus est. quod facere oportebat.

PROBLEMA XV. PROPOSITIO XV.

In dato circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.

Sit datus circulus ABCDEF. oportet in circulo ABCDEF hexagonum æquilaterum, et æquiangulum describere. Ducatur circuli ABCDEF diameter AD, sumaturq; centrum circuli G; et centro qui dem D, intervallo autem DG circulus describatur EGCH, iunctaq; EG CG ad puncta B F producatur, et iungantur AB BC CD DE EF FA. Dico hexagonum ABCDEF æquilaterum, et æquiangulum esse. Quoniam enim G punctum centrum est ABCDEF circuli, erit GE ipsi GD æqualis. Rursus quoniam D cetrum est circuli EGCH, erit DE æqualis DG. Sed GE ipsi GD æqualis ostensa est. ergo GE ipsi ED est æqualis. æquilaterum igitur est EGD triagulum; ideoq; tres ipsius anguli EGD GDE DEG inter se æquales sunt, quoniam æquicrurū triangulorum anguli ad basim inter se sunt æquales: et sunt trianguli tres anguli æquales duobus rectis. angulus igitur EGD duorum rectorum tertia pars est. Similiter ostendetur et DGE duorum rectorum tertia. Et quoniam recta linea CG super rectam EB insitens angulos qui deinceps sunt EGC CGB duobus rectis æquales efficit; erit et reliquus CGB tertia duorum rectorum. anguli igitur EGD DGC CGB inter se sunt æquales. ergo et qui ipsis ad verticem sunt anguli BGA AGF FGE æquales sunt angulis EGD DGC CGB. quare sex anguli EGD DGC CGB BGA AGF FGE inter se æquales sunt. sed æquales anguli equalibus circumferentiis insistunt. Sex igitur circumferentiæ AB BC CD DE EF FA inter se sunt æquales. æquales autem circumferentiis æquales rectæ lineæ subtendunt. ergo et sex rectæ lineæ inter se æquales sint necesse est, ac propterea æquilaterum est ABCDEF hexagonum. Dico et æquiangulum esse. Quoniam enim circumferentiæ AF circumferentiæ ED est æqualis, communis apponatur circumferentiæ ABCD. tota igitur FABCD circumferentiæ æqualis est toti circumferentiæ EDCBA. et circumferentiæ quidem FABCD angulus FED insistit, circumferentiæ vero EDCBA insistit angulus AFE. angulus igitur AFE angulo DEF est æqualis. Similiter ostendetur et reliqui anguli hexagoni ABCDEF sigillatim æquales vtrique ipsorum AFE FED. ergo æquiangulum est ABCDEF hexagonum. ostensum autem est et æquilaterum esse: et descriptum est in circulo ABCDEF. In dato igitur circulo hexagonum æquilaterum, et æquiangulum descriptum est. quod facere oportebat.

5. primi.

12. primi.

13. primi.

26. tertij.

29. tertij.

C O R O L L A R I V M .

Ex hoc manifestum est hexagoni latus ei, quæ est ex centro circuli æquale esse. Et si per puncta ABCDEF contingentes circumducamus

ducamus, circa circulū describetur hexagonum æquilaterum et æquiangulum cōsequenter ijs, quæ in pentagono dicta sunt, & præterea similiter in dato hexagono circulum describemus, et circumscribemus. quod facere oportebat.

PROBLEMA XVI.
PROPOSITIO. XVI.

In dato circulo quindecagonum æquilaterum, et æquiangulum describere.

Sit datus circulus ABCD. oportet in ABCD circulo quindecagonum æquilaterum et æquiangulum describere. Describatur in circulo ABCD trianguli quidæ æquilateri in ipso descripti latus AC; pentagoni vero æquilateri latus AB. Quarū igitur partium est ABCD circulus quindecim, earum circumferentia quidem ABCD tertia existens circuli, erit quinque; circumferentia vero AB, quæ quinta est circuli, erit triū. ergo reliqua BC est duarum. secetur BC bifariā in puncto E. quare utraque ipsarum BE EC circumferentiarum, quintadecima pars est ABCD circuli. Si igitur iungentes BE EC æquales ipsis in continuum rectas lineas in circulo ABCD aptabimus, in ipso quindecagonum æquilaterum, et æquiangulum descriptum erit. quod facere oportebat.

Similiter autem iis, quæ dicta sunt in pentagono, si per circuli diuisiones contingentes circulum ducamus, circa ipsum describetur quindecagonum æquilaterum, et æquiangulum. Et insuper in dato quindecagono æquilatero, et æquiangulo circulum describemus, et circumscribemus.

QUARTI LIBRI FINIS.

In quinto libro propositum est de analogijs tractare; hic enim liber communis est geometriæ, arithmeticæ, musicæ, & omni simpliciter mathematicæ disciplinæ: nam quæ in ipso demonstrantur non solum geometricis theorematibus congruunt, sed & omnibus, quæ ad mathematicas, ut dictum est, disciplinas referuntur. propositum igitur huiusmodi est. librum autem dicunt esse Eudoxi cuiusdam, qui Platonis magister fuit.

Analogia.

Simplicium
cognitio co-
gnitione co-
positorum præ-
cedere debet
Termini.
Comparatio
est habitu-
do, quæ anti-
qui propor-
tionem ap-
pellant.
Analogia.
Proportio
proportionis

Itaque quoniam propositum est de analogijs tractare, analogia vero est proportionum quarundam habitudo; necesse est prius cognoscere, quæ nam sint hæ proportionibus simplicium enim cognitio cognitionem compositorum præcedere debet. si igitur quædam inter se comparatur, verbi gratia due magnitudines, ipsæ quidem termini vocantur, & alterius ad alteram transitus, distantia: comparatio autem habitudo, quam antiqui proportionem appellant. at huius proportionis cum alia proportionē iuxta similitudinem quandam comparatio vel habitudo analogia nuncupatur. non enim ut magnitudo comparatur, sed ut proportio cum proportionē. hæc autem comparatio proportio, proportionis dicitur; ut si sint due rectæ lineæ, quarum altera ad reliquam duplam proportionem habeat;

quadratum illius, quæ duplam habet proportionem, ad quadratum reliquæ quadruplam proportionem habebit eius, quam maior recta linea habet ad minorem; nam quæ longitudine sunt dupla potentia quadrupla sunt. quadratorum igitur proportio cum sit quadrupla, dupla erit proportionis rectarum linearum, quæ est dupla: vocatur autem hæc proportionis proportio, quæ quidem sub quantitate est; etenim proportio est duplex, alia in æstimatione, alia in quantitate. & eius quidem, quæ in æstimatione nulla species est, quæ ad præsentem contemplationem utilis sit; eius vero, quæ in quantitate species sunt quinque, alia enim est multiplex ut sex trium, alia superparticularis ut quattuor trium, & alia superpartiens, ut quinque trium, & hæc quidem simplices sunt, quarum adhuc simplicior est multiplex, alia vero due ex harum compositione nascuntur, videlicet multiplex superparticularis, ut est septem trium, & multiplex superpartiens, ut octo trium. sub proportionales vero sunt minores maiorum, ut sub multiplex, subparticularis, & similiter reliqua. sciendum autem est hunc librum in duas partes diuidi. & prima quidem pars simpliciorum doctrinam continet, videlicet multiplicium. secunda vero vniuerse de omnibus agit proportionibus. oportet enim in omni re, ut dictum est, simplicium cognitionem præcedere. quemadmodum autem liber ipse, ita & diffinitiones diuiduntur; primæ enim sunt de partibus, et multiplicibus, deinde sequuntur vniuersaliores de omnibus proportionibus.

Quintus li-
ber in duas
partes diuidi-
tur.

E V C L I D I S E L E M E N T O R V M

LIBER QVINTVS

CVM SCHOLIIS ANTIQVIS,
ET COMMENTARIIS

Federici Commandini Vrbinatis.

DIFFINITIONES.

I.

ARS est magnitudo magnitudinis, minor maioris, quando minor maiorem metitur.

SCHOLIUM.

Pars, vt multi arbitrantur, est minor eo; quod est eiusdē speciei, vt 3 est pars 5. apud geometram vero est, quae metitur maius, quando reliquum aequale sit ei, quod metitur: quando autem non sit aequale, non est pars, vt 3, 5; reliquuntur enim 2, quae non sunt aequalia 3. quare 3 non sunt pars 5, sed partes, videlicet tres quintae $\frac{3}{5}$.

F. C. COMMENTARIVS.

Pars etiam apud geometram sumitur pro ea, quae simpliciter minor est maiore eiusdem speciei: vt cum dicitur, omne totum est maius sua parte. ergo pars quatenus multiplici opponitur, erit ea, quae metitur maius, videlicet ipsum multiplex, quae alio nomine sub multiplex; & a nonnullis pars aliquota appellatur; quatenus vero opponitur toti nulla est necessitas, vt totum metiatur.

II.

Multiplex est maior minoris, quando maiorem minor metitur.

III.

Proportio est duarum magnitudinum eiusdem generis, quatenus ad quantitatem pertinet, mutua quaedam habitudo.

SCHOLIUM.

Proportionem dicit, vt significet habitudinem. duarum magnitudinum

P dinum

dinum] *ut* separet ab alijs speciebus quantitatis. eiusdem generis] *ut* nequis lineam cum superficie comparet. hac enim inter se proportionem nullam habent. quatenus ad quantitatem pertinet] *ut* separet ab infinitis magnitudinibus; quantitas enim continua est terminus continui nō infiniti, & quantitas discreta est discreti non infiniti. sed discretum nō est magnitudo; multitudo enim est. quædā habitudo] quod quinque sint habitudinum species; *ut* dictum iam fuit.

F. C. COMMENTARIUS.

Quatenus ad quantitatem pertinet] videtur hoc potius dictum sit, *ut* intelligatur proportio, quæ in quantitate, non item ea, quæ in æstimatione consistit.

III.

Portionem habere inter se magnitudines dicuntur, quæ multiplicatæ se inuicem superare possunt.

S C H O L I U M.

In numeris quidem omnis proportio rationalem habet quantitatem; in magnitudinibus autem est quædam proportio, quæ numero exprimi non potest; sunt enim quædam, quorum dumtaxat cognoscitur excessus, quo alterū superat alterū; quantitas aut excessus cognosci nequit. hæc igitur proportionem habere dicuntur, nempe excessus, non adhuc eam, quam numerus habet ad numerum, hoc est rationalem; ac propterea in diffinitione proportionis magnitudinum apposuit, quatenus ad quantitatem pertinet, videlicet continuam, non omnino autem quatenus ad quantitatem discretam, & rationalem. Uniuersalius igitur diffiniens, quæ nam sint proportionem habentia dixit; quæ multiplicatæ se inuicem superare possunt: hoc enim & rationalibus, & irrationalibus congruit, velut diameter quadrati, *ut* in rationalibus quidem proportionem habet ad latus, *ut* in excessu vero proportionem habet, quam maius ad minus, & potest latus multiplicatum aliquando diametrum superare.

F. C. COMMENTARIUS.

Hoc idcirco dictum videtur, *ut* infinitæ magnitudines à proportionibus excludantur. finita enim magnitudo quantumlibet multiplicata tantum abest, *ut* infinitam magnitudinem exuperet, *ut* ne æquare quidem possit unquam.

V.

In eadem proportionem magnitudines esse dicuntur prima ad secundam, & tertia ad quartam, quando primæ, et tertiæ æquemultiplices,

tiplices, secundæ, et quartæ æque multiplices iuxta quamvis multiplicationem utraque utramque vel unâ superant, vel unâ æquales sunt, vel unâ deficiunt inter se comparatæ.

F. C. COMMENT-

TARIVS.

Sit prima magnitudo *A*, secunda *B*, tertia *C*, & quarta *D*: simanturq; primæ, ac tertiæ, videlicet ipsarum *A* & *C* æque multiplices *E* & *F*, ut sit *E* æque multiplex *A*, atque *F* ipsius *C*. rursus simantur ipsarum *B* & *D*, secundæ scilicet, & quartæ æque multiplices *G* & *H*; & siquidem maiori existente *E* quam *G*, etiam *F* sit maior quam *H*, vel si *E* æquali existente ipsi *C*, sit *F* æqualis *H*. vel si minori existente, sit minor iuxta quamvis multiplicatione, tunc dicitur *A* ad *B* eandem habere proportionem, quam

C ad *D*. excessum autem, ac defectum simpliciter intelligere oportet, non secundum proportionem, ut voluit Campanus; alioqui idem per idem explicaretur, quod est absurdum. Propositis igitur quatuor magnitudinibus commensurabilibus, si velimus statim dignoscere, an eandem proportionem habeant, multiplices ita aptabimus, ut multiplex primæ multiplici secundæ fiat æqualis; & si quidem multiplex tertiæ sit æqualis multiplici quartæ, tunc prima ad secundam eandem proportionem habere deprehendetur, quam tertia ad quartam. Si vero multiplex tertiæ sit minor multiplici quartæ, prima ad secundam maiorem proportionem habebit, quam tertia ad quartam. quod si multiplex tertiæ sit maior multiplici quartæ, habebit prima ad secundam minorem proportionem, quam tertia ad quartam.

VI.

Magnitudines, quæ eandem proportionem habent, proportionales vocentur.

V I I.

Quando autem æque multiplicium multiplex quidem primæ superauerit multiplicem secundæ, multiplex vero tertiæ non superauerit multiplicem quartæ; tunc prima ad secundam maiorem proportionem habere dicitur, quam tertia ad quartam.

F. C. COMMENTARIUS.

Maneant eadem, quæ supra: & si nptis ipsarum AC æque multiplicibus EF; itemq; ipsarum ED æque multiplicibus GH, si quidem E superet G, F vero non superet H, vel si E sit æqualis ipsi G, & F minor, quàm H, tunc A ad B maiorem proportionē habere dicitur, quàm C ad D.

V I I I.

Analogia est proportionum similitudo.

I X.

Analogia vero in tribus minimis terminis consistit.

X.

Quando tres magnitudines proportionales sint, prima ad tertiam duplam proportionem habere dicetur eius, quam habet ad secundam.

S C H O L I V M.

Non dicit duas proportionēs unius duplas esse, quod etiam est verum; sed proportionem, quæ ex duabus constat, esse duplam, vt 8.4.2, & rursus 9 3 1. proportio igitur, quæ ex duabus constat dupla est. magnitudo autem in duplis quidem magnitudinibus quadrupla est, in triplis vero nonupla, & in quadruplis sexdecupla. demonstrabitur enim deinceps quæ longitudine sunt dupla, potentia quadrupla esse: & quæ longitudine tripla, potentia nonupla. quadratorum igitur proportio cum qua drupla sit, dupla est proportionis laterum, quæ est dupla, etenim dupli duplus quadruplus est.

XI.

Quando autem quattuor magnitudines sint proportionales, prima ad quartam triplam habere proportionem dicetur eius, quam habet ad secundam: & semper deinceps vna plus, quo ad analogia processerit.

F. C. COMMENTARIUS.

Decima, & undecima diffinitio terminos requirunt necessario inequales, & primum ipsorum maiorem. nam si aequales sint eadem est primi ad secundum, & ad tertium proportio. Si vero primus sit minor, non potest primus ad tertium duplam proportionem habere proprie eius, quam habet ad secundum, cum primi ad secundum maior sit proportio, quam ad tertium ex 8. huius.

XII.

Homologae, vel similis rationis magnitudines dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, consequentes vero consequentibus.

XIII.

Permutata ratio est sumptio antecedentis ad antecedentem, et consequentis ad consequentem.

F. C. COMMENTARIUS.

Sit A ad B, vt C ad D. erit permutando A ad C, vt B ad D. hoc autem ita esse demonstrabitur in 16 propositione huius libri.

XIIII.

Conuersa ratio est sumptio consequentis, vt antecedentis ad antecedentem, vt ad consequentem.

F. C. COMMENTARIUS.

Sit rursus A ad B, vt C ad D. erit conuersa B ad A, vt D ad C. quod demonstratur in corollario quartae huius.

Compositio

Compositio rationis est sumptio antecedentis vnâ cum consequente tamquam vnus ad ipsam consequentem.

S C H O L I V M.

Iuniores hanc proportionem apposuerunt . neque enim compositio magnitudinum eadem est , quæ compositio proportionum . hic autem antecedens vnâ cum consequente sumptum totam magnitudinem efficit , quæ ex magnitudinibus componitur : atque hæc est magnitudinum compositio . compositio enim proportionum aliam proportionem efficit , ut ipse deinceps dicit . proportio , inquit , ex proportionibus componi dicitur , cum proportionum quantitates inter se multiplicatæ aliquam efficiunt proportionem . ipse autem , ut in antiquioribus libris inuenitur , compositionem hanc $\alpha\omega\lambda\upsilon\tau\iota$, hoc est componenti , vel componendo appellat ; etenim in rationalibus non aliter dicit , quam componendo ; similiter autem & diuisio , vna enim proportio diuiditur . at diuisio de qua hoc loco sermo fit , magnitudinum est , excessus namque antecedentium ab antecedentibus dissectatur . ipse vero etiam in hoc dicit $\alpha\omega\lambda\upsilon\tau\iota$, videlicet diuidenti , vel diuidendo . & similiter quæ hoc loco appellatur conuersio rationis ipse $\alpha\omega\sigma\epsilon\gamma\epsilon\lambda\upsilon\tau\iota$ dicit , conuertitur enim ad antecedentia .

F. C. COMMENTARIUS.

Compositio rationis est proportio , quæ oritur ex compositione terminorum ipsius proportionis , videlicet ex compositione antecedentis cum consequente ; cum totum consequenti comparatur , quamquam improprie à iunioribus compositio proportionis , vel rationis appellata sit ; compositio enim proportionis longe alia est , ut in præcedenti scholio adnotatur . sit AE ad EB , ut CF ad FD . erit componendo AB ad BE , ut CD ad DF . illud vero in 18 huius demonstratur .

$A \quad B \quad E \quad D$

$C \quad F \quad D$

X V I.

Diuisio rationis est sumptio excessus , quo antecedens superat consequentem , ad ipsam consequentem .

F. C. COMMENTARIUS.

$A \quad E \quad B$

$C \quad F \quad D$

Sit AB ad BE , ut CD ad DF . erit diuidendo AE ad EB , ut CF ad FD . quod in 17 huius demonstrabitur .

X V I I.

Conuersio rationis est sumptio antecedentis ad excessum , quo antecedens ipsam consequentem superat .

F. C. COMMENTARIUS.

Sit AB ad BE , vt CD ad DF . erit per conuersionem rationis BA ad AE , vt DC ad CF , hoc autem constat ex corollario 19 huius.

X V I I I.

Aequa ratio, siue ex æquali est, cum plures magnitudines extiterint, et alię ipsis numero æquales, quę binę fumantur, et in eadem proportionē, fueritq; vt in primis magnitudinibus prima ad vltimam, ita in secūdis magnitudinibus prima ad vltimam: vel aliter est sumptio extremarum per subtractionem mediarum.

F. C. COMMENTARIUS.

Hoc autem & in ordinata analogia fit, & in perturbata. in ordinata quidem hoc modo. sint tres magnitudines ABC , & aliae ipsis numero æquales DEF , sitq; vt A ad B , ita D ad E ; & vt B ad C , ita D ad F . erit ex æquali vt A ad C , ita D ad F . quod demonstrabitur in 22 huius.

In perturbata vero hoc pacto. sint rursus tres magnitudines ABC , itemq; aliae tres DEF , & sit vt A ad B , ita E ad F , vt autem B ad C , ita D ad E . erit ex æquali vt A ad C , ita D ad F . hoc autem in 23 huius ostendetur. Idem sequitur etiam si plures sint, quę tres magnitudines. sint enim quattuor magnitudines $ABCD$, & aliae ipsis numero æquales $EFGH$, & in ordinata quidem analogia vt A ad B , ita sit E ad F , vt autem B ad C , ita F ad G , & vt C ad D , ita G ad H . erit ex æquali vt A ad D , ita E ad H . In perturbata vero, sit vt A ad B , ita F ad G , vtq; B ad C , ita sit G ad H , & vt C ad D , ita E ad F . erit ex æquali vt A ad D , ita E ad H . & similiter continget in alijs magnitudinibus quotquot illae fuerint.

X I X.

Ordinata analogia est quādo fuerit vt antecedens ad consequentem, ita antecedens ad consequentem; vt autem consequens ad aliā quāpiam, ita consequens ad aliam quāpiam.

X X.

Perturbata vero analogia est, quando tribus existentibus magnitudinibus

gnitudinibus , & alij ipsis numero æqualibus ; fuerit vt in primis magnitudinibus antecedens ad consequentem , ita in secundis magnitudinibus antecedens ad consequentem . vt autem in primis magnitudinibus consequens ad aliam quampiam ; ita in secundis alia quepiam ad antecedentem.

F. C. COMMENTARIVS.

Harum exempla superius posita sunt, sed præter diffinitiones sunt etiam communes quedam rationes, quæ in hoc libro sumuntur nempe hæc.

I.

Eiusdem siue æqualium æque multiplices inter se æquales sunt.

II.

Quarum eadem æque multiplex est, vel quarum æquales sunt æque multiplices & ipsæ inter se sunt æquales.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

Si fuerint quocumque magnitudines quocumque magnitudinum æqualium numero singulæ singularum æque multiplices ; quotuplex est vna magnitudo vnius, totuplices erunt & omnes omnium.

Sint quocumque magnitudines AB CD quocumque magnitudinum EF æqualium numero, singulæ singularum æque multiplices. Dico quotuplex est AB ipsius E, totuplices esse & AB CD ipsarum E. Quoniam enim AB æque multiplex est ipsius E, et CD ipsius F, quot magnitudines sunt in AB æquales ipsi E, tot erunt et in CD æquales ipsi F. diuidatur AB quidem in partes ipsi E æquales, quæ sint AG GB: CD vero diuidatur in partes æquales ipsi F, videlicet CH HD. erit igitur multitudo partium CH HD æqualis multitudini ipsarum AG GB. et quoniam AG est æqualis E, et CH æqualis F; erunt et AG CH æquales ipsis E F. eadem ratione quoniam GB est æqualis E, et HD ipsi F, erunt et GB HD æquales ipsis EF. quot igitur sunt in AB æquales ipsi E, tot sunt et in AB CD æquales ipsis E F. ergo quotuplex est AB ipsius E, totuplices erunt et AB CD ipsarum E F. si igitur fuerint quocumque magnitudines quocumque magnitudinum æqualium numero singulæ singularum æque multiplices; quotuplex est vna magnitudo vnius, totuplices erunt et omnes omnium. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA II. PROPOSITIO. II.

Si prima secundæ æque multiplex fuerit, ac tertia quartæ; fuerit autem et quinta secundæ æque multiplex, ac sexta quartæ; erit etiam composita prima, et quinta secundæ æque multiplex, ac tertia, et sexta quartæ.

Prima

Prima enim AB secundæ C æque multiplex sit, ac tertiæ DE quartæ F. sit autem et quinta BG secundæ C æque multiplex, ac sexta EH quartæ F. Dico et compositam primam, et quintam AG secundæ C æque multiplicem esse, ac tertiam et sextam DH quartæ F. Quoniam enim AB æque multiplex est C, ac DE ipsius F; quot magnitudines sunt in AB æquales C, tot erunt et in DE æquales F. eadem ratione et quot sunt in BG æquales C, tot et in EH erunt æquales F. quot igitur sunt in tota AG æquales C, tot erunt et in tota DH æquales F. ergo quotuplex est AG ipsius C, totuplex est et DH ipsius F. et composita igitur prima et quinta AG secundæ C æque multiplex erit, ac tertia et sexta DH quartæ F. quare si prima secundæ æque multiplex fuerit, ac tertia quartæ; fuerit autem et quinta secundæ æque multiplex, ac sexta quartæ; erit composita quoque prima et quinta æque multiplex secundæ; ac tertia, et sexta quartæ. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

Si prima secundæ æque multiplex fuerit, ac tertia quartæ; sumantur autem æque multiplices primæ, & tertiæ: erit & ex æquali sumptarum vtræque vtriusque æque multiplex, altera quidem secundæ, altera vero quartæ.

Prima enim A secundæ B æque multiplex sit, ac tertia C quartæ D: et sumantur ipsarum AC æque multiplices EF GH. Dico EF æque multiplicem esse ipsius B, ac GH ipsius D. Quoniam enim EF æque multiplex est ipsius A, ac GH ipsius C; quot magnitudines sunt in EF æquales A, tot erunt et in GH æquales C. Diuidatur EF quidem in magnitudines ipsi A æquales EK KF; GH vero diuidatur in magnitudines æquales C, videlicet GL LH. erit igitur ipsarum EK KF multitudo æqualis multitudini ipsarum GL LH. et quoniam æque multiplex est A ipsius B, ac C ipsius D; æqualis autem EK ipsi A, et GL ipsi C; erit EK æque multiplex ipsius B, ac GL ipsius D. eadem ratione æque multiplex erit KF ipsius B, et LH ipsius D. quoniam igitur prima EK secundæ B æque multiplex est, ac tertia GL quartæ D; est autem et quinta KF secundæ B æque multiplex, ac sexta LH quartæ D: erit et composita prima et quinta EF secundæ B æque multiplex, ac tertia, et sexta GH quartæ D. Si igitur prima secundæ æque fuerit multiplex, ac tertia quartæ; sumantur autem primæ, et tertiæ æque multiplices: erit et ex æquali sumptarum vtræque vtriusque æque multiplex, altera quidem secundæ, altera vero quartæ. quod ostendisse oportuit.

Ex antea-
dente.

THEOREMA IIII. PROPOSITIO IIII.

Si prima ad secundam eandem hæt proportionem, quam tertia ad quartam, & æque multiplices primæ, & tertiæ ad æque multiplices secundæ, & quartæ; iuxta quamvis multiplicationem, eandem proportionem habebunt, inter se comparatæ.

Q Prima

E V C L I D . E L E M E N T .

Prima enim A ad secundam B eandem proportionem habeat, quam tertia C ad quartam D: et sumantur ipsarū quidem AC alię vtrumque eque multiplices E F; ipsarū vero BD alię vtrumque eque multiplices GH. Dico E ad G ita esse, vt F ad H. sumantur enim rursus ipsarum EF eque multiplices KL, et ipsarum GH eque multiplices M N. Quā igitur E eque multiplex est ipsius A, atq; F ipsius C; sumuntur aut ipsarum EF eque multiplices KL: erit K eque multiplex ipsius A, atque L ipsius C. Eadem ratione M a que multiplex erit ipsius B, atque N ipsius D. et quoniam est vt A ad B. ita C ad D. sumptę autem sunt ipsarū AC eque multiplices KL; et ipsarum BD alię vtrumque eque multiplices MN: si K superat M, superabit et L ipsam N; et si equalis, equalis; et si minor, minor, sunt q; KL quidem ipsarum EF eque multiplices; MN vero ipsarum G H alię vtrumque eque multiplices. vt igitur E ad G, ita erit F ad H. quare si prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam, et eque multiplices primę ac tertię ad eque multiplices secundę, ac quartę iuxta quamuis multiplicationem eandem proportionem habebunt inter se comparatę. quod demonstrare oportebat.

Quoniam igitur demonstratum est si K superat M, et L ipsam N superare; et si equalis, equalem esse, et si minor, minorem: constat etiam si M superat K, et N superare ipsam L; et si equalis, equalem esse; et si minor, minorem; ac propterea vt G ad E, ita esse H ad F.

Ex antecede-
dente.

Per conuer-
sam quintę
diffinitionis,
s. diffinit.

s. diffinit.

C O R O L L A R I V M.

Ex hoc manifestum est si quattuor magnitudines sint proportionales, et contra proportionales esse.

S C H O L I V M.

Hoc theorema pertinet ad demonstrationem diffinitionis magnitudinum, quę sunt in eadem proportionem, vt est quando eque multiplices primę, & tertię, videlicet antecedentium, eque multiplices secundę, & quartę, hoc est consequentium, vel vnā superant, vel vnā aequales sunt, vel vnā deficiunt; hic enim demonstrat & ipsas eandem inter se proportionem habere. reticuit autem hoc in principio; neque enim fieri poterat, vt diceretur illas in eadem proportionem esse, quorum multiplicia sunt in eadem proportionem, quando nos id ipsum quereremus, quanam essent in eadem proportionem. cum igitur dixisset in principio eas simul superare, vel simul aequales esse, vel simul deficere; hic ostendit & in eadem esse proportionem, si inter se comparentur, vt appareat diffinitio earum, quę sunt in eadē proportionem, quando scilicet eque multiplices primę, & tertię ad secundę, & quartę eque multiplices eandē proportionem habeant. ostendit aut ipsas in eadē proportionem per hoc, & per cōuersionē.

THEO.

THEOREMA V. PROPOSITIO. V.

Si magnitudo magnitudinis æque multiplex sit, atque ablata ablatæ; et reliqua reliquæ æque multiplex erit, atque tota totius.

Magnitudo enim AB magnitudinis CD æque multiplex sit, atque ablata AE ablatæ CF. Dico et reliquam EB reliquæ FD æque multiplicem esse, atque totam AB totius CD. quotuplex enim est AE ipsius CF, totuplex fiat et EB ipsius CG. et quoniam AE æque multiplex est CF, atque EB ipsius CG; erit AE æque multiplex CF, et AB ipsius GF. ponitur autem æque multiplex AE ipsius CF, et AB ipsius CD. æque multiplex igitur est AB utriusque GF CD; ac propterea CF ipsi CD est æqualis. communis auferatur CF. reliqua igitur GC æqualis est reliquæ DF. Itaque quoniam AE æque multiplex est CF, et EB ipsius CG, estq; CG æqualis DF; erit AE æque multiplex CF, et EB ipsius FD. æque multiplex autem ponitur AE ipsius CF, et AB ipsius CD. ergo EB est æque multiplex FD, et AB ipsius CD. et reliqua igitur EB reliquæ FD æque multiplex est, atq; tota AB totius CD. quare si magnitudo magnitudinis æque multiplex sit, atque ablata ablatæ; et reliqua reliquæ æque erit multiplex, atque tota totius. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA VI. PROPOSITIO. VI.

Si duæ magnitudines duarum magnitudinum æque multiplices sint, et ablata quædam sint earundem æque multiplices; erunt et reliquæ uel eisdem æquales, vel ipsarum æque multiplices.

Dux enim magnitudines AB CD duarum magnitudinum EF æque multiplices sint, et ablata AG CH earundem sint æque multiplices. Dico et reliquas GB HD vel ipsas EF æquales esse, vel ipsarum æque multiplices. sit enim primum GB æqualis E. Dico et HD ipsi F esse æqualem. ponatur ipsi F æqualis CK. et quoniam AG æque multiplex est E, et CH ipsius F; estq; GB quidem æqualis E; CK vero æqualis F; erit AB æque multiplex E, et KH ipsius F. æque autem multiplex ponitur AB ipsius E, et CD ipsius F. ergo KH æque multiplex est F, et CD ipsius F. quoniam igitur utraque ipsarum KH CD est æque multiplex F, erit KH æqualis CD. communis auferatur CH. ergo reliqua KC reliquæ HD est æqualis. Sed KC est æqualis F. et HD igitur ipsi F est æqualis; ideoq; GB ipsi E, et HD ipsi F æquales erit. Similiter demonstrabimus si GB multiplex fuerit ipsius E, et HD ipsius F æque multiplicem esse. Si igitur duæ magnitudines duarum magnitudinum æque multiplices sint, et ablata quædam sint earundem æque multiplices, erunt et reliquæ uel eisdem æquales, vel ipsarum æque multiplices. quod demonstrare oportebat.

S C H O L I V M.

Non propositum est ostendere si à multiplici multiplex auferatur reli-

quum , vel equale esse , vel multiplex ; hoc enim manifestum est : sed
 dua us magnitudinibus ad duas magnitudines ita se habentibus , ut di-
 ctum est , si reliqua prioris sit multiplex , & reliquam alterius multipli-
 cem esse ; & si equalis sit , esse equalem , veluti si quadrupla existente
 tripla auferatur , reliqua equalis erit , & in altera eodem modo .

THEOREMA VII. PROPOSITIO. VII.

Aequales ad eadē, eadē habēt proportionē, & eadē ad æquales.

Sint æquales magnitudines A B, alia autem quævis magni-
 tudo C. Dico vtramque ipsarum A B ad C eandem propor-
 tionem habere : et C ad vtramque A B similiter eandem habe-
 re proportionem. sumantur enim ipsarum A B æque multipli-
 ces DE, et ipsius C alia vtrumque multiplex F. Quoniam igitur
 1. Com. not. æque multiplex est D ipsius A, et E ipsius B, estq; A ipsi B æqua-
 lis; erit et D æqualis E; alia autem vtrumque est F. ergo si D
 superat F, et E ipsam F superabit; et si æqualis, æqualis; et si minor,
 minor. et sunt DE quidem ipsarum A B æqui multiplices: F ve-
 5. diffi. ro alia vtrumque multiplex ipsius C. erit igitur vt A ad C, ita B
 ad C. dico insuper C ad vtramque ipsarum A B eandem habe-
 re proportionem. iisdem enim constructis similiter ostendimus
 D ipsi E æqualem esse, aliam vero quandam F. si igitur F superat
 5. diffi. D, ipsam quoque E superabit; et si æqualis, æqualis; et si minor,
 minor. atque est F quidē ipsius C multiplex; DE vero alię vtrū-
 que æque multiplices ipsarum A B. ergo vt C ad A, ita erit C ad B. æquales igitur
 ad eandem, eandem habent proportionem, et eadem ad æquales. quod ostendere
 oportebat.

F. C. C O M M E N T A R I V S.

Eodem modo demonstrabimus, et æquales magnitudines ad
 alias inter se æquales eandem habere proportionem.

Sint enim magnitudines æquales A B; sintq; aliae magnitudines inter se
 æquales C D. dico A ad C eandem habere proportionem, quam B ad D. su-
 mantur ipsarum A B æque multiplices E F; & ipsarum C D aliae vtrum-
 que æque multiplices GH. Itaq; quoniam æque multiplex est E ipsius A,
 1. Com. not. & F ipsius B; est autem A æqualis B; erit & E ipsi F æqualis. rursus quo-
 niam æque multiplex est G ipsius C, & H ipsius D; estq; C ipsi D æqualis :
 & G ipsi H æqualis erit. Si igitur E superat G, & F ipsam H superabit; et
 5. diffi. si æqualis, æqualis; & si minor, minor. ergo A ad C eandem proportionē
 habet, quam B ad D. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO. VIII.

Inæqualium magnitudinum maior ad eandem
 maiorem habet proportionem , quàm minor : et
 eadem ad minorem maiorem proportionē habet , quàm ad maiorem.

Sint inæquales magnitudines AB C: et sit AB maior; alia vero vtrumque D. dico
 AB ad D maiorem habere proportionem, quàm C ad D: et D ad C maiorem habere,
 quàm ad AB. quoniam enim AB maior est , quàm C, ponatur ipsi C æqualis BE.
 4. diffin. Itaque minor ipsarum AE EB multiplicata maior aliquando erit, quàm D. Sit pri-
 mum

mum AE minor, quàm E.B: et multiplicetur A E, quo ad fiat maior, quàm D: sitq; ipsius multiplex FG, quæ ipsa D sit maior: quotuplex autem est FG ipsius AE, totuplex fiat et GH ipsius EB, et K ipsius C. sumaturq; ipsius D dupla quidem L, tripla vero M, et deinceps vna plus, quo ad ea, quæ sumitur, multiplex fiat ipsius D, et primo maior, quàm K. sumatur, sitq; N ipsius D quadrupla, et primo maior quàm K. quoniam igitur K primo minor est, quàm N, non erit K minor, quàm M. et cum eque multiplex sit FG ipsius AE, et GH ipsius EB; erit et FG eque multiplex AE, et FH ipsius AB. æque autem multiplex est FG ipsius AE, et K ipsius C. ergo FH æque multiplex est AB, et K ipsius C; ac propterea FH K ipsarum AB C eque multiplices erunt. rursus quoniam GH æque multiplex est EB, et K ipsius C; estq; EB æqualis C: erit et GH ipsi K æqualis. Sed K non est minor, quàm M. non igitur GH minor est, quàm M. maior autem FG quàm D. ergo tota FH vtriusque DM maior erit. Sed vtræque DM sunt æquales N; est enim M tripla ipsius D, et vtræque M D ipsius D quadrupla. est autem et N quadrupla D. vtræque igitur M D ipsi N æquales sunt. sed FH maior est, quàm MD. quare FH superat N. K vero ipsam N non superat. et sunt FH K æque multiplices ipsarum AB C: et N ipsius D alia vtriusque multiplex. ergo AB ad D maiorem proportionem habet, quàm C ad D. dico præterea et D ad C maiorem habere proportionem, quàm D ad AB. iisdem enim constructis similiter ostendemus N superare K, ipsam vero FH non superare: atque est N multiplex ipsius D; et FH K alia vtriusque ipsarum AB C æque multiplices. ergo D ad C maiorem proportionem habet, quàm D ad AB. Sed sit AE maior, quàm EB, erit minor EB multiplicata aliquando maior, quàm D. multiplicetur, et sit GH multiplex quidem ipsius EB, maior vero, quàm D, et quotuplex est GH ipsius EB, totuplex fiat et FG ipsius AE, et K ipsius C. simili ratione ostendemus FH K ipsarum AB C æque multiplices esse. sumatur deinde N multiplex D, primo aut maior, quàm FG. ergo rursus FG non est minor, quàm N; maior autem FG, quàm D. tota igitur FH superat DM, hoc est N; et K ipsam N non superat: quoniam FG maior existens, quàm GH, hoc est quàm K, non superat N. et similiter ut in iis, quæ superius dicta sunt, demonstratione absoluemus. Inæquali igitur magnitudinum maior ad eandem maiorem habet proportionem, quàm minor: et eadem ad minorem maiorem proportionem habet, quàm ad maiorem. quod ostendere oportebat.

S C H O L I V M.

Ergo AB ad D maiorem proportionem habet, quàm C ad D. *¶* quattuor sunt magnitudines, prima quidem AB, secunda D, tertia autem C, et quarta D. bis enim similitur D, et vt secunda et vt quarta. atque est prima quidem AB multiplex FH: secundae vero D multiplex N, et tertiae C multiplex K. est igitur FH maior, quàm N; quæ quidem N multiplex est secundae D: K vero multiplex tertiae C minor est, quàm N, quæ est multiplex quartae D. Itaque quoniam multiplex primae maior est multiplici secundae, multiplex autem tertiae non maior multiplici quartae; habebit AB ad D maiorem proportionem, quàm C ad eandem D, per eam diffinitionem, quæ dicit, quando æque multiplicum multiplex quidem primae superauerit multiplicem secundae, multiplex autem tertiae non superauerit multiplicem quartae, tunc prima ad secundam maiorem proportionem habere dicitur, quàm tertia ad quartam.

T H E O R E M A IX. P R O P O S I T I O IX.

Quæ ad eandem, eandem proportionem habent, inter se æquales sunt; et ad quas eadē, eadē hēt proportionem, ipsæ inter se sunt æquales.

Habeat

E V C L I D . E L E M E N T .

Habeat enim vtrique ipsarum A B ad C eandem proportionē.
 Ex antecede- Dico A ipsi B equalem esse . nam si non esset equalis , non haberet
 dente. vtrique ipsarum A B ad C eandem proportionem . habet autem . æ-
 qualis igitur est A ipsi B . Habeat rursus C ad vtramque ipsarum AB
 eandem proportionem . Dico A æqualem esse ipsi B . nisi enim ita
 sit , non habebit C ad vtramque A B eandem proportionem . habet
 Ex antecede- autem . ergo A ipsi B necessario est æqualis . quæ igitur ad eandem ,
 dente. eandem proportionem habent , æquales inter se sunt : et ad quas ea-
 dem eandem habet proportionem , ipsæ inter se sunt æquales . quod
 demonstrare oportebat.

THEOREMA. X. PROPOSITIO. X.

Ad eadē pportionē habētū quæ maiorē pportionē hēt , illa maior
 est ; ad quā vero eadē maiorē habet proportionem , illa minor est .

Habeat enim A ad C maiorem proportionem , quā B ad C . Dico
 A , quā B maiorem esse . si enim non est maior , vel æqualis est , vel mi-
 nor . equalis autem non est A ipsi B , vtraque enim ipsarum AB ad C eā-
 dem haberet proportionem . atqui eandem non habet . non igitur A ipsi
 7. huius. B est equalis . Sed neque minor est A quā B ; haberet enim A ad C mi-
 8. huius. norem proportionem , quā B . atqui non habet minorem . non igitur A
 minor est , quā B . ostensum autem est neque esse æquale . ergo A quā
 B maior erit . Habeat rursus C ad B maiorem proportionem , quā C ad
 A . Dico B minorem esse , quā A . si enim non est minor , vel æqualis est ,
 vel maior . equalis vtrique non est B ipsi A ; etenim C ad vtramque ip-
 7. huius. sarū A B eadē proportionem haberet . non habet autem . ergo A ipsi B
 8. huius. non est equalis . Sed neque maior est B , quā A ; haberet enim C ad B minorem
 proportionem , quā ad A . atqui non habet . non igitur B quā A est maior .
 Ostensum autē est neque equalē esse . ergo B minor erit , quā
 A . Ad eandem igitur proportionē habētū quæ maiorē pro-
 portionē hēt , illa maior est : et ad quam eadem maiorē habet
 proportionem , illa minor est . quod oportebat demonstrare .

THEOREMA XI. PROPOSITIO. XI.

Quæ eidem eēdem sunt proportionēs , et in
 ter se eēdem sunt .

Sit enim vt A ad B , ita C ad D : vt autem C ad D , ita E
 ad F . Dico vt A ad B , ita esse E ad F . sumantur enim ipsarum
 quidem A C E æque multiplices G H K ; ipsarum vero B
 D F aliæ vtrumque æque multiplices L M N . Quoniam igi-
 tur est vt A ad B , ita C ad D , et sumptæ sunt ipsarum A C
 eque multiplices G H ; et ipsarum B D aliæ vtrumque æque
 multiplices L M ; si G superat L , et H ipsam M superabit ; et si
 Ex cōuersa- æqualis , equalis ; et si minor , minor . rursus quoniam est vt
 5. diffin. C ad D , ita E ad F , et sumptæ sunt ipsarū C E eque multipli-
 ces H K ; ipsarū vero D F aliæ vtrūque eque multiplices M N ,
 si H superat M , et K ipsam N superabit ; et si equalis , equalis ;
 et si minor , minor . sed si H superat M , et G superabit L ; et si
 æqualis , æqualis ; et si minor , minor . quare si G superat L , et
 K ipsam N superabit ; et si æqualis , æqualis ; et si minor , minor .
 et sunt G K quidem ipsarum A E æque multiplices ; L N vero
 5. diffin. ipsarum B F aliæ vtrumque eque multiplices . ergo vt
 A ad B , ita erit E ad F . quæ igitur eidem eadē sunt pro-
 portiones , et inter se eadē sunt . quod ostendisse oportuit .

THEO-

THEOREMA XII. PROPOSITIO. XII.

Si quotcūque magnitudines proportionales fuerint, vt vna antecedeñtiū ad vnā cōsequētiū, ita erūt antecedeñtes oēs ad omnes cōsequētes.

Sint quotcūque magnitudines proportionales AB CD EF: et vt A ad B, ita sit C ad D, et E ad F. Dico vt A ad B, ita esse ACE ad BDF. sumantur enim ipsarum A CE æque multiples GHK, et ipsarū BDF alia vtrumque æque multiples LMN. Quoniam igitur vt A ad B, ita est C ad D, et E ad F: et sumptæ sunt ipsarum quidem ACE æque multiples GHK, ipsarum vero BDF alia vtrumque æque multiples LMN; si G superat L, et H ipsam M superabit, et K ipsam N; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. quare et si G superat L, superabunt et GHK ipsas LMN; et si æqualis, æquales; et si minor, minores. suntq; G, et GHK ipsarū A, et A CE æque multiples: quoniā si fuerint quotcūque magnitudines quotcūque magnitudinū æqualiū numero, singula singularū æque multiples; quotuplex est vna magnitudo vnius, totuplices erūt et oēs omniū. eadē ratione et L et LM N ipsarum B, et BDF sunt æque multiples. est igitur vt A ad B, ita ACE ad BDF. quare si quotcumque magnitudines proportionales fuerint, vt vna antecedeñtiū ad vnā consequentium, ita erunt antecedentes omnes ad omnes consequentes. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XIII. PROPOSITIO. XIII

Si prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam maiorem proportionē habeat, quā quinta ad sextā: et prima ad secundā maiore habebit proportionē, quā quinta ad sextā.

Prima enim A ad secundam B eandem proportionem habeat, quam tertia C ad quartam D; tertia autem C ad quartā D maiorem habeat proportionem, quā quinta E ad sextā F. Dico et primam A ad secundam B maiorem proportionē habere, quā quintam E ad sextam F. Quoniam enim C ad D maiorem proportionem habet, quā E ad F, sunt quedā ipsarum CE æque multiples, et ipsarum DF alia vtrumque æque multiples: et multiplex quidem C superat multiplicē D; multiplex vero E non superat multiplicem F. Sumantur, et sint ipsarum CE æquemultiples GH, et ipsarum DF alia vtrumque æquemultiples KL, ita vt G quidem superet K; H vero ipsam L non superet: et quotuplex est G ipsius C, totuplex sit et M ipsius A; quotuplex autem K ipsius D, totuplex sit et N ipsius B. et quoniam est vt A ad B, ita C ad D, et sumptæ sunt ipsarum AC æquemultiples MG, et ipsarum BD alia vtrumque æque multiples NK: si M superat N, et G ipsam K superabit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor sed G superat K. ergo & M ipsam N superabit. H vero non-

E V C L I D. E L E M E N T.

7. diffi.

superat l. suntq; MH ipsarum AE æque multiplices; et NL ipsarum BF aliæ vt cum quæ æque multiplices. ergo A ad B maiorem proportionem habebit, quàm E ad F. si igitur prima ad secundam eandem habeat proportionem, quàm tertia ad quartam; tertia vero ad quartam maiorem proportionē habeat, quàm quinta ad sextam: et prima ad secundam maiorem habebit proportionem, quàm quinta ad sextam. quod ostendere oportebat.

F. C. C O M M E N T A R I V S.

Eodem modo demonstrabitur si prima ad secundam eandem habeat proportionem, quàm tertia ad quartam; tertia autem ad quartam minorem proportionem habeat, quàm quinta ad sextam: et primam ad secundam minorem proportionem habere, quàm quintam ad sextam.

Quod si prima ad secundam maiorem habeat proportionē, quàm tertia ad quartam; tertia autem ad quartam maiorem habeat, quàm quinta ad sextam: et prima ad secundam maiorem proportionem habebit, quàm quinta ad sextam.

8. huius

Habeat A ad B maiorem proportionem, quàm C ad D, & C ad D maiorem habeat, quàm E ad F. dico A ad B maiorem habere proportionem, quàm E ad F. fiat enim vt C ad D, ita G ad B. erit G minor, quàm A. & quoniam G ad B eandem proportionem habet, quàm C ad D, & C ad D maiorem habet proportionem; quàm E ad F: habebit & G ad B maiorem proportionem, quàm E ad F. quare A ad B multo maiorem proportionem habebit, quàm E ad F. & similiter demonstrabitur si prima ad secundam minorem proportionem habeat, quàm tertia ad quartam; tertia vero ad quartam habeat minorem, quàm quinta ad sextam: & primam ad secundam minorem habere proportionem, quàm quintam ad sextam.

T H E O R E M A X I I I. P R O P O S I T I O. X I I I.

Si prima ad secundam eandem habeat proportionem, quàm tertia ad quartam; prima autem maior sit, quàm tertia: & secunda quàm quarta maior erit; & si æqualis, æqualis; et minor, minor.

8. huius.

Ex antecedente.
10. huius.

A
B

Prima enim A ad secundam B eandem proportionem habeat, quàm tertia C ad quartam D: maior autem sit A quàm C. dico et B quàm D maiorem esse. quoniam enim A maior est quàm C, et alia utriusque magnitudo B; habebit A ad B maiorem proportionem, quàm C ad B. sed vt A ad B, ita C ad D. ergo et C ad D maiorem habebit proportionem, quàm C ad B. ad quam vero eandem maiorem proportionem habet, ille minor est. quare D est minor, quàm B: ac propterea B quàm D maior erit. Similiter demonstrabimus et si A æqualis sit ipsi C; et B ipsi D esse æqualem: et si A sit minor, quàm C; et B quàm D minorem esse. Si igitur prima ad secundam eandem habeat proportionem, quàm tertia ad quartam; prima autem maior sit, quàm tertia: & secunda, quàm quarta maior erit; & si æqualis, æqualis; et si minor, minor. quod demonstrare oportebat.

S C H O L I V M.

Hoc lemma est sextidecimi theorematís, quemadmodum vigesimam

num est lemma vigesimi secundi, & vigesimum primum vigesimi tertij.

F. C. COMMENTARIUS.

Similiter demonstrabimus et si A æqualis sit ipsi C, et B ipsi D esse æqualem] A
Quoniam enim A est æqualis C, habebit A ad B eandem proportionem, quam C ad B. vt autem
A ad B, ita C ad D. ergo & C ad D eandem habebit, quam C ad B. ad quas autem eadem eandem
habet proportionem ipsæ æquales sunt. ergo B ipsi C est æqualis. 11. huius.
9. huius.

Et si A sit minor, quàm C, et B quàm D minorem esse,] nam cum A minor sit, quàm C; 8. huius.
habebit A ad B minorem proportionem quàm C ad B. sed vt A ad B, ita C ad D. quare ex antecede
dente & C ad D minorem habebit proportionem, quàm C ad B; ac propterea C ad B maiorem ha
bebit, quàm C ad D. ergo B quàm D minor erit. 10. huius.

THEOREMA XV. PROPOSITIO XV.

Partes eodem modo multiplicium inter se cõ
paratæ eandem habent proportionem.

Sit enim AB æque multiplex C, et DE ipsius F. Dico vt C
ad F, ita esse AB ad DE; Quoniam enim æque multiplex est A
B ipsius C, et DE ipsius F; quot magnitudines sunt in AB æ
quales ipsi C, totidem erunt et in DE æquales F. diuidatur A
B in magnitudines ipsi C æquales, quæ sint AG GH HB. et
DE diuidatur in magnitudines equales F, videlicet in DK K
L LE. erit igitur ipsarum AG GH HB multitudo æqualis
multitudini DK KL LE. et quoniam æquales sunt AG GH
HB, suntq; DK KL LE inter se æquales; vt AG ad DK, ita
erit GH ad KL, et HB ad LE. atque erit vt vnum anteceden
tium ad vnum consequentium, ita omnia antecedentia ad
omnia consequentia. est igitur vt AG ad DK, ita AB ad DE.
Sed AG ipsi C est æqualis, et DK ipsi F. ergo vt C ad F, ita erit
AB ad DE. partes igitur eodem modo multiplicium inter se
comparatæ eandem habent proportionem. quod osten
dendum fuit.

F. C. COMMENTARIUS.

Vt AG ad DK, ita erit GH ad KL, et HB ad LE.] Ex ea,
quam nos ad septimam huius, addidimus.

THEOREMA. XVI. PROPOSITIO XVI.

Si quattuor magnitudines proportionales fue
rint, et permutatæ proportionales erunt.

Sint quattuor magnitudines proportionales ABCD, sitq;
vt A ad B, ita C ad D. Dico et permutatas proportionales es
se, videlicet vt A ad C, ita esse B ad D. sumantur enim ipsarû
quidem AB æque multiplicēs EF; ipsarum vero CD aliæ vt
cumque æque multiplicēs GH. et quoniam æque multiplex
est E ipsius A, et F ipsius B; partes autem eodem modo mul
tiplicium inter se comparatæ eadem habent proportionem:
erit vt A ad B, ita E ad F: vt autem A ad B, ita C ad D. ergo &
vt C ad D, ita E ad F. rursus quoniam GH sunt ipsarum CD
æque multiplicēs, partes autem eodem modo multiplicium

E V C L I D . E L E M E N T .

14. huius.

1. diffi.

eandem proportionem habent inter se comparata, erit ut C ad D, ita G ad H. sed ut C ad D, ita E ad F. ergo ut E ad F, ita G ad H. Quod si quatuor magnitudines proportionales sint, prima autem maior sit, quam tertia; et secunda quam quarta maior erit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Si igitur E superat C, et F ipsam H superabit, et si æqualis, æqualis; et si minor, minor; suntque EF ipsarum AB æque multiplices, et CH ipsarum CD alie utcumque æque multiplices. ergo ut A ad C, ita erit B ad D. Si igitur quatuor magnitudines proportionales fuerint, et permutatæ proportionales erunt. quod ostendere oportebat.

F. C. C O M M E N T A R I U S .

Ex ijs, quae demonstrata sunt, illud quoque demonstrabitur.

Si prima ad secundam eandem proportionem habeat, quam tertia ad quartam; sitque prima maior, quam secunda: et tertia, quam quarta maior erit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor.

8. huius.

10. huius.

7. huius.

9. huius.

8. huius.

10. huius.

Prima enim A ad secundam B eandem habet proportionem, quam tertia C ad quartam D: & sit A maior, quam B. Dico & C quam D maiorem esse. Quoniam enim A ad B eandem proportionem habet, quam C ad D; habebit permutando ex antecedente A ad C eandem proportionem, quam B ad D. Rursus quoniam A maior est quam B, alia vero ratio que est C; habebit A ad C maiorem proportionem, quam B ad C. Sed ut A ad C, ita est B ad D, quod demonstratum est. ergo B ad D maiorem proportionem habet, quam ad C. Ad quam vero eadem maiorem habet proportionem, illa minor est. quare D minor est, quam C ideoque C maior, quam D. Sit deinde A æqualis ipsi B. dico & C ipsi D æqualem esse. nam cum A & B sint æquales, habebit A ad C proportionem eandem, quam B ad C. ut autem A ad C, ita B ad D. ergo B ad D eandem proportionem habet, quam ad C. Ad quas vero eandem proportionem eandem habet, illae æquales sunt. ergo C ipsi D est æqualis. Sit porro firemo A minor, quam B. Dico & C, quam D minorem esse. quoniam enim A minor est quam B, habebit A ad C minorem proportionem, quam B ad C. Sed ut A ad C, ita B ad D. habebit igitur B ad D minorem proportionem, quam ad C. ideoque B ad C maiorem proportionem habebit, quam ad D. Ad quam vero eadem maiorem habebit proportionem, illa minor est. ergo C quam D minor erit. si igitur prima ad secundam eandem proportionem habeat, quam tertia ad quartam: sitque prima maior, quam secunda, & tertia, quam quarta maior erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor.

A L I T E R. Habeat A ad B eandem proportionem, quam C ad D: sitque A maior, quam B. Dico & C, quam D maiorem esse. Quoniam enim A ad B eandem proportionem habet quam C ad D; habebit permutando A ad C eandem proportionem, quam B ad D. sed A maior est quam B. ergo ex 14 huius & C, quam D maior erit. Eodem modo demonstrabimus si A sit æqualis B, & C ipsi D esse æqualem. & si A sit minor, quam B, & C quam D minorem esse. quod demonstrare oportebat.

T H E O R E M A X V I I . P R O P O S I T I O . X V I I .

Si compositæ magnitudines sint proportionales, et diuisæ proportionales erunt.

Sint compositæ magnitudines proportionales AB BE CD DF. sitque ut AB ad BE, ita CD ad DF. dico etiam diuisas proportionales esse, videlicet ut AE ad EB, ita

ita esse CF ad FD. fumantur enim ipsarum quidem AE EB CF FD æque multiples GH HK LM MN, ipsarum vero EB FD alia vtrumque æque multiples KX NP. et quoniam æque multiplex est GH ipfius AE, et HK ipfius EB; erit GH ipfius AE æque multiplex, et GK ipfius AB. æque autem multiplex est GH ipfius AE, et LM ipfius CF. ergo GK æque multiplex est AB, et LN ipfius CF. rursus quoniam æque multiplex est LM ipfius CF, et MN ipfius FD; erit LM æque multiplex CF, et LN ipfius CD. Sed æque multiplex erat LM ipfius CF, & GK ipfius AB; igitur multiplex est GK ipfius AB, et LN ipfius CD. quare GK LN ipsarum AB CD æque multiples erunt. rursus quoniam æque multiplex est HK ipfius EB, et MN ipfius FD, est autem et KX ipfius EB æque multiplex, & NP ipfius FD; & composita HX ipfius EB æque multiplex est, et MP ipfius FD. quod cum sit vt AB ad BE, ita CD ad DF. et sumptæ sint ipsarum quidem AB CD æque multiples CK LN; ipsarum vero EB FD alia vtrumque æque multiples HX MP; si GK superat HX, & LN superabit MP; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. superet igitur GK ipsam HX, communiq; ablata HK, et GH ipsam KX superabit. sed si GK superat HX, & LN superat MP. itaque superet LN ipsam MP, communiq; MN ablata, & LM superabit NP. quare si GH superat KX, & LM ipsam NP superabit. Similiter demonstrabimus & si GH sit æqualis KX, & LM ipsi NP esse æqualem, & si minor, minorem. sunt autem GH LM ipsarum AE CF æque multiples, & ipsarum EB FD alia vtrumque æque multiples KX NP. ergo vt AE ad EB, ita erit CF ad FD. Si igitur compositæ magnitudines sint proportionales, & diuisæ proportionales erunt. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XVIII.

Si diuisæ magnitudines sint proportionales, & compositæ proportionales erunt.

Sint diuisæ magnitudines proportionales AE EB CF FD: & vt AE ad EB, ita CF ad FD. Dico etiam compositas proportionales esse, videlicet vt AB ad BE, ita esse CD ad DF. Si enim non est vt AB ad BE, ita CD ad DF; erit vt AB ad BE, ita CD vel ad minorem, quam D F, vel ad maiorem. sit primū ad minorem, nēpe ad DG. & qm est vt AB ad BE, ita CD ad DG, compositæ magnitudines sunt proportionales. ergo et diuisæ proportionales erūt. est igitur vt AE ad EB, ita CG ad GD. ponitur autē & vt AE ad EB, ita CF ad FD. quare & vt CG ad GD, ita CF ad FD. at CG prima maior est, quā tertia CF. ergo & secūda DG, quā quarta DF maior erit. sed & minor, quod fieri non potest. non igitur est vt AB ad BE, ita CD ad DG. similiter ostendemus neque esse ad maiorem, quā DF. ad ipsam igitur DF sit necesse est. quare si diuisæ magnitudines sint proportionales, & compositæ proportionales erunt. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XIX.

Si fuerit vt tota ad totam, ita ablata ad ablatam; & reliqua ad reliquam erit, vt tota ad totam.

Sit enim vt tota AB ad totam CD, ita ablata AE ad ablatam CF. Dico et reliquā

R² EB

E V C L I D . E L E M E N T .

16. huius.

17. huius.

11. huius.

EB ad reliquam FD ita esse, vt totam AB ad totam CD. quoniā enim est vt tota AB ad totam CD, ita AE ad CF; & permutando erit vt B A ad AE, ita DC ad CF. et quoniam compositæ magnitudines sunt proportionales, & diuisæ proportionales erunt. vt igitur BE ad EA, ita DF ad FC, rursumq; permutando vt BE ad DF, ita EA ad FC. sed vt AE ad CF, ita posita est AB ad CD. et reliqua igitur EB erit ad reliquam FD, vt tota AB ad totam CD. quare si fuerit vt tota ad totā, ita ablata ad ablatam; & reliqua ad reliquam, erit vt tota ad totam. quod demonstrare oportebat.

Et quoniam ostensum est vt AB ad CD, ita esse EB ad FD, erit permutando vt AB ad BE, ita CD ad DF. ergo compositæ magnitudines proportionales sunt. ostensum autem est vt BA ad AE, ita DC ad CF, quod est per conuersionem rationis.

C O R O L L A R I V M .

Ex hoc igitur perspicuum est si compositæ magnitudines sint proportionales; & per conuersionem rationis proportionales esse.

Factæ autem sunt proportionales et in æque multiplicibus, et in analogijs. nam si prima secundæ æque multiplex sit, atque tertia quartæ; erit et vt prima ad secundā, ita tertia ad quartam. sed non item ex contrario conuertitur. Si enim sit vt prima ad secundam, ita tertia ad quartam; nō omnino erit prima quidem secundæ æque multiplex, tertia vero quartæ, velut in sesquialteris, vel in sesquiterijs proportionibus, vel alijs cuiusmodi. quod demonstrare oportebat.

T H E O R E M A . X X . P R O P O S I T I O . X X .

Si sint tres magnitudines, et alię ipsis numero æquales, quæ binę sumantur, et in eadem proportionē; ex æquali autem prima maior sit, quā tertia: et quarta quā sexta maior erit; & si æqualis, æqualis; et si minor, minor.

Sint tres magnitudines A B C, et aliæ ipsis numero æquales D E F binæ sumptæ, et in eadem proportionē, sitq; vt A ad B, ita D ad E; et vt B ad C, ita E ad F; ex æquali autem maior sit A, quā C. Dico et D quā F maiorem esse; et si æqualis, æqualem; et si minor, minorem. Quoniam enim A maior est, quā C, alia vero vt-cumque B, et maior ad eandem maiorem habet proportionem, quā C ad B. Sed vt A ad B, ita D ad E: et conuertendo vt C ad B, ita F ad E. ergo et D ad E maiorem habet proportionem, quā F ad E. Ad eandem vero proportionem habentium quæ maiorem habet proportionem, illa maior est. maior igitur est D quā F. si militer ostendemus et si A sit æqualis C, et D ipsi F æqualem esse; et si minor, minorem. Si igitur tres magnitudines fuerint, et aliæ ipsis numero æquales, quæ binę sumantur, et in eadem proportionē; ex æquali autem prima maior sit, quā tertia: et quarta quā sexta maior erit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. quod ostendere oportebat.

F . C . C O M M E N T A R I V S .

A - Habebit A ad B maiorem proportionē, quā C ad B. sed vt A ad B, ita D ad E] Ex

Ex his sequitur per decimamtertiam huius D ad E maiorem proportionem habere, quam C ad B. ut autem C ad B; ita F ad E. quare per eandem D ad E maiorem habet proportionem, quam F ad E.

Similiter ostendemus et si A sit æqualis C, et D ipsi F æqualem esse; et si minor, minorem.]

Si enim A sit æqualis C, habebit A ad B proportionem eandem, quam C ad B. Sed ut A ad B, ita D ad E, & ut C ad B, ita F ad E. quare D ad E eandem proportionem habebit, quam F ad E. quæ vero ad eandem, eandem habent proportionem, inter se æquales sunt. ergo D ipsi F est æqualis. Quod si A ponatur minor quam C, habebit A ad B proportionem minorem, quam C ad B. ut autem A ad B, ita D ad E. ergo D ad E minorem proportionem habet, quam C ad B. Sed ut C ad B, ita F ad E. habebit igitur D ad E minorem proportionem, quam F ad E; ac propterea D quam F, minor erit.

B

7. huius.

11. huius.
9. huius.

8. huius.

13. huius.

10. huius.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXI.

Si sint tres magnitudines, et aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur, et in eadem proportionem; sit autem perturbata earum analogia, et ex æquali prima maior sit quam tertia: et quarta quam sexta maior erit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor.

Sint tres magnitudines proportionales ABC, et alię ipsis numero æquales DEF, binæ sumptæ, et in eadem proportionem. sit autem perturbata earum analogia, videlicet ut A quidem ad B, ita E ad F; ut vero B ad C, ita D ad E; et ex æquali A maior sit, quam C. Dico et D quam F maiorem esse; et si æqualis, æqualem; et si minor, minorem. Quoniam enim maior est A, quam C, alia vero B; habebit A ad B maiorem proportionem, quam C ad B. Sed ut A ad B, ita E ad F, et conuertendo ut C ad B, ita E ad D. quare et E ad F maiorem habebit proportionem, quam E ad D. ad quam vero eadem maiorem proportionem habet, illa minor est. minor igitur est F, quam D; ac propterea D quam F maior erit. Similiter ostendemus et si A sit æqualis C, et D ipsi F æqualem; et si minor, minorem. Si igitur sint tres magnitudines, et aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ sumantur, et in eadem proportionem; sit autem perturbata earum analogia, et ex æquali prima maior sit, quam tertia: et quarta quam sexta maior erit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. quod demonstrare oportebat.

8. huius.

10. huius.

THEOREMA XXII. PROPOSITIO. XXII.

Si sint quocumque magnitudines, et aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eadem proportionem; et ex æquali in eadem proportionem erunt;

Sint

Sint quotcumque magnitudines $A B C$, et alia ip-
sis numero ξ quales DEF binę sumptę in eadem pro-
portione, sitq; ut A quidem ad B , ita D ad E ; ut au-
tem B ad C , ita E ad F . Dico et ex α quali in eadem
proportionem esse vt A ad C , ita D ad F . sumantur
enim ipsarum quidem $A D$ aque multipl. ces GH ;
ipsarum vero BE alię vtcumque aque multipl. ces
 KL , et ipsarum CF alię vtcumque aque multipl. ces
 MN . Quoniam igitur est vt A ad B , ita D ad E , et sum-
ptę sunt ipsarum AD ξ que multipl. ces GH , et ip-
sarum BE alię vtcumque aque multipl. ces KL ; erit vt
 G ad K , ita H ad L . eadem quoque ratione erit vt K
ad M , ita L ad N . et cū sint tres magnitudines GKM ,
et alię ipsis numero ξ quales HLN , binę sumptę,
et in eadem proportione; ex α quali si G superat M ,
et H ipsā N superabit; et si α qualis, α qualis; et si mi-
nor, minor; suntq; GH ipsarū AD α q; multipl. ces, et
 MN ipsarum CF alię vtcumque aque multipl. ces.
vt igitur A ad C , ita erit D ad F . quare si sint quot-
cumque magnitudines, et alię ipsis numero ξ qua-
les, quę binę sumantur, in eadem proportione; et ex
 ξ quali in eadem proportione erunt. quod demon-
strare oportebat.

4. huius.

20. huius.

5. diffi.

F. C. C O M M E N T A R I V S.

Idem demonstrabitur etiam si plures sint, quā tres magnitudines.

Sint enim quattuor magnitudines ABC

D , et alia ipsis numero ξ quales $EFGH$

binę sumptę in eadem proportione, sitq;

vt A ad B , ita E ad F , ut aut B ad C , ita

F ad G , et vt C ad D , ita G ad H . Dico

ex α quali vt A ad D , ita esse E ad H .

Quoniam enim est vt A ad B , ita E ad F ,

et vt B ad C , ita F ad G ; et ex α quali per

ea, quę proxime ostensa sunt, vt A ad C ,

ita erit F ad G , estq; vt C ad D , ita G ad H .

Quare cum rursus tres magnitudines sint

ACD , et alia ipsis numero ξ quales EGH

binę sumptę in eadem proportione; erit

ex α quali vt A ad D , ita E ad H . quod

demonstrare oportebat. Et eodē modo de-

monstrabitur in alijs eiusmodi magnitudinibus quotquot fuerint, non

solum in ordinata analogia, sed et in perturbata. semper enim ad tres magnitudines eiusdem or-

dinis similiter reducuntur.

T H E O R E M A . XXIII. P R O P O S I T I O . XXIII.

Si sint tres magnitudines, et alia ipsis numero α quales, quę
binę sumantur in eadem proportione, sit autem perturbata ear-
um analogia; et ex α quali in eadem proportione erunt.

Sint tres magnitudines A B C, et alię ipfis numero æquales binę sumptę in eadem proportionē DEF; sit autem perturbata earum analogia, et sit vt A ad B, ita E ad F, & vt B ad C, ita D ad E. Dico vt A ad C, ita esse D ad F. sumantur ipsarum quidem A B D æque multiples GHK; ipsarum vero CEF alię vtcumque æque multiples L M N. & quoniam GH æque multiples sunt ipsarum A B, partes autem eodem modo multiplicium eādem habent proportionem; erit vt A ad B, ita G ad H. & simili ratione vt E ad F, ita M ad N. atque est vt A ad B, ita E ad F. vt igitur G ad H, ita M ad N. rursus quoniam est vt B ad C, ita D ad E, & sumptę sunt ipsarū B D æque multiples H K; ipsarum vero C E alię vtcumque æque multiples L M; erit vt H ad L, ita K ad M. ostensum autem est et vt G ad H, ita esse M ad N. Quoniam igitur tres magnitudines proportionales sunt G H L, & alię ipfis numero æquales K M N binę sumptę in eadem proportionē, estq; ipsarum perturbata analogia; ex æquali si G superat L, & K ipsam N superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. sunt autem GK ipsarū A D æque multiples: & LN æque multiples ipsarum CE. vt igitur A ad C, ita erit D ad F. quare si fuerint tres magnitudines, & alię ipfis numero æquales, quę binę sumantur in eadem proportionē, sit aut perturbata earum analogia; & ex æquali in eadem proportionē erunt. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIUS.

Dico vt A ad C, ita esse D ad F] *in greco codice impresso hæc desiderantur. λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ α πρὸς τὸ γ ὅντος τὸ δ πρὸς τὸ ε*

Erit vt H ad L, ita K ad M. ostensum autem est vt G ad H, ita esse M ad N] *hæc loco in greco codice impresso, & in zamberti versione multa inferuntur superuacanea, quæ a nobis consulto omissa sunt.*

THEOREMA XXIIII. PROPOSITIO. XXIIII.

Si prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam, habeat autem & quinta ad secundam proportionem eandem, quam sexta ad quartam: & composita prima & quinta ad secundam eandem proportionem habebit, quam tertia, & sexta ad quartam.

Prima enim AB ad secundam C eandem habeat proportionem, quam tertia DE ad quartam F. habeat autem & quinta BG ad secundam C proportionem eandem, quam sexta EH ad quartam F. dico & compositam primam, & quintam AG ad secundam C eandem proportionem habere, quam tertiam, & quintam DH ad quartam

E V C L I D . E L E M E N T .

11. huius.

tam F. quoniam enim est vt BG ad C, ita EH ad F; erit conuer-
tendo vt C ad BG, ita F ad EH. & quoniam vt AB ad C, ita est
DE ad F, vt autem C ad BG, ita F ad EH; erit ex equali vt AB
ad BG, ita DE ad EH. quòd cum diuise magnitudines sint pro-
portionales, & compositæ proportionales erunt. vt igitur AG
ad GB, ita est DH ad HE. sed & vt GB ad C, ita EH ad F. ergo
ex æquali vt AG ad C, ita erit DH ad F. si igitur prima ad secu-
dam eandem habeat proportionem, quàm tertia ad quartam;
habeat autem & quinta ad secundam proportionem eandem,
quam sexta ad quartam; & composita prima & quinta ad secun-
dam eandem proportionem habebit, quam tertia & sexta ad
quartam. quod ostendere oportebat.

THEOREMA XXV. PROPOSITIO. XXV.

Si quattuor magnitudines fuerint proportiona-
les, maxima ipsarum, & minima duabus reliquis
maiores erunt.

19. huius.

Sint quattuor magnitudines proportionales AB CD E F;
& sit vt AB ad CD, ita E ad F. sit autem maxima ipsarum AB &
F minima. Dico AB F ipsis CD E maiores esse. ponatur enim ip-
si quidem E equalis AG, ipsi vero F equalis CH. Quoniam igitur
est vt AB ad CD, ita E ad F; estq; AG equalis E, & CH æqua-
lis F; erit vt AB ad DC, ita AG ad CH. & quoniam vt tota AB
ad totam CD, ita ablata AG ad ablatam CH; & reliqua GB ad
reliquam HD erit vt tota AB ad CD totam. maior autem est A
B, quàm CD. ergo & GB, quàm HD maior. quòd cum AG sit æ-
qualis ipsi E, & CH ipsi F; erunt AG F ipsis CH E æquales. si au-
tem inæqualibus æqualia addantur, tota inæqualia erunt. ergo
GB HD inæqualibus existentibus, quippe cum GB sit maior, si
ipsi quidem GB addantur AG F, ipsi vero HD addantur CH
E, fient AB F ipsis CD E necessario maiores. Si igitur quattuor
magnitudines fuerint proportionales, maxima ipsarum & minima
duabus reliquis maiores erunt. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIUS.

Fixis, quæ proxime demonstrata sunt, possumus etiam illud theorema
demonstrare.

Sit tres magnitudines fuerint proportionales, maxima ipsarum
& minima quàm dupla reliquæ maiores erunt.

19. huius.

Sint tres magnitudines proportionales AB CD E, quarum maxima AB,
sitq; vt AB ad CD, ita CD ad E. Dico AB E maiores esse, quàm duplam ip-
sius CD. ponatur AF æqualis ipsi CD, & CG ipsi E. Quoniam igitur vt AB
ad CD, ita CD ad E; erit vt AB ad CD, ita AF ad CG, videlicet vt tota ad to-
tam, & ablata ad ablatam. quare & reliqua FB ad reliquam GD est, vt AB
ad CD. sed AB ponitur maior, quàm CD. ergo & FB, quàm GD est maior. æ-
qualis autem est AF ipsi CD, & CG ipsi E. Sunt igitur AF E ipsis CD CG
æquales. quòd si inæqualibus æqualia addantur, tota inæqualia erunt. itaque
additis AF E ipsi FB, quæ maior est, quàm GD, & additis CD CG ipsis GD,
fient AB E maxima scilicet, & minima maiores, quàm dupla CD. Si igitur
tres magnitudines fuerint proportionales maxima ipsarum & minima, quàm dupla reliquæ ma-
iores erunt. quod demonstrare oportebat.

Aliter.

Aliter. Sint tres magnitudines proportionales ABC , & ipsi B po-
nuntur æqualis D . Itaque quoniam est ut A ad B , ita B ad C , erit &
ut A ad B , ita D ad C , sunt igitur quattuor magnitudines proportio-
nales $ABDC$, quare ex iam demonstratis AC maiores erunt, quàm B
 D , hoc est quàm ipsius AB dupla.

Hec Euclides de proportionibus scripta reliquit. Sed quoniam Ar-
chimedes, Apollonius, & alij posteriores nonnullis theorematibus,
quæ ad huiusmodi tractationem pertinent, tamquam demonstratis
videntur; optimum fore indicauimus, si ex collectionibus mathemati-
cis Pappi ea in hunc locum transferremus, immutato tamen ordine,
& quibusdam additis, distractisque, prout res ipsa exigere videbatur.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO. XXVI.

*Si prima ad secundam maiorem habeat proportionem, quàm tertia
ad quartam; & conuertendo secunda ad primam minorem proportionem
habebit, quàm quarta ad tertiam.*

Habeat AB ad BC maiorem proportionem, quàm DE ad EF . Dico CB ad BA minorem
proportionem habere, quàm FE ad ED . ut
enim AB ad BC , ita sit DE ad aliam aliquam,
ut ad G . ergo DE ad G maiorem habebit pro-
portionem, quàm DE ad EF ; ac propterea G
minor erit, quàm EF . ponatur ipsi G æqualis
 EH . Quoniam igitur est ut AB ad BC , ita DE ad EH , erit conuertendo ut CB ad B
 A , ita HE ad ED . sed HE ad ED minorem proportionem habet, quàm FE ad ED . er-
go & CB ad BA minorem habebit proportionem, quàm FE ad ED . quod demon-
strare oportebat.

Similiter, autem, & si AB ad BC minorem
proportionem habeat, quàm DE ad EF ; demon-
strabimus conuertendo CB ad BA maiorem ha-
bere proportionem, quàm FE ad ED . sed ut A
 B ad BC , ita sit DE ad aliam, ut ad G , quæ ma-
ior erit, quàm EF . quare conuertendo ut CB ad
 BA , ita GE ad ED . at GE ad ED maiorem habet proportionem, quàm FE ad ED . er-
go CB ad BA maiorem proportionem habebit, quàm FE ad ED .

*Ex his constat, si AB ad BC maiorem proportionem habeat, quàm
 DE ad EF , & FE ad ED maiorem habere proportionem, quàm CB ad
 BA , & si AB ad BC minorem habeat proportionem, quàm DE ad E
 F , & FE ad ED minorem habere, quàm CB ad BA .*

THEOREMA XXXVII. PROPOSITIO. XXXVII.

*Si prima ad secundam maiorem habeat, quàm tertia ad
quartam; & permutando prima ad tertiam maiorem habebit propor-
tionem, quàm secunda ad quartam.*

Habeat

8. huius.
8. huius.

Habeat AB ad BC maiorem proportionem, quàm DE ad EF. Dico AB ad DE maiorem proportionem habere, quàm BC ad EF. vt enim AB ad BC, ita alia quædam GE sit ad EF. manifestum est eam maiorem esse, quàm DE. quare permutato vt AB ad GE, ita est BC ad EF. habet autem AB ad DE maiorem proportionem, quàm AB ad GE, hoc est quàm BC ad EF. ergo AB ad DE maiorem proportionem habebit, quàm BC ad EF. quod oportebat demonstrare.

Eadem ratione & si AB ad BC minorem habeat proportionem, quàm DE ad EF; sequetur permutando AB ad DE minorem proportionem habere, quàm BC ad EF. erit enim vt AB ad BC, ita alia quædam GE ad EF, quæ minor sit, quàm DE. Sed AB ad DE minorem habet proportionem, quàm AB ad GE, videlicet quàm BC ad EF. habebit igitur AB ad DE minorem, proportionem, quàm BC ad EF.

THEOREMA. XXVIII. PROPOSITIO. XXVIII.

Si prima ad secundam maiorem proportionem habeat, quàm tertia ad quartam; etiam componendo prima & secunda ad secundam maiorem proportionem habebit, quàm tertia & quarta ad quartam.

8. huius.
18. huius.
8. huius.
13. huius.

Habeat AB ad BC maiorem proportionem, quàm DE ad EF. Dico AC ad CB maiorem habere proportionem, quàm DF ad FE. vt enim AB ad BC, ita sit alia quædam GE ad EF. erit GE maior, quàm DE. quoniam igitur est vt AB ad BC, ita GE ad EF; erit componendo vt AC ad CB, ita GF ad FE. Sed GF ad FE maiorem proportionem habet, quàm DF ad FE. ergo & AC ad CB maiorem habebit proportionem, quàm DF ad FE. quod demonstrare oportebat.

Quod si AB ad BC minorem proportionem habeat, quàm DE ad EF; habebit etiam componendo AC ad CB minorem proportionem, quàm DF ad FE: rursus enim quoniam AB ad BC minorem proportionem habet, quàm DE ad EF, si vt AB ad BC, ita sit alia quædam ad EF, velut GE, erit ea minor quàm DE; & vt AC ad CB, ita erit GF ad FE. Sed GF ad FE minorem habet proportionem, quàm DF ad FE. ergo & AC ad CB minorem proportionem habebit quàm DF ad FE.

THEOREMA. XXIX. PROPOSITIO. XXIX.

Si prima & secunda ad secundam maiorem habeat proportionem, quàm tertia, & quarta ad quartam; & diuidendo prima ad secundam maiorem proportionem habebit, quàm tertia ad quartam.

8. huius.

Habeat AC ad CB maiorem proportionem, quàm DF ad FE. Dico AB ad BC maiorem proportionem habere, quàm DE ad EF. vt enim DF ad FE, ita sit alia quædam GC ad CB. erit vtique GC minor,

quàm

quàm AC: & diuidendo GB ad BC, vt DE ad EF. at AB ad BC maiorem proportionem habet, quàm GB ad BC. ergo & AB ad BC maiorem habebit proportionem, quàm DE ad EF. 17. huius.

Si vero AC ad CB minorem habeat proportionem, quàm DF ad FE; & diuidendo AB ad BC minorem proportionem habebit, quàm DE ad EF. si enim rursus fit vt DF ad FE, ita aliqua GC ad CB; erit GC quàm AC maior: atque erit diuidendo GB ad BC, vt DE ad EF. habet autem AB ad BC minorem proportionem, quàm GB ad BC. ergo & minorem proportionem habebit, quàm DE ad EF. 17. huius.

THEOREMA XXX. PROPOSITIO XXX.

Si prima & secunda ad secundam maiorem proportionem habeat, quàm tertia & quarta ad quartam; per conuersionem rationis prima & secunda ad primam minorem habebit proportionem, quàm tertia & quarta ad tertiam.

Habeat AC ad CB maiorem proportionem, quàm DF ad FE. Dico CA ab AB minorem habere proportionem, quàm FD ad DE. Sit enim vt AC ad CB, ita DF ad aliam quādam, erit vtique ad minorem, quàm FE, velut ad FG. quare per conuersionem rationis vt CA ad AB, ita erit FD ad D G. sed F D ad DG minorem proportionem habet, quàm FD ad DE. ergo & CA ad AB minorem habebit proportionem, quàm FD ad DE. Corol. 9. huius.

Similiter autem & si AC ad CB minorem proportionem habeat, quàm DF ad FE; habebit per conuersionem rationis CA ad AB maiorem proportionem, quàm FD ad DE. erit enim vt AC ad CB, ita DF ad maiorem quàm FE. reliqua vero manifesta erunt. 12. huius.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO XXXI.

Si prima ad tertiam maiorem proportionem habeat, quàm secunda ad quartam, etiam prima ad tertiam habebit maiorem proportionem, quàm prima & secunda ad tertiam, & quartam.

Habeat AB ad DE maiorem proportionem, quàm BC ad EF. Dico & AB ad DE maiorem proportionem habere, quàm AC ad DF. Sit enim vt AB ad DE, ita BC ad aliam. erit igitur ad minorem, quàm EF, velut ad EG. tota igitur AC ad totam DG est; vt AB ad DE. Sed AC ad DG maiorem proportionem habet, quàm ad DF. ergo AB ad DE maiorem habebit proportionem, quàm AC ad DF. et manifestum est totam AC ad totam DF minorem proportionem habere, quàm AB ad DE. & si minor sit proportio partis, totius maior erit. 12. huius.

THEOREMA XXXII. PROPOSITIO XXXII.

Si tota ad totam maiorem habeat proportionem, quàm ablata ad abla

EVCLID. ELEMENT.

tam, & reliqua ad reliquam maiorem proportionem habebit, quàm tota ad totam.

Habeat AC ad DF maiorem proportionē, quàm AB ad DE. Dico & reliquam BC ad reliquam EF maiorem proportionem habere, quàm AC ad DF. Sit enim vt A C ad DF, ita AB ad D G. ergo et reliqua B C ad reliquam GF eff vt AC ad DF. Sed BC ad EF maiorem proportionem habet, quàm ad FG. ergo et BC ad EF maiorem habebit proportionem, quàm AC ad DF.

Si uero AC ad DF minorem proportionem habeat, quàm AB ad DE, et reliqua BC ad reliquam EF minorem proportionem habebit, quàm AC ad DF, quod eodem, quo supra, modo ostenditur.

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XXXIII.

Si sint tres magnitudines, & alia ipsis numero aequales, habeatque prima priorum ad secundam maiorem proportionem, quàm prima posteriorum ad secundam; secunda uero priorum ad tertiam maiorem proportionem habeat, quàm secunda posteriorum ad tertiam: etiam ex aequali prima priorum ad tertiam maiorem habebit proportionem, quàm prima posteriorum ad tertiam.

Habeat A ad B maiorem proportionem, quàm D ad E, & B ad C maiorem proportionem habeat, quàm E ad F. Dico ex æquali A ad C maiorem habere proportionem, quàm D ad F. Quoniā enim A ad B maiorem proportionem habet, quàm D ad E; habebit permutando A ad D maiorem proportionem, quàm B ad E, et eadem ratione B ad E maiorem, quàm C ad F. ergo A ad D maiorem habet proportionem, quàm C ad F. et rursus permutando A ad C maiorem habebit, quàm D ad F. quod oportebat demonstrare.

17. huius.

Ex demonstratis ad 13. huius.
27. huius.

Quod si prima priorum ad secundam minorem habeat proportionem, quàm prima posteriorum ad secundam; secunda uero priorum ad tertiam minorem proportionem habeat, quàm secunda posteriorum ad tertiam: similiter demonstrabitur etiam ex æquali primam priorum ad tertiam minorem proportionem habere, quàm primam posteriorum ad tertiam.

QVINTI LIBRI FINIS.

E V C L I D I S ELEMENTORVM

LIBER SEXTVS

CVM SCHOLIIS ANTIQVIS,
ET COMMENTARIIS

Federici Commandini Vrbinatis.

DIFFINITIONES.

SIMILES
figurę recti-
lineā sunt,
quę et singu-
los angulos
æquales ha-
bent, et cir-

ca æquales angulos late-
ra proportionalia.

II

Reciproce figurę sunt, quā-
do in vtraque figura antecede-
tes, et consequentes rationes
fuerint.

F. C. COMMENTARIVS.

Per antecedentes, & consequentes ratio-
nes intellige antecedentes, & conse-
quentes proportionis terminos: vt si
sint duo rectangula ABC DBE, sitis
vt AB ad BD, ita EB ad BC; dicen-
tur hae figurę reciprocae, seu ex
contraria parte sibi ipsis responden-
tes: quoniā in altera quidem est ter-
minus antecedens primae proportio-
nis, videlicet AB, et consequens se-
cundae BC; in altera vero est consequens primae BD & antecedens secundae EB. sunt autem di-
ctae figurę etiam inter se æquales, ut deinceps ostendetur.

Extrema

Extrema ac media ratione fecari recta linea dicitur, quando fit ut tota ad maiorem portionem, ita maior portio ad minorem.

F. C. COMMENTARIUS.

Extrema ac media ratione fecari recta linea idcirco dicitur, quod secetur in duas partes, quae proportionis termini sunt, videlicet extremus et medius, nam tota primi termini locum obtinet. Sit enim recta linea AC ita divisa in puncto B, erit AC primus terminus, AB medius, et EC extremus.

A B C

IIII.

Altitudo cuiusque figuræ est linea perpendicularis, quæ à vertice ad basim ducitur.

V.

Proportio ex proportionibus componi dicitur, quando proportionum quantitates inter se multiplicatæ, aliquam efficiunt proportionem.

S C H O L I U M.

Proportio ex duabus proportionibus, vel ex pluribus componi dicitur, quando proportionum quantitates multiplicatæ faciunt aliquam proportionis quantitatem.

Habeat enim AB ad CD proportionem datam, ut duplam, vel triplam, vel aliam aliquam: CD vero ad EF similiter datam proportionem habeat. Dico proportionem AB ad EF compositam esse ex proportionibus AB ad CD, et proportionibus CD ad EF; vel si quantitas proportionis AB ad CD multiplicetur in proportionibus CD ad EF quantitate, facere quantitatem proportionis AB ad EF. Sit enim primū AB maior, quā CD, et CD quā EF maior: Sitq; AB dupla CD, et CD ipsius EF tripla. Quoniam igitur CD quidem ipsius EF tripla est, ipsius autem CD dupla AB; erit AB ipsius EF sextupla: quoniam si triplum alicuius duplicabimus, fiet ipsius sextuplum. hoc enim proprie est compositio. vel hoc modo. Quoniam AB ipsius CD est dupla, dividatur AB in partes æquales ipsi CD, quæ sint A G G B. et quoniam CD est tripla EF, æqualis autē A G ipsi CD; erit A G ipsius EF tripla.

tripla. ideoq; tota AB ipsius EF sextupla est. quare proportio AB ad EF coniungitur per medium terminū CD; composita ex proportione AB ad CD, & proportio. ne CD ad EF. Similiter autem & si CD sit vtrisque AB EF minor, idē concludetur. Sit enim rursus AB quidem tripla ipsius CD, CD vero ipsius EF dimidia. & quoniam CD dimidia est ipsius EF, & ipsius C D tripla AB; erit AB sesquialtera ipsius EF. si enim dimidium alicuius triplicabimus, habebit ipsum semel, & eius dimidium. Et quoniam AB ipsius CD est tripla, CD vero dimidia EF; quarum partium ipsi CD æqualium AB est trium, earum est EF duarum. ergo AB sesquialtera est ipsius EF. proportio igitur AB ad EF connectitur per CD medium terminum, composita ex proportione AB ad CD, & proportione CD ad EF. Sed rursus sit CD vtrisque AB EF maior: & sit AB quidem ipsius CD dimidia, CD vero sesquitertia ipsius EF. Quoniam igitur quarum partium est AB duarum, earum CD est quattuor: quarum autem CD est quattuor, earum EF est trium: & quarum AB duarum, earumdem EF trium. Ergo proportio AB ad EF rursus connectitur per CD medium terminum; quæ est duorum ad tria. Similiter et in pluribus, & in reliquis casibus. Et manifestum est, si à composita proportione vnus quiuis componentium auferatur, vno simplicium cictō, reliquos componentium assumi.

FED. COMMANDINVS.

Lege Eutocium in commentarijs in quartam propositionem secundi libri Archimedis de sphaera & cylindro, & in commentarijs in vndecimam propositionem primi libri conicorum Apollonij.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

Triangula & parallelogramma, quæ eandem habent altitudinem, inter se sunt, vt bases.

Sint triangula quidē ABC ACD; parallelogramma vero EC CF, quæ eandem habeant altitudinem, videlicet perpendicularem à puncto A ad BD ductam. Dico vt basis BC ad CD basim, ita esse triangulum ABC ad triangulum ACD; & parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum. producat enim BD ex vtraque parte ad puncta H. L; & ipsi quidem BC basi æquales quotcumque ponantur BG GH, ipsi vero basi CD ponantur quotcūq; æquales DK KL, & AG AH AK AL iungantur.

Quoniam igitur CB BG GH inter se æquales sunt; erunt & triagula AHG AGB ABC inter se equalia. ergo quotuplex est basis HC ipsius BC basis, totuplex est AHC triangulum trianguli ABC. Eadem ratione quotuplex est LC basis, ipsius basis CD, totuplex est & triangulum ALC ipsius ACD trianguli: et si æqualis est HC basis basi CL, & triangulum AHC triangulo ALC est æquale: & si basis HC basim CL superat, & triangulum AHC superabit triangulum ALC: & si minor, minus. Quattuor igitur magnitudinibus existentibus, videlicet duabus basibus BC CD, & duobus triangulis ABC ACD, sumpta sunt æquemultiplicia, basis quidem BC, & ABC trianguli, videlicet basis HC, & AHC triangulum: basis vero CD, & trianguli ACD, alia vtrumque æque multiplicia, nempe CL basis, & ALC triangulum: atque ostensum.

38. huius.

incommensurabile
autem, ut
demonstrabitur

5. diff. quia
u.
41. primi.
15. quinti.

ut quinti.

sum est si HC basis basim CL superat, & triangulū AHC superare trianēulū AL C; & si equalis, equalis; & si minor, minus. est igitur vt BC basis ad basi n CD, ita trian-
gulū ABC ad ACD triagulū. Et qm triaguli ABC duplū est parallelogramū EC,
& triaguli ACD parallelogramū FC duplum; partes autem eodem modo multi-
plicium eandem inter se proportionem habent: erit vt ABC triangulum ad trian-
gulū ACD, ita parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum. Quoniam igitur
ostensum est, vt basis BC ad CD basim, ita esse ABC triangulum ad triangulum
ACD, vt autem ABC triangulum ad triangulum ACD, ita parallelogrammum EC
ad CF parallelogrammum: erit vt BC basis ad basim CD, ita parallelogrammum E
C ad CF parallelogrammum. Quare triangula & parallelogramma, quæ eandem
habent altitudinem inter se sunt, vt bases. quod demonstrare oportebat.

F. C. C O M M E N T A R I V S.

Sed & theorema illud verum est, quod demonstrare hoc loco non putauī esse alienum.
Triangula & parallelogramma in æqualibus basibus constituta, eandem inter se
proportionem habent, quam eorum altitudines.

Ex ante-
cedente.

Sint duo triangula ABC DEF, & duo parallelogramma CG EH, quæ æquales bases habeat
BC EF: trianguli autem ABC, & parallelogrammi CG altitudo sit AK: & trianguli DEF, & pa-
rallelogrammi EH altitudo DL. Dico vt AK ad DL, ita esse & triangulum ABC ad triangulum
DEF, & parallelogrammum CG ad EH parallelogrammum. producantur BC EF, & ponantur
basi BC æquales quocumque BM MN: & basi EF æquales quocumque FO OT, iunganturq;
AM AN DO DP: quot vero magnitudines sunt in CN æquales basi CB, tota sumantur in li-
nea Q æquales ipsi AK altitudini; & quot sunt in EP æquales basi EF, tota sumantur in linea R
æquales altitudini DL. Itaque quoniam triangula ANM ABC sunt in æqualibus basi-
bus constituta, & æquali altitudine; etiam inter se æqualia erunt. & eadem ratione triangula D
EF DFO DOP erunt inter se æqualia. Quotuplex igitur est linea Q ipsius AK, totuplex est trian-
gulū ANC trianguli ABC: & quotuplex est linea R ipsius DL, totuplex est triangulum DPE
trianguli DEF: & si Q sit æqualis R, & triangulum ANC triangulo DPE æquale erit, ex præ-
missis; erit namque altitudo AK, cuius tripla est Q æqualis altitudini DL, cuius ipsa R est tripla:
si vero Q sit maior, quam R, & triangulum ANC maius erit, quam triangulum DPE; et si minor,
minus. triangulorum enim æquales bases habentium; quæ maiori sunt altitudinē; etiam maiora
sunt, alioquin sequeretur totum parti æquale esse. Cum igitur quattuor sint magnitudines, videlicet
duæ altitudines AK DL, & duo triangula ABC DEF: & sumpta sint æque multiplicia, alti-
tudinis quidem AK, & trianguli ABC; altitudinis vero DL, & trianguli DEF; alia vicinque
multiplicia: & ostensum sit si linea Q superat R, & triangulum ANC superare triangulum DPE
E, & si æqualis, æquale; & si minor, minus: erit vt altitudo AK ad altitudinē DL, ita triangulū
ABC ad triangulum DEF. Sed trianguli ABC duplū est CG parallelogrammum; & triangulū
DEF duplū est EH parallelogrammum: erit vt ABC triangulum ad
triangulum DEF: ita CG parallelogrammum ad EH parallelogrammum. Quare triangula, &
parallelogramma in æqualibus basibus constituta eandem inter se pro-
portionem habent, quam eorum altitudines. quod demonstrare oportebat.

5. diff. quinti.
41. primi.
15. quinti.

THEO.

THEOREMA II. PROPOSITIO. II.

Si unius laterum trianguli parallela quædam recta linea ducta fuerit, proportionaliter secabit ipsius trianguli latera: & si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ sectiones coniungit recta linea reliquo trianguli lateri parallela erit.

Trianguli enim ABC vni laterum BC parallela ducatur DE. Dico vt BD ad DA, ita esse CE ad EA. Iungantur enim BE CD. triangulum igitur BDE triangulo CDE est æquale; in eadem enim sunt basi DE, & in eisdem DE BC parallelis: aliud autem triangulum est ADE: sed equalia ad idem eandem habet proportionem. ergo vt triangulum BDE ad triângulum ADE, ita est CDE triangulum ad triangulum ADE. Vt autem triangulum BDE ad triangulum ADE, ita est BD ad DA. nam cum eandem altitudinem habeant, videlicet perpendicularẽ à puncto E ad AB ductam, inter se sunt vti bases. & ob eandem causam vt CDE triangulum ad triangulum ADE, ita CE ad EA. & vt igitur BD ad DA, ita est CE ad EA. Sed trianguli ABC latera AB AC proportionaliter secta sunt, & vt BD ad DA, ita sit CE ad EA: & iungatur DE. Dico DE ipsi BC parallelam esse. Idem enim constructis, quoniam est vt BD ad DA, ita CE ad EA; vt autẽ BD ad DA, ita est BD ad EA triangulum ad triângulum ADE; et vt CE ad EA, ita CDE triangulum ad triângulum ADE: erit ut triangulum BDE ad triangulum ADE, ita CDE triangulum ad triangulum ADE. Quod cum vtrumque triangulorum BDE CDE ad triangulum ADE eandem habeat proportionem; erit BDE triangulum triangulo CDE æquale; & sunt in eadem basi DE. equalia autem triângula, & in eadem basi constituta, erunt in eisdem sunt parallelis. ergo DE ipsi BC parallela est. Si igitur vni laterum trianguli parallela quadam recta linea ducta fuerit, proportionaliter secabit ipsius triânguli latera: & si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ sectiones coniungit recta linea reliquo triânguli lateri parallela erit. quod oportebat demonstrare.

17. primi.

7. Quinti.

Ex antecede-
dente.

H. Guindy.

11. ၄ ယ်ဃ်.

9. quinti.

40. *primi*

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

Si trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta linea, secet etiam basim; basis partes eandem proportionem habebunt, quam reliqua trianguli latera: & si basis partes eandem proportionem habeant, quam reliqua trianguli latera; quæ à vertice ad sectionem ducitur recta linea, trianguli angulum bifariam secabit.

Sit triangulum ABC , & secetur angulus BAC bifariam
 recta linea AD . Dico ut BD ad DC , ita esse BA ad AC . du-
 catur enim per C ipsi DA parallela CE , & producta BA
 conueniat cum ipsa in E puncto. Quoniam igitur in paral-
 lelas AD EC incidit recta linea quadam AC , erit $\angle ACE$ angu-
 lus angulo CAD equalis. Sed $\angle CAD$ angulus ponitur aequa-
 lis angulo BAD . ergo & $\angle BAD$ ipsi $\angle ACE$ angulo equalis
 erit. Rursus quoniam in parallelas AD EC recta linea BAE
 incidit, exterior angulus BAD aequalis est interiori AEC .
 ostensus autem est & angulus $\angle ACE$ angulo BAD equalis. ergo & $\angle ACE$ ipsi $\angle AEC$

9. primi.

31. primi.

29. pruni.

T. equalis

6. primi.
Ex antecede-
nte.
7. quinti.

Ex antecede-
nte.

9. quinti.
19. primi.

æqualis erit: ac propterea latus AE æquale lateri AC. Et quoniam vni laterum trian-
guli BCE, videlicet ipsi EC parallela ducta est AD; erit vt BD ad DC, ita BA ad A
E: æqualis autem est AE ipsi AC. est igitur vt BD ad DC, ita BA ad AC. Sed fit vt BD
ad DC, ita BA ad AC: & AD iungatur. Dico angulū BAC bifariā sectū esse recta li-
nea AD. iisdem enim constructis quoniam est vt BD ad DC, ita BA ad AC; Sed &
vt BD ad DC, ita BA ad AE, etenim vni laterum trianguli BCE, videlicet ipsi EC
parallela ducta est AD: erit & vt BA ad AC, ita BA ad AE. ergo AC est æqualis AE,
ac propterea & angulus AEG angulo EGA æqualis. Sed angulus quidem AEC est
æqualis angulo exteriori BAD; angulus vero ACE æqualis alterno CAD. quare &
BAD angulus ipsi CAD æqualis erit. angulus igitur BAC bifariam sectus est recta
linea AD. Ergo si trianguli angulus bifariam fecetur, secans autem angulum recta
linea, etiam basim secet; basis partes eandem proportionem habebunt, quam reli-
qua trianguli latera: & si basis partes eandem proportionem habeant, quam reliqua
trianguli latera; quæ à vertice ad sectionem ducitur recta linea trianguli angulum
bifariam secabit: quod oportebat demonstrare.

THEOREMA IIII. PROPOSITIO. IIII.

Æquiangulorum triangulorum latera, quæ circum æquales an-
gulos, proportionalia sunt: et homologa siue eiusdē rationis sunt
latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur.

Sint æquiangula triangula ABC DCE, quæ anguli
quidem ABC angulo DCE, angulum vero ACB an-
gulo DEC æqualem habeant: et præterea angulū BAC
angulo CDE. Dico triangulorum ABC DCE propor-
tionalia esse latera, quæ sunt circa æquales angulos, et
homologa, siue eiusdem rationis latera esse, quæ æqua-
libus angulis subtenduntur. Ponatur enim BC in dire-
ctum ipsi CE. Et quoniam anguli ABC ACB duobus
rectis minores sunt: æqualis autem est angulus ACB angu-
lo DEC; erunt ABC DEC anguli duobus rectis minores. quare BA ED productæ
inter se conuenient, producantur, et conueniant in puncto F. et quoniam angulus
DCE est æqualis angulo ABC; erit BF ipsi DC parallela. Rursus quoniam æqualis
est angulus ACB angulo DEC, parallela erit AC ipsi FE. parallelogrammum igitur
est FACD; ac propterea FA quidem ipsi CD, AC vero ipsi FD est æqualis. Et
quoniam vni laterum trianguli FBE, videlicet ipsi FE parallela ducta est AC; erit
vt BA ad AF, ita BC ad CE. æqualis autem est AF ipsi CD. Vt igitur BA ad CD,
ita BC ad CE: et permutando vt A B ad B C, ita D C ad C E. Rursus quoniam CD
parallela est BF, erit vt BC ad CE, ita F D ad D E. Sed D F est æqualis A C. ergo vt
BC ad CE, ita AC ad E D. permutando igitur vt B C ad C A, ita C E ad E D. Itaque
quoniam ostensum est, vt A B ad B C, ita D C ad C E, ut autem B C ad C A, ita C E
ad E D; erit ex æquali vt BA ad AC, ita CD ad D E. æquiangulorum igitur triangu-
lorum proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos: et homologa, siue
eiusdem rationis latera sunt, quæ æqualibus angulis subtenduntur. quod demon-
strare oportebat.

17. primi.

28. primi.

34. primi.

2. huius.

7. quinti.

2. huius.

THEOREMA V. PROPOSITIO. V.

Si duo triangula latera proportionalia habeant, æquiangula e-
runt triangula, et æquales habebunt angulos, quibus homologa
latera subtenduntur.

Sint

Sint duo triangu^{la} ABC DEF, quæ latera proportionalia habeant, sitq; ut AB quidem ad BC, ita DE ad EF; vt autem BC ad CA, ita EF ad FD: et adhuc vt BA ad AC, ita ED ad DF. Dico triangu^{lum} ABC triangu^{lo} DEF æquiangu^{lu}m in esse, et æquales habere angulos, quibus homologa latera subtenduntur, angulum quidem ABC angulo DEF, angulum vero BCA angulo EFD; et præterea angulum BAC angulo EDF. con-

situatur enim ad rectam lineam EF, et ad puncta in ipsa EF, angulo quidem ABC æqualis angulus FEG; angulo autem BCA angulus EFG. quare reliquis BAC angulus reliquo EGF est æqualis. Ideoq; æquiangulum est triangulum ABC triangu^{lo} EGF. triangu^{lorum} igitur ABC EGF proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos, et homologa latera sunt, quæ æqualibus angulis subtenduntur. ergo vt AB ad BC, ita GE ad EF. Sed vt AB ad BC, ita DE ad EF. Vt igitur DE ad EF, ita GE ad EF. Quod cum vtræque ipsarum DE EG ad EF eandem proportionem habeat, erit DE ipsi EG æqualis. Eadem ratione et DF æqualis FG. Itaque quoniam DE est æqualis EG, cõmunis autem EF; duæ DE EF duabus GE EF æquales sunt, et basis DF basi FG æqualis. angulus igitur DEF est æqualis angulo GEF, et DEF triangulum æquale triangulo GEF, et reliqui anguli reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera subtenduntur. ergo angulus quidem DFE est æqualis angulo GFE, angulus vero EDF æqualis angulo EGF. Et quoniam angulus FED est æqualis angulo GEF, et angulus GEF angulo ABC; erit et angulus ABC angulo FED æqualis. Eadem ratione et angulus ACB æqualis est angulo DFE: et adhuc angulus ad A angulo ad D. ergo ABC triangu^{lum} triangu^{lo} DEF æquiangulum erit. Si igitur duo triangu^{la} latera proportionalia habeant, æquiangu^{la} erunt triangu^{la}; et æquales habebunt angulos, quibus homologa latera subtenduntur. quod oportebat demonstrare.

3. primi.

Ex antecedente.

11. quinti.

9. quinti.

3. primi.

THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

Si duo triangu^{la} vnum angulum vni angulo æqualem habeant, circa æquales autem angulos latera proportionalia; æquiangu^{la} erunt triangu^{la}, et æquales habebunt angulos, quibus æqualia latera subtenduntur.

Sint duo triangu^{la} ABC DEF vnum angulum BAC vni angulo EDF æquale habentia, circa æquales autem angulos latera proportionalia, sitq; ut BA ad AC, ita ED ad DF. Dico triangu^{lum} ABC triangu^{lo} DEF æquiangulum esse, et angulum quidem ABC habere æqualem angulo DEF; angulum vero ACB angulo DFE. constituitur enim ad rectam lineam DF, et ad puncta in ipsa DF, alte-

11. primi.

rutrum angulorum BAC EDF æqualis angulus FDG: angulo autem ACB æqualis DFG. reliquis igitur qui ad B reliquo qui ad G est æqualis. ergo triangu^{lum} ABC triangu^{lo} DGF æquiangulum est, ac propterea vt BA ad AC, ita est GD ad DF. ponitur autem & vt BA ad AC, ita ED ad DF. Vt igitur ED ad DF, ita GD ad DF. quare ED æqualis est ipsi DG: & communis DF. ergo duæ ED DF duabus GD DF

4. huius.

11. quinti.

9. quinti.

T 2 æquales

EVCLID. ELEMENT.

4. primi.

æquales sunt : & angulus EDF angulo G
DF est æqualis . basis igitur EF est æqua-
lis basi FG : triangulumq; DEF æquale
triangulo GDF , & reliqui anguli reli-
quis angulis æquales , alter alteri , qui-
bus æqualia latera subtenduntur . ergo
angulus quidem DFG est æqualis angulo
DFE; angulus vero ad G angulo ad E.
sed angulus DFG æqualis est angulo A
CB. & angulus igitur ACB angulo DFE

est æqualis . ponitur autem & BAC angulus æqualis angulo EDF . ergo & reliquus
qui ad B æqualis reliquo qui ad E. æquiangulum igitur est triangulum ABC trian-
gulo DEF . Quare si duo triacula vnum angulum vni angulo æqualem habeant,
circa æquales autem angulos latera proportionalia; æquiangula erunt triacula, &
æquales habebunt angulos, quibus homolega latera subtenduntur. quod ostendere
oportebat.

F. C. COMMENTARIUS.

4. primi.

Sunt qui hoc etiam aliter demonstrēt. Nam imposito latere DE la-
teri AB, cadet DF in AC, quoniam angulus ad punctum D angu-
lo ad A est æqualis . Vel igitur DE est æquale ipsi AB, vel ine-
quale. & si quidem æquale, erit & DF æquale AC. ergo & basis
EF basi BC, & reliqui anguli reliquis æquales. Si vero DE sit
inequale ipsi AB, sit vtrumvis ipsorum maius; verbi causa AB. tunc
ut BA ad AC, sic ED ad DF. ergo permutando ut BA ad AE; sic C
A ad AF; & dividendo ut BE ad EA, sic CF ad FA. quare latus EF
parallelum est lateri BC, & idcirco angulus AEF angulo ABC, &
angulus AFE angulo ACB est æqualis. quod ostensum oportuit.

2. huius.

29. primi.

THEOREMA. VII. PROPOSITIO VII.

Si duo triacula vnum angulum vni angulo æqualem habeant,
circa alios autem angulos latera proportionalia , & reliquorum
vtrumque simul, vel minorem, vel non minorem recto : æquian-
gula erunt triacula; & æquales habebunt angulos, circa quos
latera sunt proportionalia.

Sint duo triacula ABC DEF, vnum angulū
vni angulo æqualem habentia, videlicet angulū
BAC angulo EDF æqualem, circa alios autem an-
gulos ABC DEF latera proportionalia, ut sit DE
ad EF, sic ut AB ad BC: & reliquorum qui ad CF.
primum vtrumque simul minorem recto . Dico
triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum
esse; angulumque ABC æqualem angulo DEF,
& reliquum videlicet qui ad C reliquo qui ad F æ-
qualem. Si enim inæqualis est angulus ABC angulo
DEF, vnus ipsorum maior erit. Sit maior ABC: & constituatur ad rectam lineam
AB, & ad punctum in ipsa B angulo DEF æqualis angulus ABG. Et quoniam angu-
lus quidem A est æqualis angulo D, angulus vero ABG angulo DEF: erit reliquus
AGB reliquo DFE æqualis. æquiangulum igitur est ABG triangulum triangulo D
EF. quare ut AB ad BG, sic DE ad EF: vtq; DE ad EF, sic ponitur AB ad BC. & vt
igitur AB ad BC, sic AB ad BG. Quod cum AB ad vtramque BC BG eandem ha-
beat

13. primi.

4. huius.

beat proportionem, erit BC ipsi BG æqualis: ac propterea angulus ad C est æqualis angulo BGC, minor aut recto ponitur angulus, qui ad C, ergo & BGC minor est recto, & ob id qui ei deinceps est AGB maior recto. atque ostensus est angulus AGB æqualis angulo, qui ad F, angulus igitur qui ad F recto maior est. atqui ponitur minor recto, quod est absurdum. nõ igitur inæqualis est angulus ABC angulo DEF, ergo ipsi est æqualis, est autẽ & angulus ad A æqualis ei, qui ad D. quare & reliquis qui ad C æqualis reliquo qui ad F. æquiangulum igitur est ABC triangulum triangulo DEF. Sed rursus ponatur uterque angulorum, qui ad C non minor recto. Dico rursus & sic triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum esse. ipsẽ enim constructis similiter demonstrabimus BC æqualem ipsi BG, angulumq; ad C angulo BGC æqualem, sed angulus qui ad C non est minor recto. nõ minor igitur recto est BGC. quare trianguli BGC duo anguli non sunt duobus rectis minores. quod fieri nõ potest. nõ igitur rursus inæqualis est ABC angulus angulo DEF, ergo æqualis necessario erit, est autẽ & qui ad A æqualis ei, qui ad D. reliquis igitur qui ad C reliquo qui ad F est æqualis, ac propterea triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum est. Si igitur duo trianguła vnum angulum vni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, & reliquorum vtrumque simul, vel minorem, vel non minorem recto: æquiangula erunt trianguła, & æquales habebunt angulos, circa quos proportionalia sunt latera. quod oportebat demonstrare.

9. quini.
5. primi.
13. primi.

17. primi.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO. VIII.

Si in triangulo rectangulo ab angulo recto ad basim perpendicularis ducatur; quæ ad perpendicularẽ sunt trianguła & toti & inter se similia sunt.

Sit triangulum rectangulum ABC, rectum habens angulum BAC: et à puncto A ad BC perpendicularis ducatur AD. Dico trianguła ABD ADC toti triangulo ABC, et inter se similia esse. Quoniam enim angulus BAC est æqualis angulo ADB, rectus enim vterque est: et angulus qui ad B communis duobus tri-

gulis ABC ABD: erit reliquus ACB reliquo BAD æqualis. æquiangulum igitur est triangulum ABC triangulo ABD. quare ut BC, quæ subtendit angulum rectum trianguli ABC, ad BA subtendentem angulum rectum trianguli ABD, sic ipsa AB subtendens angulum qui ad C trianguli ABC, ad BD subtendentem angulum æqualem angulo, qui ad C, videlicet BAD ipsius ABD trianguli: et adhuc AC ad AD subtendentem angulum qui ad B, communem duobus triangulis. ergo triangulum ABC triangulo ABD æquiangulum est; et circa æquales angulos latera habet proportionalia. Simile igitur est triangulum ABC triangulo ABD. Eadem ratione demonstrabimus etiam ADC triangulum triangulo ABC simile esse. Quare vtrumque ipsorum ABD ADC toti ABC triangulo est simile. Dico insuper trianguła ABD ADC etiam inter se similia esse. Quoniam enim angulus BDA rectus, est æqualis recto ADC: Sed et BAD ostensus est æqualis ei, qui ad C; erit reliquus qui ad B reliquo DAC æqualis. æquiangulum igitur est triangulum ABD triangulo ADC. ergo ut BD trianguli ABD subtendens BAD angulum ad D A trianguli ADC subtendentem angulum, qui ad C, æqualem angulo BAD, sic ipsa AD trianguli ABD subtendens angulum, qui ad B, ad DC subtendentem angulum DAC ei, qui ad B, æqualem: et adhuc BA ad AC subtendentem angulum rectum ADC. Simile igitur est ABD triangulum triangulo ADC. Quare si in triangulo recto ab angulo recto ad basim perpendicularis ducatur; quæ ad perpendicularẽ sunt trianguła, et toti, et inter se, similia sunt. quod oportebat demonstrare.

4. huius.

1. diffi. huius

C O R O.

EVCLID. ELEMENT.
COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum est, si in triangulo rectangulo ab angulo recto ad basim perpendicularis ducatur; ductam basim partium mediam proportionalem esse: et adhuc basis et vniuscuiusque partium, latus quod ad partem, medium esse proportionale. quod de monstrare oportebat.

PROBLEMA I. PROPOSITIO IX.

A data recta linea imperatam partem abscindere.

1. huius.

Sit data recta linea AB. oportet ab ipsa AB imperatam partem abscindere. Imperetur pars tertia: et ducatur à puncto A quædam recta linea AC, quæ cum ipsa AB angulum quemlibet contineat; sumaturq; in A C quod vis punctum D, et ipsi AD æquales ponantur DE EC, deinde iungatur BC; et per D ipsi BC parallela ducatur DF. Itaque quoniâ vni laterum trianguli A B C, videlicet ipsi B C parallela ducta est F D; erit vt CD ad DA, ita BF ad FA; dupla autem est CD ipsius DA. ergo et BF ipsius FA dupla erit. tripla igitur est BA ipsius AF. Quare à data recta linea AB imperata tertia pars AF abscissa est. quod facere oportebat.

PROBLEMA II. PROPOSITIO X.

Datam rectam lineam infectam, datæ rectæ lineæ sectæ similiter secare.

34 primi.

2. huius.

Sit data quidem recta linea infecta AB, secta vero AC. oportet rectam lineam AB infectam ipsi AC sectæ similiter secare. Sit secta AC in punctis D E, et ponantur ita, ut angulû quem vis contineant, iunctaq; BC per puncta quidem DE ipsi BC parallelæ ducantur DF EG: per D vero ipsi AB ducatur parallela DHK. parallelogrammum igitur est vtrumque ipsorum F H H B: ac propterea DH quidem est æqualis FG, HK vero ipsi GB. Et quoniam vni laterum trianguli DKC, ipsi scilicet KC parallela ducta est HE; erit vt CE ad ED, ita KH ad KD. æqualis autem est KH quidē ipsi BG, HD vero ipsi GF. igitur vt CE ad ED, ita BG ad GF. Rursus quoniam vni laterum trianguli AGE, nimirum ipsi EG parallela ducta est F D, vt ED ad DA, ita erit GF ad FA. Sed ostensum est ut CE ad ED, ita esse BG ad GF. vt igitur CE ad ED, ita est BG ad GF: & vt ED ad DA, ita GF ad FA. Ergo data recta linea infecta AB datæ rectæ lineæ sectæ AC similiter secta est. quod facere oportebat.

F. C. COMMENTARIUS.

Hinc non dissimile est, quod docuit Pappus in septimo libro mathematicarum collectionum.

Datam rectam lineam in datam proportionem secare.

Sit data quidem recta linea AB: data autem proportio quam habet C ad D: & oporteat secare AB in proportionem C ad D. Inclinetur ad AB in quouis angulo recta linea AE: & ipsi quidem C æqualis abscindatur AF; ipsi vero D æqualis FG: & iunctæ

iuncta BG ducatur FH ei parallela. Quoniam igitur ut AH ad HB, ita est AF ad FG: est autem AF equalis C, & FG ipsi D: erit ut AH ad HB, ita C ad D. Ergo AB secunda est ad punctum H in proportionem C ad D, quod facere oportebat.

Ex ijs, quæ tum in quinto libro tum hoc loco tradita sunt, licebit problema absolvere, quod ad quartam propositionem quarti libri nos facturos recepimus.

In dato triangulo quadratū describere.

Sit datum triangulum ABC, in quo oporteat quadratum describere. vel igitur datū triangulum acutiangulum est, vel reſtāngulum, vel obtuſiangulum. Sit primū acutiangulum, atque à puncto B ad AC perpendicularis ducatur BD: & ex præmissa diuidatur BD in puncto E, ita ut DE ad EB eandem proportionem habeat, quam AC ad BD. deinde per E ducatur FG ipsi AC parallela, & à punctis F

2. huius.

G ducantur FH GK parallelae ipsi BD. Quoniam igitur in triangulo ABD ducta est FE ipsi AD parallela. erit angulus BFE ad A equalis; & angulus BFE aequalis angulo BAD: atque est angulus FBE utrique communis. ergo FBE triangulum triangulo ABD aequiangulum est. Similiter demonstrabimus triangulum EBG aequiangulum ipsi DBC. Ut igitur AD ad DB, ita est FE ad EB, & ut BD ad DC, ita BE ad EG. quare ex aequali ut AD ad DC, ita FE ad EG: & componendo ut AC ad CD, ita FG ad GE; conuertendo ut DC ad CA, ita EG ad GF. Sed ut BD ad DC, ita BE ad EG. ergo ex aequali, ut BD ad AC, ita BE ad FG. Itaque cum sit ut AC ad BD, ita DE ad EB, erit rursus ex aequali ut AC ad se ipsam, ita DE, hoc est HF ad FG. ergo HF ipsi FG est aequalis; ac propterea omnes HF FG GK KH inter se aequales sunt. Et quoniam FH est parallela ipsi BD: estq; angulus BDA reſtū; & ipse KHF reſtū erit. eadem ratione cum FG sit parallela AC, erit & HFG angulus reſtū. Ergo & ipsis oppositi FGK GKH reſti sunt necesse est. quadratum igitur est ipsum FGKH: & descriptum est in triangulo ABC. Non aliter in triangulo reſtāngulo, vel obtuſiangulo quadratum describemus, ab angulo reſto, vel obtuso ad latus oppositum perpendicularem ducentes. Quod si in triangulo reſtāngulo quadratum describere libeat, ita ut duo quadrati latera duobus lateribus trianguli nitantur; ut in subiecta figura, utemur altera perpendiculari, quae est trianguli latus, videlicet BA, & similiter diuidetur AB in F, ita ut AF ad FB eandem proportionem habeat, quæ CA ad AB; ducaturq; FG parallela ipsi AC, & GK parallela BA. Et quoniam in triangulo BAC ducta est FG ipsi AC parallela; similiter demonstrabimus triangulum BFG triangulo BAC aequiangulum esse. quare ut BA ad AC, ita BF ad FG. est autem ut CA ad AB, ita AF ad FB. ex aequali igitur, ut CA ad se ipsam, ita AF ad FG; ideoq; AF FG inter se aequales sunt. Et ex ijs, quæ proxime diximus, sequetur AFGK quadratum esse, quod descriptum est in triangulo ABC, atque illud est, quod scisse oportuit.

29. primi.

4. huius.

12. quinti.

18. quinti.

4. quinti.

34. primi.

29. primi.

34. primi.

2. huius.

4. huius.

PROBLEMA III. PROPOSITIO XI.

Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem inuenire.

Sint datæ duæ rectæ lineæ AB AC, & ponantur ita, ut angulum quem uis continent. oportet ipsarum AB AC tertiam proportionalem inuenire. producantur enim

enim AB AC ad puncta DE: ponaturq; ipsi AC æqualis BD
& iuncta BC, ducatur per D ipsi BC parallela DE. Quoniam
igitur unilaterum trianguli ADE, videlicet ipsi DE parallela
ducta est BC, erit ut AB ad BD, ita AC ad CE. æqualis au-
tem est BD ipsi AC. ut igitur BA ad AC, ita est AC ad CE.
Quare datis rectis lineis AB AC tertia proportionalis inue-
ta est CE. quod facere oportebat.

PROBLEMA IIII. PROPOSITIO XII.

Tribus datis rectis lineis quartam propor-
tionalem inuenire.

Sint data tres rectæ lineæ A B C. oportet ip-
sarum A B C quartam proportionalem inueni-
re. Exponatur duæ rectæ lineæ DE DF angulū
quemuis EDF continentes: & ponatur ipsi qui-
dem A æqualis DG, ipsi vero B æqualis GE, & ip-
si C æqualis DH: iunctaq; GH per E ipsi parallela
ducatur EF. Itaque quoniam unilaterum trian-
guli DEF, nimirum ipsi EF parallela ducta est
GH, erit ut DC ad GE, ita DH ad HF. est autem
DG ipsi A æqualis, GE vero æqualis B: & DH æ-
qualis C. Ve igitur A ad B, ita C ad HF. Quare
datis tribus rectis lineis A B C quarta proportionalis inue-
ta est HF. quod facere oportebat.

z. huius.

F E D. C O M M A N D I N V S E X T A P P O.

Tribus datis rectis lineis AB BC & D, In-
uenire ut AB ad BC, ita aliam quandam ad
ipsam D.

Rursus inuenitur recta linea CH in quouis angu-
lo & absindatur CF æqualis D: iunctaque EF, ipsi
parallela ducatur AG. ergo rursus ut AB ad BC,
ita erit CF ad FC, hoc est ad D. Inue-
ta igitur est FG. quod facere oportebat.

PROBLEMA V.
PROPOSITIO XIII.

Diabz datis rectis lineis mediam proportionalem inuenire.

Sint datæ duæ rectæ lineæ AB BC, oportet ip-
sarum AB BC mediam proportionalem inuenire.
ponantur in directum, & in ipsa AC describatur se-
micirculus ADC, ducaturq; à puncto B ipsi AC
ad rectos angulos BD, & AD DC iungatur. Quo-
niam igitur in semicirculo est angulus ADC, is re-
ctus est, & quoniam in triangulo rectangulo ADC
ab angulo recto ad basim perpendicularis ducta
est DB, erit DB basis partium AB BC media pro-
portionalis. Duabus igitur datis rectis lineis AB BC media pro-
portionalis inuen-
ta est DB. quod facere oportebat.

31. tertij.

Cor. 3. huius

THEO.

THEOREMA. IX. PROPOSITIO. XIII.

Aequalium et vnum vni æqualem habentium angulum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte sibi ipsis respondent: et quorum parallelogrammorum vnum vni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte sibi ipsis respondent; ea inter se sunt æqualia.

Sint æqualia parallelogramma AB BC, æquales habentia angulos ad B, et ponantur in directum DB BE. ergo et indirectum erunt FB BG. Dico parallelogrammorum AB BC latera, quæ sunt circum æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondere: hoc est ut DB ad BE, ita esse GB ad BF. compleatur enim parallelogrammum FE, et quoniam parallelogrammum AB æquale est parallelogrammo BC, aliud autem ali-quod est FE parallelogrammum; erit ut AB ad FE, ita BC ad FE. Sed ut AB quidem ad FE, ita est DB ad BE; ut autem BC ad FE, ita GB ad BF. et ut igitur DB ad BE, ita GB ad BF. ergo parallelogrammorum AB BC latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent: Sed ex contraria parte sibi ipsis respondeant latera, quæ circum æquales angulos; sitque ut DB ad BE, ita GB ad BF. Dico parallelogrammum AB parallelogrammo BC æquale esse. Quoniam enim est ut DB ad BE, ita GB ad BF, ut autem DB ad BE, ita AB parallelogrammum ad parallelogrammum FE: et ut GB ad BF, ita BC parallelogrammum ad parallelogrammum FE; erit et ut AB ad FE, ita BC ad FE. æquale igitur est AB parallelogrammum parallelogrammo BC. ergo æqualium et vnum vni æqualem habentium angulum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte sibi ipsis respondent: et quorum parallelogrammorum vnum vni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte sibi ipsis respondent; ea inter se sunt æqualia. quod oportebat demonstrare.

y. quinti.
i. huius.
n. quinti.

i. huius.
n. quinti.
9. quinti.

F. C. COMMENTARIUS.

Ergo & indirectum erunt FB BG. Sunt enim anguli FBD FBE æquales duobus rectis; sed angulus EBG ponitur æqualis angulo FBD. anguli igitur FBE, EBG duobus rectis sunt æquales, ac propterea rectæ lineæ FB BG in directum sibi ipsis erunt.

*

24. primi.

THEOREMA X. PROPOSITIO. XV.

Aequalium, et vnum vni æqualem habentium angulum triangulorum latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte sibi ipsis respondent: et quorum triangulorum vnum vni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte sibi ipsis respondent, ea inter se sunt æqualia.

Sint triângula ABC ADE vnum angulum vni angulo æqualem habentia, angulum

E V C L I D . E L E M E N T .

14. primi.

7. quinti.

1. huius.

11. quinti.

1. huius.

11. quinti.

9. quinti.

lum scilicet BAC angulo DAE. Dico triangulorum ABC ADE latera, quæ circum
 equales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondere, hoc est vt CA ad AD, ita
 esse EA ad AB. ponantur enim ita vt in di
 rectum sit CA ipsi AD, ergo et EA ipsi AB
 in directum erit; et iungatur BD. Quoniam
 igitur triangulum ABC æquale est trian
 gulo ADE, aliud autem est ABD; erit vt CAB
 triangulum ad triangulum BAD, ita trian
 gulum ADE ad triangulum BAD. Sed vt
 triangulum quidem CAB ad BAD trian
 gulum, ita CA ad AD: ut autem, triangu
 lum EAD ad ipsum BAD, ita EA ad AB. et ut igitur CA ad AD, ita EA ad AB.
 Quare triangulorum ABC ADE latera, quæ circum equales angulos ex contraria
 parte sibi ipsis respondent. Sed ex contraria parte sibi ipsis respondeant latera trian
 gulorum ABC ADE: et sit vt CA ad AD, ita EA ad AB. Dico triangulum ABC
 triangulo ADE æquale esse. Iuncta enim rursus BD, quoniam vt CA ad AD, ita
 est EA ad AB; ut autem CA ad AD, ita ABC triangulum ad triangulum BAD;
 et ut EA ad AB, ita triangulum EAD ad BAD triangulum: erit ut ABC trian
 gulum ad triangulum BAD, ita triangulum EAD ad BAD triangulum. Vtrumque
 igitur triangulorum ABC ADE ad triangulum BAD eandem habet proportionem;
 ac propterea æquale est ABC triangulum triangulo ADE, æqualium igitur et vni
 vni equalem habentium angulum triangulorum latera, quæ circum equales angu
 los, ex contraria parte sibi ipsis respondent; et quorum triangulorum vni vni æqua
 lem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte si
 bi ipsis respondent, ea inter se sunt equalia. quod demonstrare oportebat.

S C H O L I U M .

Acquiangulis dumtaxat triangulis contingit proportionalia latera
 habere, non etiam latera ex contraria parte sibi ipsis proportionem respon
 dentia. Aequalibus autem, et equiangulis latera quoque ex contraria par
 te respondentia habere contingit; equalia enim sunt & latera: equalita
 tis autem proportio ad se ipsam conuertitur, hoc est ex antecedente sum
 pto & consequente eadem est, & differens. At equalibus quidem, &
 vnum angulum equalem habentibus contingit solum latera habere ex co
 traria parte respondentia, non tamen omnia, sed quæ circum æquales an
 gulos consistunt. Quare alia quidem solum proportionalia habent latera,
 alia vero & proportionalia, & ex contraria parte respondentia. & sunt
 prima quidem equiangularia & non equalia: secunda vero equalia, &
 vnum angulum habentia æqualem, non tamen equiangularia: reliqua au
 tem & equalia, & equiangularia sunt.

THEOREMA XI. PROPOSITIO. XVI

Si quattuor rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum
 extremis contentum æquale est ei rectangulo, quod medijs conti
 netur: & si rectangulum extremis contentum æquale fuerit ei,
 quod medijs cõtinetur, quattuor rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint

Sint quattuor rectæ lineæ proportionales AB CD E F, sitque ut AB ad CD, ita E ad F. Dico rectangulum contentum rectis lineis AB F æquale esse ei, quod ipsis CD E continetur. Ducantur enim à punctis A C ipsis AB CD ad rectos angulos AG CH: ponaturq; ipsi quidem F æqualis E: ipsi vero E æqualis CH: & compleantur BG DH parallelogramma. Quoniam igitur est ut AB ad CD, ita E ad F; est autem E æqualis CH, & F ipsi AG: erit ut AC ad CD, ita CH ad AG: parallelogrammorum igitur BG DH latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent. quoniam autem æquiangulorum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent, ea inter se sunt æqualia. ergo parallelogrammum BG æquale est parallelogrammo DH. atque est parallelogrammum quidem BG, quod rectis lineis AB F continetur: est enim AG æqualis F: parallelogrammum vero DH quod continetur ipsis CD E; cum CH ipsi E sit æqualis. rectangulum igitur contentum AB F est æquale ei, quod ipsis CD E continetur. Sed rectangulum contentum AB F sit æquale ei, quod CD E continetur. Dico quattuor rectas lineas proportionales esse, videlicet ut AB ad CD, ita E ad F. ipsidem enim constructis quoniam rectangulum contentum AB F est æquale ei, quod CD E continetur: atque est contentum quidem AB F rectangulum B G; etenim AG est æqualis F: contentum vero CD E est rectangulum DH, quod CH ipsi E sit æqualis: erit parallelogrammum BG æquale parallelogrammo DH: & sunt æquiangula æqualium autem, & æquiangulorum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent. quare ut AB ad CD, ita CH ad A G: æqualis autem est CH ipsi E, & AG ipsi F. Ut igitur AB ad CD, ita E ad F. Ergo si quattuor rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulū extremis contentum æquale est ei, quod medijs continetur: & si rectangulum extremis contentum æquale fuerit ei, quod medijs continetur, quattuor rectæ lineæ proportionales erunt. quod oportebat demonstrare.

14. huius.

14. huius.

THEOREMA XII. PROPOSITIO XVII.

Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum extremis contentum æquale est ei, quod à media fit, quadrato: & si rectangulum extremis contentum æquale fuerit ei, quod à media fit, quadrato; tres rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint tres rectæ lineæ proportionales A B C: & sit ut A ad B, ita B ad C. Dico rectangulum contentum A C æquale esse ei, quod à media B fit, quadrato. ponatur ipsi B æqualis D. Et quoniam ut A ad B, ita B ad C, æqualis autem B ipsi D; erit ut A ad B, ita D ad C. Si autem quattuor rectæ lineæ proportionales fuerint rectangulum extremis contentum est æquale ei, quod medijs continetur. ergo rectangulum AC contentum est æquale ei, quod continetur BD. Sed rectangulum contentum BD est æquale quadrato, quod fit ex ipsa B; etenim B est æqualis D. rectangulum igitur contentum A C est æquale ei, quod ex B fit, quadrato. Sed rectangulum contentum AC æquale sit quadrato, quod fit ex B. Dico ut A ad B, ita esse B ad C. ipsidem enim constructis

7. quinti.
Ex antecedente.

quoniam

Ex ante-
cedente.

quoniam rectangulum contentum AC
æquale est quadrato, quod fit ex B; at
quadratum, quod fit ex B est rectangu-
lum, quod ipsis BD continetur, est enim
B æqualis ipsi D: erit rectangulum con-
tentum AC æquale ei, quod BD con-
tinetur. Si autem rectangulum extremis
contentum æquale fuerit ei, quod me-
dijs cōtinetur, quattuor rectæ lineæ pro-
portionales erunt. est igitur ut A ad B,
ita C ad D, æqualis autem B ipsi D, ergo
ut A ad B, ita B ad C. Si igitur tres rectæ
lineæ proportionales fuerint, rectangu-
lum extremis contentum est æquale ei,
quod à media fit, quadrato: & si rectangulum extremis contentum æquale fuerit ei,
quod à media fit, quadrato, tres rectæ lineæ proportionales erunt: quod oportebat
demonstrare.

PROBLEMA VI. PROPOSITIO. XVIII.

A data recta linea dato rectilineo simile, & similiter positum
rectilineum describere.

23. primi.
4. huius.
4. huius.
11. quinti.
Diffi. 1. hu-
us.

Sit data recta linea AB; datum autem re-
ctilineū CE. oportet à recta linea AB recti-
lineo CE simile, & similiter positū rectilineū
describere. Iungatur DF, & ad rectam lineā
AB, & ad puncta in ipsa AB, angulo quidē C
æqualis angulus constituatur GAB; angulo
autem CDF angulus ABG. reliquis igitur
CFD angulus reliquo AGB est æqualis. er-
go æquiangulum est FCD triangulum triangulo GAB; ac propterea ut FD ad GB,
ita FC ad GA, & CD ad AB. Rursus cōstituatur ad rectā lineam BG, & ad puncta in
ipsa BG angulo quidem DFE æqualis angulus BGH; angulo autem FDE æqualis G
BH. ergo reliquus qui ad E reliquo qui ad H est æqualis, æquiangulum igitur est
triangulum FDE triangulo GBH. quare ut FD ad GB, ita FE ad GH, & ED ad HB.
ostensum autem est & ut FD ad GB, ita FC ad GA, & OD ad AB. & ut igitur FC ad
AG, ita CD ad AB; & FE ad GH, & adhuc ED ad HB. itaque quoniam angulus qui-
dem CFD est æqualis angulo AGB; angulus autem DFE angulo BGH: erit totus C
FE angulus toti AGH æqualis. Eadem ratione & CDE est æqualis ipsi ABH: & præ-
terea angulus quidem ad C angulo ad A æqualis; angulus vero ad E angulo ad H.
æquiangulum igitur est AH ipsi CE, & latera circum æquales ipsi angulos habet
proportionalia. Ergo rectilineum AH rectilineo CE simile erit. A data igitur recta
linea AB dato rectilineo CE simile & similiter positum rectilineum AH descriptū
est, quod facere oportebat.

THEOREMA XIII. PROPOSITIO. XIX.

Similia triangula inter se sunt in dupla proportionē laterum
homologorum.

Sint similia triangula ABC DEF habentia angulum ad B æquale angulo ad E &
fit ut AB ad BC, ita DE ad EF; ita ut latus BC homologū sit lateri EF. Dico ABC tria-
gulum ad triangulum DEF duplam proportionem habere eius, quam habet BC ad
EF.

EF. Sumatur enim ipsarum BC EF tertia proportionalis BG, vt fit, sicut BC ad EF, ita EF ad BG: & iungatur GA. Quoniā igitur vt AB ad BC, ita est DE ad EF, erit permutando vt AB ad DE, ita BC ad EF. Sed vt BC ad EF, ita EF ad BG. & vt igitur AB ad DE, ita EF ad BG. quare triangulorum A BG DEF latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent. quorum autem triangulorum vnum vni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent, eæ inter se equalia sunt. æquale igitur est ABG triangulum triangulo DEF. Et quoniam est vt BC ad EF, ita EF ad BG; si autem tres rectæ lineæ proportionales sint, prima ad tertiam duplam proportionem habet eius, quam habet ab secunda: habebit BC ad BG duplam proportionem eius, quam habet BC ad EF. Vt autem BC ad BG, ita ABC triangulum ad triangulum ABG. ergo & ABC triangulum ad triangulum ABG duplam proportionem habet eius, quam BC ad EF. est autem ABG triangulum triangulo DEF æquale. & triangulum igitur ABC ad triangulum DEF duplam proportionem habebit eius, quam habet BC ad EF. Quare similia triangula inter se in dupla sunt proportione laterum homologorum. quod ostendere oportebat.

11. huius.

11. quinti.

15. huius.

Diffinit. 10. quinti.

1. huius.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum est, si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, vt prima ad tertiam, ita esse triangulum, quod fit à prima ad triangulum, quod à secunda simile, & similiter descriptum: quoniam ostensum est vt CB ad BG, ita ABC triangulum ad triangulum ABG, hoc est ad triangulum DEF. quod ostendere oportebat.

THEOREMA XIII. PROPOSITIO XX.

Similia polygona in similia triangula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis: & polygonum ad polygonum duplam proportionem habet eius, quam latus homologum habet ad homologum latus.

Sint similia polygona ABCDE FGHKL, & sit AB homologum ip si FG. Dico polygona ABCDE FGHKL in similia triangula diuidi, & numero æqualia, & homologa totis: & polygonum ABCDE ad polygonum FGHKL duplam proportionem habere eius, quam habet AB ad FG. Iungantur BE EC GL LH. & quoniam simile est ABCDE polygonum polygono FGHKL, angulus BAE angulo CFL est æqualis: atque est vt BA ad AE, ita CF ad FL. Quoniam igitur duo triangula sunt ABE FGL vnum angulum vni angulo æqualem habentia; circum æquales autem angulos latera proportionalia: erit triangulum ABE triangulo FGL æquiangulum. ergo & simile. angulus igitur ABE æqualis est angulo FGL. est autem & totus ABC angulus

6. huius.

angulus

gulus aequalis toti FGH, propter similitudinem polygonorum. ergo reliquus EBC reliquo LGH est aequalis. Et quoniam ob similitudinem triangulorum ABE FGL, est vt EB ad BA, ita LG ad GF. Sed & propter similitudinem polygonorum, vt AB ad BC, ita est FG ad GH; erit ex aequali vt EB ad BC, ita LG ad GH. & circum æquales angulos EBC LGH la

tera sunt proportionalia. equiangulum igitur est EBC triangulum triangulo LGH. quare & simile. Eadem ratione & ECD triangulum simile est triangulo LHK. Similia igitur polygona ABCDE FGHLK in similia triagula diuiduntur, & numero æqualia. Dico & homologa totis, hoc est vt proportionalia sint triagula, & antecedentia quidem esse ABE EBC ECD, consequentia aut ipsorum FGL LGH LHK. & ABCDE polygonum ad polygonum FGHLK duplam proportionem habere eius, quam latus homologum habet ad homologum latus; hoc est AB ad FG. Iungantur enim AC FH. Et quoniam propter similitudinem polygonorum angulus ABC est equalis angulo FGH, atque est vt AB ad BC, ita FG ad GH: erit triangulum ABC triangulo FGH equiangulum: æqualis igitur est angulus quidem BAC angulo GFH, angulus vero BCA angulo GHF. præterea qui equalis est BAM angulus angulo GFN, ostensus autem est & ABM angulus æqualis angulo FGN; erit & reliquus AMB reliquo FNG aqualis. ergo equiangulum est ABM triangulum triangulo FGN. Similiter ostendemus & triangulum BMC triangulo GNH equiangulum esse. Vt igitur AM ad MB, ita est FN ad NG, & vt BM ad MC, ita GN ad NH. quare & ex aequali vt AM ad MC, ita FN ad NH. Sed vt AM ad MC, ita ABM triagulum ad triagulum MBC, & triagulum AME ad ipsum EMC, inter se enim sunt vt bases. & vt vnũ antecedentiũ ad vnũ consequentiũ, ita omnia antecedentia ad omnia consequentia. Vt igitur AMB triagulum ad triagulum BMC, ita triagulum ABE ad ipsum CBE. Sed vt AMB ad BMC, ita AM ad MC. & vt igitur AM ad MC, ita ABE triagulum ad triagulum EBC. Ea de ratione & vt FN ad NH, ita FGL triagulum ad triagulum GLH. atque est vt AM ad MC, ita FN ad NH. ergo & vt triagulum ABE ad triagulum BEC, ita triagulum FGL ad triagulum BEC. & permutando vt ABE triagulum ad triagulum FGL, ita triagulum BEC ad triagulum GLH. Similiter ostendemus iunctis BD GK, & vt BEC triagulum ad triagulum LGH, ita esse triagulum ECD ad triagulum LHK. Et qui est vt ABE triagulum ad triagulum FGL, ita triagulum EBC ad triagulum LGH, & ad huc triagulum ECD ad ipsum LHK: erit & vt vnũ antecedentiũ ad vnũ consequentiũ, sic omnia antecedentia ad omnia consequentia, ergo vt triagulum ABE ad triagulum FGL, ita ABCDE polygonum ad polygonum FGHLK. Sed AB E triagulum ad triagulum FGL duplam proportionem habet eius, quam latus homologum AB habet ad homologum latus FG; similia enim triagula in dupla sunt proportionem laterum homologorum. ergo & ABCDE polygonum ad polygonum FGHLK duplam proportionem habet eius, quam AB latus homologum habet ad FG homologum latus. Similia igitur polygona in similia triagula diuiduntur, & numero æqualia: & homologa totis, et polygonum ad polygonum duplam habet proportionem eius, quam habet latus homologum ad homologum latus. quod oportebat demonstrare.

Eodem modo & in similibus quadrilatis ostendetur ea esse in dupla proportionem laterum homologorum. ostensum autem est & in triangulis.

C O R O L L A R I V M P R I M V M.

Ergo vniuersæ similes rectilineę figure inter se sunt in dupla propor.

proportione homologorum laterum. & si ipsarum A B FG tertiam proportionalem sumamus, quæ sit X; habebit AB ad X duplam proportionem eius, quam habet AB ad FG. habet autem & polygonum ad polygonum, & quadrilaterum ad quadrilaterum duplam proportionem eius, quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc est AB ad FG. atque ostensum est hoc in triangulis.

COROLLARIUM SECUNDUM.

Vniuerse igitur manifestum est, si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, ut prima ad tertiam, ita esse figuram, quæ sit à prima ad eam, quæ à secunda, similem & similiter descriptam: quod ostendere oportebat.

Ostendemus etiam aliter & expeditius homologa esse triângula.

Exponatur enim rursus polygonum ABCDEFGHKL, & iungatur BE EC GL LH. Dico ut ABE triângulû ad triângulû FGL, ita esse triângulû EBC ad triângulû LGH; & triângulû CDE ad ipsum HKL. Quoniam simile est ABE triângulû triângulo FGL; habebit ABE triângulû ad triângulû FGL duplâ proportionem eius, quam habet BE ad GL. Eadem ratione & triângulû BEC ad GLH triângulum duplam proportionem habet eius, quam BE ad GL. est igitur ut ABE triângulum ad triângulum FGL, ita triângulum BEC ad GLH triângulû. Rursus quoniam simile est triângulum EBC triângulo LGH, habebit EBC triângulum ad triângulum LGH duplam proportionem eius, quam recta linea CE habet ad rectam HL. Eadem ratione, & ECD triângulum ad triângulum LHK duplam proportionem habet eius, quam CE ad HL. est igitur ut triângulum BEC ad triângulum LGH, ita CED triângulum ad triângulum LHK. ostensum autem est & ut EBC triângulum ad triângulum LGH, ita triângulum ABE ad triângulum FGL. ergo & ut triângulum ABE ad triângulum FGL, ita triângulum BEC ad GLH triângulum, & triângulum ECD ad ipsum LHK. & ut igitur unum antecedentium ad unum consequentium, sic omnia antecedentia ad omnia consequentia, & reliqua ut in priori demonstratione. quod ipsum demonstrare oportebat.

Ex antecedente.

ii. quind.

ad. ex. d. 11.

ad. ex. d. 11.

ad. ex. d. 11.

ii. quind.

THEOREMA XV. PROPOSITIO XXI.

Quæ eidem rectilineo sunt similia, & inter se similia sunt.

Sit enim utrumque rectilineorum A. B simile rectilineo C. Dico & rectilineum A rectilineo B simile esse. Quoniam enim simile est A rectilineum rectilineo C, & ipsi æquiangulum erit, & circum æquales angulos latera habebit proportionalia. Rursus quoniam simile est rectilineum B rectilineo C, æquiangulum ipsi erit, & circum

cum æquales angulos latera proportionalia habebit. Vtrumque igitur rectilicorum A B ipsi C æquiangulum est, & circum æquales angulos latera habet proportionalia. Quare & rectilicorum A ipsi B est æquiangulum, lateraq; circum æquales angulos proportionalia habet; ac propterea A ipsi B est simile, quod demonstrare oportebat.

T H E O R E M A X V I . P R O P O S I T I O . X X I I .

Si quattuor rectæ lineæ proportionales fuerint, & rectilinea, quæ ab ipsis fiunt, similia & similiter descripta proportionalia erunt. Et si rectilinea, quæ ab ipsis fiunt, similia & similiter descripta proportionalia fuerint, & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

18. huius.

11. huius.

11. huius.

Coro. 20. huius.
11. quinquagesima.

11. huius.

9. quintus.

2.

Sint quattuor rectæ lineæ proportionales AB CD EF GH, & vt AB ad CD, ita sit EF ad GH. de scribanturq; ab ipsis quidem AB CD similia & similiter posita rectilinea KAB LCD: ab ipsis vero EF GH describantur rectilinea similia, & similiter posita MF NH. Dico vt KAB rectilicorum ad rectilicorum LCD, ita esse rectilicorum MF ad ipsum NH rectilicorum. Sumatur enim ipsarum quidæ AB CD tertia proportionalis X; ipsarum vero EF GH tertia proportionalis O. Et quoniam est vt AB ad CD, ita EF ad GH: vt autem CD ad X, ita GH ad O; erit ex æquali vt AB ad X, ita EF ad O. Sed vt AB quidem ad X, ita est rectilicorum KAB ad LCD rectilicorum: vt autem EF ad O, ita rectilicorum MF ad rectilicorum NH. Vt igitur KAB rectilicorum ad rectilicorum LCD, ita est rectilicorum MF ad NH rectilicorum. Sed sit vt KAB rectilicorum ad rectilicorum LCD, ita rectilicorum MF ad rectilicorum NH. Dico vt AB ad CD, ita esse EF ad GH. fiat enim vt AB ad CD, ita EF ad PR, & describatur ab ipsa PR alterutri rectilicorum MF NH simile & similiter positum rectilicorum SR. Quoniam igitur est vt AB ad CD, ita EF ad PR: & descripta sunt. ab ipsis quidem AB CD similia & similiter posita KAB LCD rectilinea, ab ipsis vero EF PR similia & similiter posita rectilinea MF SR; erit vt KAB rectilicorum ad rectilicorum LCD, ita rectilicorum MF ad RS rectilicorum. ponitur autem & vt rectilicorum KAB ad rectilicorum LCD, ita MF rectilicorum ad rectilicorum NH. ergo vt rectilicorum MF ad rectilicorum NH, ita MF rectilicorum ad rectilicorum SR. Quod cum rectilicorum MF ad vtrumque ipsum NH SR eandem habeat proportionem, erit rectilicorum NH ipsi SR æquale. est autem ipsi simile, & similiter positum. Ergo GH est æqualis PR. Et quoniam vt AB ad CD, ita est EF ad PR, æqualis autem PR ipsi GH; erit vt AB ad CD, ita EF ad GH. Si igitur quattuor rectæ lineæ proportionales fuerint, & rectilinea, quæ ab ipsis fiunt, similia & similiter descripta proportionalia erunt. & si rectilinea, quæ ab ipsis

ab ipsis sunt, familia & similiter descripta proportionalia fuerint, & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt, quod oportebat demonstrare.

L E M M A.

At vero si rectilinea æqualia & familia sint, homologa ipsorum latera inter se æqualia esse, hoc modo demonstrabimus.

Sint æqualia & familia rectilinea NH SR: & sit vt HG ad GN, ita RP ad PS. Dico RP ipsi H G esse æqualem. Si enim inæquales sint, vna ipsarum maior erit. Sit RP maior, quàm HG. Et quoniam est vt RP ad PS, ita HG ad GN; & per mutando erit vt RP ad HG, ita PS ad GN. maior autem est PR, quàm HG. ergo & PS quàm GN maior erit. quare & rectilineum RS rectilineo HN est maius. Sed & æquale, quod fieri non potest. non igitur inæqualis est PR ipsi GH. ergo æqualis sit necesse est, quod oportebat demonstrare.

F. C. C O M M E N T A R I V S.

Ergo GH est æqualis PR. Demonstrat hoc antecedens lemma ratione ducente ad id, quod fieri non potest. Sed tamen licet etiam recta demonstratione uti, in hunc modum.

L E M M A.

Sint æqualia & familia rectilinea NH SR: sitq; latus GH homologū ipsi PR. Dico GH ipsi PR æquale esse.

Fiat enim vt GH ad PR, ita PR ad aliam quæ sit T, erit GH ad T, vt rectilineū NH ad rectilineū SR. ergo GH est æqualis ipsi T. Sed cū tres rectæ lineæ GH PR T sint proportionales, erit rect. angulū contentum GH T, hoc est quadratum GH æquale quadrato PR; ac propterea recta linea GH ipsi PR est æqualis, quod oportebat demonstrare.

11. huius.
Corol. 10
huius.

17. huius.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO. XXIII.

Æquiangula parallelogramma inter se proportionem habent ex lateribus compositam.

Sint æquiangula parallelogramma AC CF æqualem habentia BCD angulū angulo ECG. Dico parallelogrammum AC ad parallelogrammum CF proportionem habere compositam ex lateribus, videlicet compositam ex proportionem, quam habet BC ad CG, & ex proportionem quā DC habet ad CE. ponatur enim vt BC sit in directum ipsi CG. ergo & DC ipsi CE in directum erit: & compleatur DG parallelogrammum: exponaturq; recta linea quædā K: & fiat vt BC quidē ad CG, ita K ad L; vt autem DC ad CE, ita L ad M. proportionem igitur ipsius K ad L: & L ad M eadem sunt, quæ proportionem laterum, videlicet BC ad CG, & DC ad CE. Sed proportio K ad M composita est ex proportionem K ad L, & proportionem L ad M. quare & K ad M proportionem habet ex lateribus compositam. Et quoniam est vt BC ad CG, ita

24. primi.

12. huius.

1. huius.

X AC

11. quinti.

11. quinti.

AC parallelogrammum ad parallelogrammum CH; sed ut BC ad CG, ita K ad L; ita parallelogrammum AC ad CH parallelogrammum. Rursus quoniam est ut DC ad CE, ita CH parallelogrammum ad parallelogrammum CF: ut autem DC ad CE, ita L ad M, & ut L ad M, ita erit parallelogrammum CH ad CF parallelogrammum. Itaque cum ostensum sit, ut K quidem ad L, ita AC parallelogrammum ad parallelogrammum CH: ut autem L ad M, ita parallelogrammum CH ad CF parallelogrammum; erit ex æquali ut K ad M, ita AC parallelogrammum ad parallelogrammum CF proportionem habebit compositam ex lateribus æquiangula igitur parallelogramma inter se proportionem habent ex lateribus compositam. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIUS.

COROLLARIUM. Ex iam demonstratis colligitur triangula, quæ vnum angulum vni angulo æqualem habent, proportionem habere ex lateribus compositam; sunt enim ea parallelogrammorum æquiangulorum dimidia.

Colligitur præterea quo modo ex duabus datis proportionibus, vel etiam pluribus proportio componatur, ex proportionibus enim BC ad CG, & DC ad CE proportio composita est K ad M. Quod si ex tribus componenda sit proportio, rursus ex ea, quæ ex duabus constat, & ex tertia aliam eodem modo componemus, quæ quidem ex tribus composita erit, & ita deinceps in alijs.

Proportio autem data ex data proportionem maiori hoc modo auferetur.

12. huius.

Sint datae proportionem A ad B, & C ad D, quarum proportio C ad D sit maior, & oporteat à proportionem C ad D auferre proportionem A ad B. fiat ut A ad B, ita C ad aliam videlicet ad F, quæ inter C & D media statuitur. Dico proportionem A ad B iam ablata esse à proportionem C ad D, & proportionem, quæ relinquitur esse eam, quam habet F ad D. Quoniam enim proportio C ad D componitur ex proportionem C ad F, & proportionem F ad D, si auferatur una dictarum proportionum, videlicet C ad F, quæ est A ad B, relinquetur proportio F ad D. atque illud est, quod facere oportebat.

Quomodo autem in numeris proportionem, & componantur & auferantur ex iam dictis facile constare potest, & ex ijs, quæ tradit Purbachius, vel Regiomontanus in epitomate magnæ constructionis Ptolemæi propositione XVIII. primi libri. Sed placuit hoc loco apponere theorematum nonnulla à nobis elaborata, quæ ab his non multum abhorrent, & elementarium loco esse possunt.

T H E O R E M A . I.

Triangula, quorum vnus angulus vni angulo est æqualis, inter se proportionem habent eandem, quam rectangula, quæ lateribus æqualem angulum comprehendentibus, continentur.

Sint triangula ABC DEF, siq. angulus A angulo D æqualis. Dico triangulum ABC ad triangulum DEF eandem proportionem habere, quam BAC rectangulum ad rectangulum EDF. Ducantur perpendiculares BG EH. erit triangulum BAG triangulo EDH simile; est enim angulus ad A æqualis angulo

ad D,

ad D, & angulus BCA rectus aequalis recto EHD . ergo & reliquis reliquis aequalis. *Ut igitur* GB ad BA , ita HE ad ED . Sed *ut* GB ad BA , ita $rectangulum$ quod fit ex BG & AC ad $rectangulum$ BAC , cum habeant eandem altitudinem, videlicet rectam lineam AC . & similiter *ut* HE ad ED , ita $rectangulum$ ex EH , & DF ad $rectangulum$ EDF . $rectangulum$ igitur ex BG & AC ad $rectangulum$ BAC est *ut* $rectangulum$ ex EH , & DF ad $rectangulum$ EDF ; & permutando $rectangulum$ ex BG & AC ad $rectangulum$ ex EH & DF , *ut* BAC $rectangulum$ ad $rectangulum$ EDF . Sed $rectanguli$ ex BG & AC dimidium est ABC $triangulum$ ex 41 primi; habent enim eandem basim AC , & altitudinem eandem BG : & $rectanguli$ ex EH & DF dimidium $triangulum$ DEF . $triangulum$ igitur ABC ad $triangulum$ DEF eandem proportionem habet, quam $rectangulum$ BAC ad $rectangulum$ EDF . Quare $triangula$ quorum unus angulus uni angulo est aequalis inter se proportionem habent eandem, quam $rectangula$, quae lateribus aequalem angulum comprehendentibus continentur. quod demonstrare oportebat.

4. huius.

1. huius.

11. quinti.

15. quinti.

COROLLARIUM.

Ex hoc sequitur parallelogramma etiam equiangula inter se proportionem habere eandem, quam $rectangula$, quae ipsorum lateribus continentur, cum sint eius modi $triangulorum$ dupla.

15. quinti.

THEOREMA III.

$Triangula$ et parallelogramma inter se proportionem habent composita ex proportionibus basium, et proportionibus altitudinum.

Sint $triangula$ ABC DEF : & ducantur perpendiculares AG DH . Dico $triangulum$ ABC ad $triangulum$ DEF proportionem habere compositam ex proportionibus basium BC ad basim EF ; & ex proportionibus altitudinis AG ad DH altitudinem. Vel igitur AG est aequalis DH , vel inequalis, & rursus vel BC est aequalis EF vel inequalis. Sit primum AG aequalis DH , &

BC inequalis ipsi EF , fiatq; *ut* BC ad EF , ita recta linea quaedam K ad L : & *ut* AG ad DH , ita L ad M . Itaque $triangulum$ ABC ad $triangulum$ DEF est, *ut* basim BC ad EF basim ex prima huius, hoc est *ut* K ad L . & cum DH sit aequalis AG , erit M ipsi L aequalis: $triangulum$ q; ABC ad ipsum DEF , *ut* K ad M : proportio autem K ad M composita est ex proportionibus K ad L , & proportionibus L ad M , hoc est ex proportionibus basium BC ad basim EF , & proportionibus altitudinis AG ad altitudinem DH . Eodem modo demonstrabitur, si basim BC sit aequalis basi EF , cum inequales sint altitudines AG DH : erunt enim KL

12. huius.

7. quinti.

inter se aequales, & ex ijs, quae demonstravimus ad primam huius, $triangulum$ ABC ad $triangulum$ DEF proportionem habebit eandem, quam L ad M , hoc est quam K ad M . $triangulum$ igitur ABC ad $triangulum$ DEF proportionem habet compositam ex proportionibus K ad L , hoc est basium BC ad basim EF . & ex proportionibus L ad M , hoc est altitudinis AG ad DH altitudinem. Quod si basim BC EF aequales sint, itemq; altitudines aequales AG DH , nihilominus idem sequetur, nam K L M

inter se aequales erunt, & $triangulum$ ad $triangulum$ proportionem habebit compositam ex proportionibus K ad L . & L ad M . hoc est ex proportionibus basium & proportionibus altitudinum. Deniq; si basim BC EF inequales sint, & similiter inequales altitudines AG DH . Ponitur AG minor, quam

1. huius.

Ex demon-
stratis 1. hu-
ius.

15. quinti.

DH. & ab ipsa DH abscindatur HN aequalis AG: iunganturq; EN NF; & rursus fiat vt basim BC ad basim EF, ita K ad L: vt autem NH ad HD, hoc est vt AG ad HD, ita L ad M. Quoniam igitur triacula AEC NEF eandem habent altitudinem, inter se erunt vt basim. quare triangulum ABC ad triangulum NEF est vt BC ad EF, hoc est vt K ad L. Sed triangulum NEF ad triangulum DEF est vt altitudo NH, vel AG ad DH altitudinem, videlicet vt L ad M. ex aequali igitur triangulum ABC ad triangulum DEF, est vt K ad M. habet aut K ad M proportionem compositam ex proportione K ad L, & proportione L ad M. ergo & triangulum ABC ad triangulum DEF proportionem habet compositam ex proportione K ad L & proportione L ad M, hoc est ex proportione basim BC ad basim EF, & proportione altitudinis AG ad altitudinem DH. Sed cum trianguli ABC dupli sit parallelogrammum BO, & trianguli DEF duplum parallelogrammum EP; habebit parallelogrammum BO ad parallelogrammum EP proportionem compositam ex proportione basim BC ad basim EF, & proportione altitudinis AG ad DH altitudinem. triacula igitur & parallelogramma inter se proportionem habent compositam ex proportione basim, & proportione altitudinum. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO. XXIII.

Omnis parallelogrammi, quæ circa diametrum sunt parallelogramma, et toti et inter se similia sunt.

2. huius:

11. quinti.

29. primi.

4. huius.

21. huius.

Sit parallelogrammum ABCD, cuius diameter AC: circa diametrum vero AC parallelogramma sint EG HK. Dico parallelogramma EG HK, et toti ABCD, et inter se similia esse. Quoniam enim vni laterum trianguli ABC, videlicet ipsi BC parallela ducta est EF, erit vt BE ad EA, ita CF ad FA. Rursus quoniam vni laterum trianguli ACD, nempe ipsi CD ducta est parallela FG, vt CF ad FA, ita erit DG ad GA. Sed vt CF ad FA, ita ostensa est et BE ad EA. ergo et vt BE ad EA, ita DG ad GA, componendoq; vt BA ad AE, ita DA ad AG, et permutando vt BA ad AD, ita EA ad AG. parallelogrammorum igitur ABCD EG latera, quæ circa communem angulum BAD proportionalia sunt. Et quoniam parallela est GF ipsi DC, angulus quidem AGF est æqualis angulo ADC; angulus uero CFA æqualis angulo DCA; et angulus DAC est communis duobus triangulis ADC AGF; erit triangulum ADC triangulo AGF æquiangulum. Eadem ratione et triangulum ACB æquiangulum est triangulo AFE. totum igitur parallelogrammum ABCD parallelogrammo EG est æquiangulum. ergo ut AD ad DC, ita AG ad GF: vt autem DC ad CA, ita GF ad FA: et vt A ad CB, ita AF ad FE: et præterea vt CB ad BA, ita FE ad EA. Itaque quoniam ostensum est vt DC ad CA, ita esse GF ad FA: vt autem AC ad CB, ita AF ad FE; erit ex æquali vt DC ad CB, ita GF ad FE. ergo parallelogrammorum ABCD EG proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos; ac propterea parallelogrammum ABCD parallelogrammo EG est simile. Eadem ratione & parallelogrammum ABCD simile est parallelogrammo KH. Vtrumque igitur ipsorum EG HK parallelogrammorum parallelogrammo ABCD est simile. quæ autem eidem rectilineo sunt similia, & inter se similia sunt. parallelogrammum igitur EG simile est parallelogrammo HK. Quare omnis parallelogrammi, quæ circa diametrum sunt parallelogramma & toti & inter se sunt similia. quod ostendere oportebat.

PROBLEMA VII. PROPOSITIO XXV.

Dato rectilineo simile, & alteri dato æquale idem constituere.

Sit datum quidem rectilineum, cui oportet simile constituere ABC, cui autem æquale sit D. oportet ipsi ABC simile, & ipsi D æquale idem constituere. applicetur enim ad rectam quidem lineam BC triangulo ABC æquale parallelogrammum BE; ad rectam vero CE applicetur parallelogrammum CM æquale ipsi D, in angulo FCE, qui CBL angulo est æqualis. in directum igitur est BC ipsi CE, & LE ipsi EM. Sumatur ipfarum BC CF media proportionalis GH. & ab ipsa GH describatur triangulum KGH simile & similiter positum triangulo ABC. Et quoniam est vt BC ad GH, ita GH ad CF, si autem tres rectę lineę proportionales sint, vt prima ad tertiam, ita est figura, quę sit à prima, ad eam, quę à secunda, similem & similiter descriptam: erit vt B C ad C F, ita A B C triangulum ad triangulum K G H. Sed & ut B C ad C F, ita parallelogrammum B E ad E F parallelogrammum, & vt igitur triangulum A B C ad triangulum K G H, ita B E parallelogrammum ad parallelogrammum E F. quare permutando vt A B C triangulum ad parallelogrammum B E, ita triangulum K G H ad E F parallelogrammum. est autem triangulum ABC æquale parallelogrammo B E. æquale igitur est & K G H triangulū parallelogramo E F. Sed E F parallelogrammū æquale est rectilineo D. ergo & triangulum K G H ipsi D est æquale. est autem K G H simile triangulo A B C. Dato igitur rectilineo ABC simile, & alteri dato æquale idem constitutum est K G H. quod facere oportebat.

44. primi.

14. primi.
13 huius.
18. huius.

Cor. 20. huius.

11. quinti.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XXVI.

Si à parallelogrammo parallelogrammum auferatur simile toti, & similiter positum, communem ipsi angulum habens, circa eandem diametrum est toti.

A parallelogrammo enim ABCD parallelogrammum AF auferatur, simile ipsi ABCD, & similiter positum, communemq; ipsi angulum habens DAB. Di co parallelogrammum ABDD circa eandem esse diametrum parallelogrammo AF. non enim, sed si fieri potest, sit ipforum diameter AHC & producat G F vsque ad H; ducaturq; per H alterutri ipfarum AD B C parallela HK. Quoniam igitur circa eandem diametrum est ABCD parallelogrammum parallelogrammo KG; & erit parallelogrammum ABCD parallelogrammo KG simile. ergo vt DA ad AB, ita GA ad AK. est autem & propter similitudinem parallelogrammorum ABCD EG, vt DA ad AB, ita GA ad AE. et vt igitur GA ad AE, ita GA ad A K. Quod cum GA ad utramque ipfarum AK AE eandem proportionem habeat, erit AE ipsi AK æqualis, minor maiori, quod fieri non potest. Non igitur circa eandem diametrum est ABCD parallelogrammum parallelogrammo AH. Quare circa eandem diametrum erit ipsi AF. Si igitur à parallelogrammo parallelogrammum auferatur simile toti, et similiter positum, communem ipsi angulum habens, circa eandem diametrum est toti. quod demonstrare oportebat.

24. huius.
2. diff. huius.
11. quinti.
9. quinti.

THEO-

THEOREMA XX. PROPOSITIO XXVII.

Omniū parallelogrammorum ad eandem rectam lineam applicatorum, et deficientium figuris parallelogrammis similibus et similiter positis ei quæ à dimidia describitur; maximū est quod ad dimidiam est applicatum, simile existens defectui.

A Sit recta linea AB; seceturq; bifariam in C; et ad AB rectam lineam applicetur parallelogrammū AD deficiens figura parallelogramma DB, simili & similiter posita ei, quæ à dimidia ipsius AB descripta est, hoc est à CB. Dico omniū parallelogrammorum ad rectam lineam AB applicatorum, et deficientium figuris parallelogrammis similibus, et similiter positis ipsi DB, maximum esse AD. applicetur enim ad rectam lineam AB parallelogrammum AF, deficiens figura parallelogramma FB simili et similiter posita ipsi DB. Dico AD parallelogrammum parallelogrammo AF maius esse. Quoniam enim simile est parallelogrammum DB parallelogrammo FB, circa eādem diametrum sunt. Ducatur eorum diameter DB; et describatur figura. Quoniam igitur CF est æquale ipsi FE, commune apponatur FB. totum igitur CH toti KE est æquale. Sed CH est æquale CG, quoniam et recta linea AC ipsi CB. ergo et GC ipsi EK æquale erit. commune apponatur CF. totum igitur AF est æquale gnomoni LMN, quare et DB hoc est AD parallelogrammum, parallelogrammo AF est maius. omniū igitur parallelogrammorum ad eandem rectam lineam applicatorum, et deficientium figuris parallelogrammis similibus, et similiter positis ei, quæ à dimidia describitur; maximum est, quod ad dimidiam est applicatum. quod demonstrare oportebat.

Ex antecede-
dente. 31
42. primi.
36. primi.

C A L I T E R. Sit enim rursus AB secta bifaria in puncto C, et applicatum sit AL. deficiens figura LB. et rursus ad rectam lineam AB applicetur parallelogrammum AE deficiens figura EB simili, et similiter posita ei, quæ à dimidia AB describitur, videlicet ipsi LB. Dico parallelogrammum AL, quod ad dimidiā est applicatum maius esse parallelogrammo AE. Quoniam enim simile est EB ipsi LB, circa eandem sunt diametrum. sit ipsorum diameter EB, et describatur figura. Et quoniam LF æquale est LH, etenim FG ipsi CH est æqualis; erit LF ipso EK maius. est autē LF æquale DL. maius igitur est et DL ipso EK. commune apponatur KD. ergo totum AL toto AE est maius. quod oportebat demonstrare.

36. primi.
43. primi.

F. C. COMMENTARIUS.

A Et ad AB rectam lineam applicetur parallelogrammum ad deficiens figura parallelogramma.]

Describatur à recta linea CB parallelogrammum quodcumque libuerit DB, et totum parallelogrammum ABE compleatur. erit ad rectam lineam AB applicatum parallelogrammum AD deficiens figura parallelogramma DB, simili & similiter posita ei, quæ à dimidia ipsius AB descripta est.

Applicetur enim ad rectam lineam AB parallelogrammum AF deficiens figura parallelogramma FB, simili et similiter posita ipsi DB.

Sumatur in recta linea AB inter C B quoduis punctum K, & ab ipsa KE describatur parallelogrammum simile & similiter positum ipsi DB parallelogrammo, quod sit KBHF, et HF ad G producat

producatur. erit rursus ad rectam lineam AB applicatum parallelogrammum AF deficiens figura parallelogramma FB , simili & similiter posita ipsi DB .

Sit enim rursus ab secta bifariam in puncto C . Nō videtur hec alia demonstratio, sed alius casus. quare theorema fortasse in hunc modū aptius, et manifestius explicabitur.

Sit recta linea AB , seceturq; bifariam in C , et ab ipsa CB describatur parallelogrammum vicumque DB , et totum parallelogrammum ABE compleatur. Iam ad rectam lineam AB applicatum erit parallelogrammum AD , deficiens figura parallelogramma DB simili & similiter posita ei, quę descripta est à dimidia ipsius AB , hoc est à CB . Dico omnium parallelogrammorum ad rectam lineam AB applicatorum, & deficientium figuris similibus et similiter positis ipsi DB , maximum esse AD . Iungatur enim DB parallelogrammū. DB diameter. erit recta linea ad quam alia parallelogramma applicanda sunt, vel maior quàm dimidia ipsius AC vel minor. Sumatur primo maior, & sit AK ; atque à puncto K ipsi BE parallela ducatur KF , quę diametro DB in F occurrat; & per F ducatur GHI parallela ipsi AB & figura compleatur. erit ad AB applicatum aliud parallelogrammum AF deficiens figura parallelogramma FB , simili & similiter posita ipsi DB ; quippe quę eandem diametrum consistat. Dico igitur AD maius esse quàm AF . Quoniam enim supplementum CF est æquale ipsi FE ; communi appositum FB , erit totum CH toti KE æquale. at CH est æquale GC , quoniam & AC ipsi CB . ergo & GC æquale est KE . apponatur utrique commune CF . totum igitur AF gnomoni LMN est æquale. quare & DB parallelogrammum, hoc est AD maius erit quàm AF .

C

43. primi.

Sumatur deinde AO minor, quàm dimidia AC , & per O ipsi BE parallela ducatur OP , quę cum diametro BD producta conveniat in P . denique per P ducatur QPR parallela ipsi AB , & secunda figura compleatur. Erit rursus ad AB applicatum aliud parallelogrammum AP deficiens figura parallelogramma PB ipsi DB simili & similiter posita. Dico rursus AD quàm AP maius esse. Quoniam enim parallelogrammum DR est æquale parallelogrammo DQ , erit DR maius quàm SQ . Sed OD est æquale DR . ergo et OD ipso SQ est maius. commune apponatur AS . totum igitur AD , quàm totum AP maius erit. Quare omnium parallelogrammorum ad eandem rectam lineam applicatorum, & deficientium figuris similibus, & reliqua, quę sequuntur. quod oportebat demonstrare.

36. primi.

43. primi.

PROBLEMA VIII. PROPOSITIO XXVIII.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma, quę similis sit alteri datę. oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum est, non maius esse eo, quod ad dimidiam applicatur, similibus existentibus defectibus, et eo quod à dimidia, et eo, cui oportet simile deficere.

Sit data quidem recta linea AB : datum autem rectilineum, cui oportet æquale ad datam rectam lineam AB applicare, sit C , non maius existens eo, quod ad dimidiam applicatum est, similibus existentibus defectibus: cui autem oportet simile deficere sit D . oportet ad datam rectam lineam AB , dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma, quę similis sit ipsi D . Secetur AB bifariam in E , & ab ipsa EB describatur simile, & similiter positum ipsi D ; quod sit $EBFG$, & compleatur AG parallelogrammum. Itaque AG vel æquale est ipsi

13. huius.

est ipsi C, vel eo maius, ob determinationem. & si quidem AG sit æquale C, factum iam erit, quod proponebatur: etenim ad rectam lineam AB dato rectilineo C æquale parallelogrammum AG applicatum est, deficiens figura parallelogramma GB, ipsi D simili. Si autem non est æquale, erit HE maius quam C; atque est HE æquale G B. ergo & G B quam C est maius. quo autem G B superat C, ei excessui a quale, ipsi vero D simile & similiter positum idem constituatur KLMN. Sed D est simile GB. quare & KM ipsi G B simile erit. Sit igitur recta linea quidem KL homologa ipsi GE, LM vero ipsi CF. & quoniam æquale est GB ipsis C KM, erit GB ipso KM maius. maior igitur est recta linea GE ipsa KL; et GF ipsa LM. ponatur GX æqualis KL, & GO æqualis LM, & compleatur XG O P parallelogrammum. æquale igitur est & simile GP ipsi KM. Sed KM simile est GB. ergo & GP ipsi GB est simile. circa eandem igitur est diametrum GP ipsi GB. Sit ipsorum diameter GPB, & figura describatur. Itaque quoniam GB est æquale ipsis C KM, quorum GP est æquale KM, erit reliquus $\gamma\phi r$ gnomon æqualis reliquo C. Et quoniam OR est æquale XS, commune apponatur PB. totum igitur OB toti XB est æquale. Sed XB est æquale TE, quoniam & latus AE lateri EB. quare & TE ipsi OB æquale. cum une apponatur XS, ergo totum TS est æquale toti gnomoni $\gamma\phi r$. At $\gamma\phi r$ gnomon ipsi C ostensus est æqualis. & TS igitur ipsi C æquale erit. Quare ad datam rectam lineam AB dato rectilineo C æquale parallelogrammum TS applicatum est, deficiens figura parallelogramma PB ipsi D simili, quoniam & PB simile est ipsi GP. quod facere oportebat.

25. huius.

21. huius.
26. huius.

43. primi.
36. primi.

F. C. COMMENTARIUS.

Quo autem GB superat C, ei excessui æquale, ipsi vero D simile, & similiter positum idem constituatur. Ut autem excessus, quo alterum rectilineum alterum superat, facile inveniatur libuit, sequens problema apponere.

Duorum rectilineorum inæqualium excessum, quo maius superat minus, inuenire.

Sint duo rectilinea inæqualia A B, quorum maius sit A. oportet inuenire excessum, quo rectilineum A ipsum B superat. Dato enim rectilineo A in quouis angulo æquale parallelogrammum constituatur CDEF: & ad rectam lineam DE in angulo æquali ipsi DCF, applicetur parallelogrammum DGHE æquale rectilineo B. erit recta linea DG in directum ipsi CD, & EH in directum FE. est igitur ut parallelogrammum FD ad parallelogrammum DH, hoc est ut rectilineum A ad rectilineum B, ita recta linea FE ad EH. atque est rectilineum A rectilineo B maius. maior igitur est recta linea FE ipsa EH. Itaque a recta linea FE abscindatur EK ipsi EH æqualis, & a puncto K alterutri ipsarum FC ED parallela ducatur KL. erit parallelogrammum KD parallelogrammum DH æquale, & ob id parallelogrammum FL est excessus, quo parallelogrammum FD superat parallelogrammum DH, hoc est quo rectilineum A ipsum B rectilineum superat. Duorum igitur rectilineorum inæqualium A B excessus inuentus est. quod scesse oportuit.

54. primi.

14. primi.

PROBLEMA IX. PROPOSITIO. XXIX.

Ad datam rectam dato rectilineo equale parallelogram-
mum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ similis sit
alteri datæ.

Si data recta linea AB, datum vero rectilineum cui oportet æquale ad ipsam AB applicare, fit C: cui autem oportet simile excedere D. Itaq; oportet AB rectam lineam datum rectilineo C æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma simili D. Secetur AB bifariam in E, arque ex EB ipsi D simile, & similiter positum parallelogrammum describatur BF, & vtriusque quidem BF. C æquale, ipsi vero D simile, & similiter positum idem constituitur GH. Si simile igitur est GH ipsi FB. Itaq; KH quidem latus homologue lateri FL,

KG vero ipsi FE. Et quoniam parallelogrammum GH maius est ipso FB, erit recta
linea KH maior quam FL, & KG maior quam FE. producantur FL. FE: & ipsi quidē
KH æqualis sit FLM; ipsi vero KG æqualis FEN: & compleatur MN parallelogram-
mum. ergo MN æquale est, & simile ipsi GH. Sed GH est simile EL: & MN igitur ip-
si EL simile eritque propterea circa eandem diametrum est EL ipsi MN. Ducatur ip-
sorum diameter FX, & figura describatur. Itaque quoniam GH ipsi EL C est equa-
le, sed GH est æquale MN; erit & MN æquale ipsi EL C. commune auferatur EL. re-
liquis igitur $\Gamma\Gamma$ gnomoni ipsi C est æqualis. Et quoniam AE est æqualis EB, equa-
le erit & AN parallelogrammum parallelogrammo NB, hoc est ipsi LO. commune
adponatur EX. totum igitur AX æquale est gnomoni $\Phi\Gamma\Gamma$. Sed $\Phi\Gamma\Gamma$ gnomon est
æqualis C. ergo & AX ipsi C erit æquale. Ad datam igitur rectam lineam AB dato
rectilincō C æquale parallelogrammum applicatum est AX, excedens figura paral-
lelogrāma FO ipsi D simili; quoniam & ipsi EL simile est OP. quod fecisse oportebat.

25. huius:

21 huius.
26. huius.

24. huius.

PROBLEMA X. PROPOSITIO XXX.

Datam rectam lineam terminatam extrema ac media ratione
secare.

Sit data recta linea terminata AB. oportet ipsam AB extrema, ac media ratione secare. Describat enim ex A B quadratum BC, & ad AC ipsi BC æquale parallelogrammum applicetur CD, excedens figura AD ipsi BC simili. quadratum autem est BC, ergo & AD, quadratum erit. Et quoniam BC est æquale CD, commune auferatur CE. reliquum igitur BF reliquum AD est æquale. est autem & ipsi æquigulū, ergo ipsorum BF AD latera, & sibi ipsis respondent. ut alterum FE ad AC, hoc est ipsi AB, & ED ipsi AE, quod

46: primi.
Ex ante-
cedente.

14. huius.
34. primi.

γ est

14. qu³ti. est quàm AE . ergo AE quàm EB est maior . Recta igitur linea AB extrema ac media ratione secunda est in E , & maior ipsius portio est AE , quod facere oportebat .
11. secundi. A L I T E R . Sit data recta linea AB . oportet ipsâ AB extrema ac media rone secunda re . Secetur enim AB in C , ita ut rectangulum , quod continetur AB BC a quale sit quadrato ex AC . Quoniam igitur rectangulum ABC a quale est quadrato ex AC , erit ut BA ad AC , ita AC ad CB . ergo AB recta linea extrema ac media ratione secunda est . quod facere oportebat .
17. huius.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO. XXXI.

In rectangulis triangulis figura , quæ fit à latere rectum angulum subtendente , æqualis est eis , quæ à lateribus rectum angulum continentibus fiunt , similibus , & similiter descriptis .

8. huius. Sit triangulum rectangulum ABC , rectum habens angulum BAC . Dico figuram , quæ fit ex BC æqualem esse eis , quæ ex BA AC fiunt , similibus , & similiter descriptis . Ducatur perpendicularis AD . Quoniam igitur in triangulo rectangulo ABC ab angulo recto , qui est ad A ad BC basim perpendicularis ducta est AD , erunt triangula ABD ADC , quæ sunt ad perpendicularæ similia toti ABC , & inter se se . Et quoniam simile est ABC triangulum triangulo ABD , erit ut CB ad BA , ita AB ad BD . Quod est tres rectæ lineæ proportionalis sint , ut prima ad tertiam , ita erit figura , quæ fit ex prima ad eam , quæ ex secunda , similem , & similiter descriptam . Vt igitur CB ad BD , ita figura , quæ fit ex CB ad eam , quæ ex BA , similem , et similiter descriptam . Eadem ratione et ut BC ad CD , ita figura , quæ fit ex BC ad eam , quæ ex CA . quare et ut B C ad ipsas BD DC , ita figura , quæ ex BC ad eas , quæ ex BA AC , similes , & similiter descriptas . æqualis autem BC ipsis BD DC . ergo figura , quæ fit ex BC æqualis est eis , quæ ex BA AC fiunt , similibus , & similiter descriptis . In rectangulis igitur triangulis , figura , quæ fit à latere rectum angulum subtendente , æqualis est eis , quæ à lateribus rectum angulum continentibus fiunt , similibus , & similiter descriptis . quod ostendere oportebat .
- Coro. 20. huius. A L I T E R . Quoniam similes figuræ sunt in dupla proportionem laterum homologorum ; figura , quæ fit ex BC ad eam , quæ ex BA duplam proportionem habebit eius , quam habet BC ad BA . habet autem & quadratum ex BC ad quadratum ex BA duplam proportionem eius , quam BC ad BA . ergo & ut figura , quæ ex BC ad eam , quæ ex BA , ita quadratum ex BC ad quadratum ex BA . Eadem ratione & ut figura , quæ ex BC ad eam , quæ ex CA , ita quadratum , quod ex BC ad illud , quod ex CA quadratum . & ut igitur figura quæ ex BC ad eas , quæ ex BA AC , ita quod ex BC quadratum ad quadrata , quæ ex BA AC . quadratum autem , quod ex BC æquale est eis , quæ ex BA AC quadratis . ergo & figura , quæ fit ex BC est æqualis eis , quæ ex BA AC fiunt , similibus , & similiter descriptis . quod ostendere oportebat .

20. huius. A L I T E R . Quoniam similes figuræ sunt in dupla proportionem laterum homologorum ; figura , quæ fit ex BC ad eam , quæ ex BA duplam proportionem habebit eius , quam habet BC ad BA . habet autem & quadratum ex BC ad quadratum ex BA duplam proportionem eius , quam BC ad BA . ergo & ut figura , quæ ex BC ad eam , quæ ex BA , ita quadratum ex BC ad quadratum ex BA . Eadem ratione & ut figura , quæ ex BC ad eam , quæ ex CA , ita quadratum , quod ex BC ad illud , quod ex CA quadratum . & ut igitur figura quæ ex BC ad eas , quæ ex BA AC , ita quod ex BC quadratum ad quadrata , quæ ex BA AC . quadratum autem , quod ex BC æquale est eis , quæ ex BA AC quadratis . ergo & figura , quæ fit ex BC est æqualis eis , quæ ex BA AC fiunt , similibus , & similiter descriptis . quod ostendere oportebat .
11. quinti.
47. primi.

F. C. COMMENTARIUS.

- A Quare & ut BC ad ipsas BD DC , ita figura , quæ fit BC ad eas , quæ ex BA AC fiunt , & similiter descriptas . Quoniam enim est ut BC ad BD , ita figura , quæ fit à CB ad eam , quæ à BA similem , & similiter descriptam ; erit & convertendo ut DB ad BC , ita figura , quæ fit à B A ad eam , quæ à BC similem & similiter descriptam . præterea cum sit ut BC ad CD , ita figura , quæ fit à BC ad eam , quæ à C A : & convertendo ut DC ad CB , ita erit figura , quæ fit à C A ad eam , quæ à CB . Sit igitur figura , quæ fit à B A magnitudo prima ; figura , quæ à BC magnitudo secunda ; recta linea DB magnitudo tertia , & recta EC quarta ; figura vero , quæ fit ab AC

AC magnitudo quinta & recta linea *DC* sexta. Itaque prima magnitudo ad secundam, est vt tertia ad quartam; quinta vero ad secundam, vt sexta ad quartam. ergo ex vigesima quarta quinti libri composita prima & quinta ad secundam erit, vt composita tertia & sexta ad quartam, hoc est figurae quae sunt à *B.A.* *AC* ad eam, quae à *BC* erunt vt rectae lineae *BD* *DC* ad rectam *B* *C* & rursus conuertendo figura, quae sit à *BC* ad eas, quae à *B.A.* *AC* erit, vt recta linea *BC* ad rectas *BD* *DC*.

Et vt igitur figura, quae à *BC* ad eas, quae à *B.A.* *AC*, ita quod ex *BC* quadratum *B* ad quadrata, quae ex *BA.* *AC*:

Hoc similiter concludemus, vt proxime dictum est, ex vigesima quarta quinti. erit enim figura, quae sit à *B.A.* magnitudo prima; figura, quae à *BC* secunda; quadratum ex *B.A.* tertia; & quadratum ex *BC* quarta; figura vero, quae sit ab *AC* quinta; & quadratum ex *AC* sexta. Hoc theoremate multo vniuersalius est illud, quod à Pappo demonstratur in quarto libro mathematicarum collectionum.

Si sit triangulum *ABC*, & ab ipsis *AB* *BC* describantur quaevis parallelogramma *AB* *ED* *BCFG*; & lineae *DE* *FG* producantur ad *H*, iungaturque *HB*; fient parallelogramma *ABED* *BCFG* aequalia parallelogrammo contento *AC* *HB*, in angulo, qui vtrisque *BAC* *DHB* sit aequalis.

Producatur enim *HB* ad *K*, & per *A* *C* ipsi *KH* parallelae ducantur *AL* *CM*; & *LM* iungatur. Itaque quoniam parallelogrammum est *ALHB*; erunt *AL* *BH* e-
34. primi.
30. primi.
33. primi.
34. primi.
35. primi.
 quales, & parallelae. Similiter aequales & parallelae *MC* *HB*. ergo & *LA* *MC* aequales & parallelae sint necesse est; & propterea *LM* *AC*. parallelogrammum igitur est *ALMC* in angulo *LAC*, hoc est in angulo aequali vtrisque *BAC* *DHB*. est enim angulus *DHB* ipsi *LAB* aequalis. Et quoniam *DABE* parallelogrammum aequale est parallelogrammo *LABH*, etenim in eadem basi *AB*, & in eisdem parallelis *AB* *DH* constitit: parallelogrammum autem *LABH* parallelogrammo *LAKN* est aequale, cum sit in eadem basi *LA*, & in eisdem parallelis *LA* *HK*: erit parallelogrammum *ADEB* aequale parallelogrammo *LAKN*. et ob eandem causam parallelogrammum *BGFC* parallelogrammo *KNMC*. parallelogramma igitur *DABE* *BGFC* parallelogrammo *LACM* aequalia sunt, hoc est ei, quod *AC* *HB* continetur, in angulo *LAC*, qui est aequalis vtrisque *BAC* *BHL*. Atque hoc multo vniuersalius est, quam quod in triangulo rectangulo de quadratis demonstratur.

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXXII.

Si duo triangula componantur ad vnum angulum, quae duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ita vt homologa latera ipsorum etiam sint parallela, reliqua triangulorum latera in directum sibi ipsis constituta erunt.

Sint duo triangula *ABC* *DCE*, quae duo latera *BA* *AC* duobus lateribus *CD* *DE* proportionalia habeant, vt sit sicut *BA* ad *AC*, ita *CD* ad *DE*; parallela autem sit *AB* ipsi *DC*, et *AC* ipsi *DE*. Dico *BC* ipsi *CE* in directum esse. Quoniam enim *AB* parallela est *DC*, et in ipsas incidit recta linea *AC*; erunt anguli

alterni $\angle BAC$ $\angle ACD$ æquales inter se. Eadẽ ratione et $\angle CDE$ æqualis est $\angle ACD$. Quare et $\angle BAC$ ipsi $\angle CDE$ est æqualis. Et quoniam duo triângula sunt ABC DCE , vñũ anguli, qui ad A , vñũ angulo qui ad D æqualem habentia, circum æquales autem angulos latera proportionalia, quod sit vt BA ad AC , ita CD ad DE ; erit triângulum ABC triângulo DCE æquiangulum. ergo $\angle ABC$ angulus est æqualis $\angle DCE$. ostensus autem est et $\angle ACD$ æqualis angulo BAC . totus igitur $\angle ACE$ duobus $\angle ABC$ BAC est æqualis. communis apponatur ACB . ergo anguli ACE ACB angulis BAC ACB CBA æquales sunt. Sed BAC ACB CBA anguli duobus rectis sunt æquales. et anguli igitur ACE ACB duobus rectis æquales erunt. Itaque ad quandam rectam lineam AC , et ad punctum in ipsa C duæ rectæ lineæ BC CE non ad easdem partes positæ angulos, qui deinceps sunt ACE ACB duobus rectis æquales efficiunt. ergo BC ipsi CE in directum erit. Si igitur duo triângula componantur ad vñũ angulum, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ita vt homologa latera ipsorum etiam sint parallela; reliqua triangulorum latera in directum sibi ipsis constituta erunt. quod demonstrare oportebat.

4. huius,

4. primi,

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXXIII.

In circulis æqualibus anguli eandem habent proportionem, quam circumferentiæ, quibus insistant, siue ad centra, siue ad circumferentias insistant. Adhuc autem & sectores, quippe qui ad centra sunt constituti.

Sint æquales circuli ABC DEF ; et ad centra quidem ipsorum GH sint anguli BGC EHF , ad circumferentias vero anguli BAC EDF . Dico vt circumferentiâ BC ad EF circumferentiam, ita esse et BGC angulum ad angulum EHF , et angulum BAC ad angulum EDF : et adhuc sectorẽ BGC ad EHF sectorem. Ponantur enim circumferentiæ quidem BC æquales quocumque deinceps CK KL ; circumferentiæ vero EF , rursus æquales quocumque FM MN : et iungantur GK GL HM HN . quoniam igitur circumferentiæ BC CK KL inter se sunt æquales, et anguli BGC CGK KGL inter se æquales erunt. quotuplex igitur est circumferentiâ BL circumferentiæ BC , rotuplex est et BGL angulus anguli BGC . Eadem ratione et quotuplex est circumferentiâ NE circumferentiæ EF , totuplex et ENH angulus anguli EHF . Si igitur æqualis est BL circumferentiâ circumferentiæ EN , et angulus BGL angulo ENH erit æqualis; et si circumferentiâ BL maior est circumferentiâ EN , maior erit et BGL angulus angulo ENH ; et si minor, minor. Quattuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus nimirum circumferentijs BC EF : et duobus angulis BGC EHF , sumpta sunt circumferentiæ quidem BC , et BGC anguli æque multiplicia, videlicet circumferentiâ BL , et BGL angulus; circumferentiæ vero EF , et ENH anguli æque multiplicia, nempe circumferentiâ EN , et angulus ENH . atque ostensum est si circumferentiâ BL superat circumferentiâ EN , et BGL angulũ superare angulum ENH , et si æqualis, æqualem, et si minor, minorem esse. Vt igitur circumferentiâ BC ad EF circumferentiâ, ita

27. rectij,

Diff. 5
quinũ.

angulus.

angulus BGC ad angulum EHF. Sed ut BGC angulus ad angulum EHF, ita angulus BAC ad EDF angulum. uterque enim utriusque est duplus. et ut igitur BC circumferentia ad circumferentiam EF, ita et angulus BGC ad angulum EHF, et angulus BAC ad EDF angulum. Quare in circulis equalibus anguli eandem habent proportionem, quam circumferentia, quibus insunt, sine ad centra, siue ad circumferentiam insistant. Dico insuper, et ut BC circumferentia ad circumferentiam EF, ita esse sectorem GBC ad HEF sectorem. Iungantur enim BC CK, et sumptis in circumferentijs BC CK: punctis XO, iungantur et BXXC CO OK. Itaque quoniam duæ BG GC duabus CG GK æquales sunt, et angulos æquales continent; erit et basis BC basi CK æqualis. æquale igitur est et GBC triangulum triangulo GCK. Et quoniam circumferentia BC circumferentia CK est æqualis, et reliqua circumferentia, quæ complet totum circumferentia ABC æqualis est reliquæ, quæ eundem circumferentia complet. quare et angulus BXC angulo COK est equalis. similis igitur est BXC portio portioni COK: et sunt in equalibus rectis lineis BC CK. quæ autem in equalibus rectis lineis similes circumferentia portiones, et inter se equalis sunt. ergo portio BXC est æqualis portioni COK. est autem et BGC triangulum triangulo CGK æquale. et totus igitur sector BGC toti sectori CGK æqualis erit. Eadem ratione et GKL sector utriusque ipsorum GKC GCB est æqualis. Tres igitur sectores BGC CGK KGL æquales sunt inter se. Similiter et sectores HEF HFM HMN inter se sunt æquales. quotuplex igitur est LB circumferentia circumferentia BC, totuplex est et GBL sector sectoris GBC. Eadem ratione et quotuplex est circumferentia NE circumferentia EF, totuplex est et HEN sector sectoris HEF. quare si circumferentia BL circumferentia EN est equalis, et sector BGL equalis est sectori EHN. et si circumferentia BL superat circumferentiam EN, superat et BGL sector sectorem EHN, et si minor minor. Quattuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus quidem BC EF circumferentijs, duobus vero sectoribus GBC HEF, sumpta sunt æque multiplicia, circumferentia quidem BC et GBC sectoris circumferentia BL et GBL sector. circumferentia vero EF, et sectoris HEF æquemultiplicia circumferentia EN, et HEN sector. atque ostensum est si BL circumferentia superat circumferentiam EN, et sectorem BGL superare sectorem EHN. et si æqualis equalis esse; et si minor, minorem. est igitur ut BC circumferentia ad circumferentiam EF, ita sector GBC ad HEF sectorem. quod ostendere oportebat.

4. primi.

27. tertij.
11. diff. tertij.
24. tertij.

5. diffi. quia-
ii.

COROLLARIUM

Perspicuum etiam est, et ut sector ad sectorem, ita esse angulum ad angulum.

SEXTI LIBRI FINIS.

E V C L I D I S E L E M E N T O R V M LIBER SEPTIMVS

C V M S C H O L I I S A N T I Q V I S ,
E T C O M M E N T A R I I S

Federici Commandini Vrbinatis.

D I F F I N I T I O N E S .

I.

V N I T A S est, qua vnumquodque eorū,
quæ sunt vnum dicitur.

I I.

Numerus autem ex vnitatibus con-
stans multitudo.

I I I.

Pars est numerus numeri, minor ma-
ioris, quando maiorem metitur.

F. C. C O M M E N T A R I V S .

*Pars ea nomen inuenit à numero, per quem minor maiorem metitur. Si enim minor bis meti-
tur maiorem, dicitur pars dimidia, si ter dicitur tertia, si quater quarta. & ita in alijs.*

I I I I.

Partes autem, quando non metitur.

F. C. C O M M E N T A R I V S .

*Partes nomen trahunt ab ijs numeris, per quos communis duorum numerorum mensura vtra-
que ipsorum metitur. nam si communis eorum mensura maiorem numerum bis metiatur, & ma-
iorem ter, dicentur hae partes duae tertiae; si vero maiorem ter metiatur, & maiorem quater,
dicentur tres quartae. Quod si maiorem quinquies metiatur, dicentur tres quintae. & ita in re-
liquis. Recentiores numerum, per quem communis mensura maiorem metitur, numerantem, uel
numeratorem appellant, utpote qui partium multitudinem definiat: numerum vero, per quem
communis mensura maiorem metitur, denominantem, seu denominatorem dicunt, ut qui his par-
tibus nomen imponat.*

V.

Multiplex est maior minoris, quando minor eum metitur.

F. C.

Multiplex autem nomen habet ab eo numero, per quem minor eum metitur . Si enim minor bis metiatur maiorem, dicitur maior minoris duplus; si ter, triplus; si quater, quadruplas, & eodem modo in alijs.

V I .

Par numerus est, qui bifariam diuiditur.

V I I .

Impar vero, qui bifariam non diuiditur: vel qui à pari numero unitate differt.

V I I I .

Pariter par numerus est, quem par numerus per parem numerum metitur.

S C H O L I V M .

Si huic diffinitioni addamus tantum, ut pariter par numerus dicatur is, quem par numerus tantum per parem numerum metitur; faciemus pythagororum pariter parem, qui ad unitatem usque bifariam diuiditur; ut octo par numerus metitur per parem tantum. duodecim vero Euclidi est pariter par, quem & par numerus metitur per parem numerum; bis enim sex sunt duodecim; & impar numerus per parem metitur. nam si quattuor ter sumantur duodecim fient. Pariter vero imparem dicit, quem par numerus metitur per imparem numerum; ut decem, quem binarius per quinarium metitur. At $\alpha\epsilon\gamma\iota\sigma\delta\epsilon\gamma\tau\omega\varsigma$, hoc est impariter par est duodecim: etenim ternarius per quaternarium metitur. & simpliciter quod perfectum nomen est in compositione, per illud dicimus numerum metiri alium numerum. Itaque sciendum est $\alpha\epsilon\gamma\iota\sigma\delta\epsilon\gamma\tau\omega\varsigma$, hoc est impariter parem à pythagoreis sic dictum, plures diuisiones suscipere, quæ in partes æquales fiunt, nõ tamè ad unitatē usq; diuisionē procedere. Nouit autem hunc & in ipse Euclides, cuius mentionem facit in nono libro, pulchre ipsum neque pariter parem, neque pariter imparem dicens, per negationem duorum extremorum significauit, quemadmodum in contrarijs mediatis, media, quibus nomina impõsita non sunt, per negationem extremorum explicamus. Huius autem mentionem facit Euclides in 34 noni libri.

I X .

Pariter vero impar est, quem par numerus per numerum impari metitur.

Ex definitione octava, & nona, & ex ijs, quae in nono libro traduntur, apparet Euclidem pariter parem numeri appellare eum, quē par numerus per numerum parum metitur, siue sit ex numeris à binario duplatis, siue non: & pariter imparē appellare eum, quem par numerus per numerum imparē metitur, siue diuidium habeat imparē, siue parē. numeros enim à binario duplatis ipse pariter pares tantum appellat, & eos, quidindium imparē habent vocat pariter impares tantum. eos vero, qui neque à binario duplati sunt, neque diuidium habent imparē, & pariter pares, & pariter impares dicit. At Nicomacho, Boetioq; pars numeri species tres sunt: Vnā quae dicitur pariter par, alia quae pariter impar, & tertia, quae impariter par: Pariter par numerus est, qui pot in duo paria diuidi, eiusq; pars in alia duo paria, & rursus partis pars in alia duo paria; & hoc semper, quoad diuisio partium ad unitatem perueniat, vt 64. Pariter impar numerus est, qui quoniam par est, in partes quidem aequales diuiditur, partes vero eius mox indiuisibiles sunt, vt 6. 10. 14. 18. 22. Impariter par numerus est, qui inter duos iam dictos quodammodo medius est, diuiditur enim in partes aequales, eiusq; pars rursus diuiditur in alias partes aequales, & interdum partes partium in alias aequales diuidi possunt; sed diuisio ad unitatem usque non perducitur. Qui igitur bis est pariter par, Euclides pariter parē tantum vocat; qui vero bis pariter impar est, Euclides pariter imparē tantum. & qui bis impariter par Euclides & pariter parē, & impariter parē appellat. Quare illud, quod in extrema parte antecedentis scholij additur, verum non videtur, nisi fortasse intelligamus eum, qui pariter par est, & pariter impar eo modo, quo sinit Euclides, neque pariter parē esse tantum, neque pariter imparē tantum.

X.

Impariter vero impar numerus est, quē impar numerus per numerum imparē metitur.

X I .

Primus numerus est, quem vnitas sola metitur.

F. C. C O M M E N T A R I V S .

Primum numerum nullus metitur numerus, preterquam quod ipse se ipsum metitur.

X I I .

Primi inter se numeri sunt, quos sola vnitas communis mensura metitur.

X I I I .

Compositus numerus est, quem numerus aliquis metitur.

X I I I I .

Compositi inter se numeri sunt, quos numerus aliquis communis mensura metitur.

X V .

Numerus numerū multiplicare dicitur, quando quot unitates sunt in ipso, toties componitur multiplicatus, & aliquis gignitur.
Quando

X V I .

Quando duo numeri se se multiplicantes aliquem fecerint, qui factus est planus appellatur: latera vero ipsius sunt numeri se se multiplicantes.

X V I I .

Quando autem tres numeri se se multiplicantes aliquem fecerint, factus solidus appellatur: latera vero ipsius se se multiplicantes numeri,

X V I I I .

Quadratus numerus est, qui æqualiter est æqualis, vel qui duobus æqualibus numeris continetur.

X I X .

Cubus vero, qui æqualiter est æqualis æqualiter, vel qui tribus æqualibus numeris continetur.

X X .

Numeri proportionales sunt, quando primus secūdi, & tertius quarti æque multiplex fuerit, vel eadem pars, vel eadem partes.

F . C . C O M M E N T A R I V S .

Vel igitur primus est maior secundo, vel minor. & si quidem maior, vel eam minor metitur, vel non metitur. & si metitur erit primus secundi æque multiplex, atque tertius quarti: si vero non metitur, quae partes est secundus primi, eadem partes erit & quartus tertij. vel etiam hoc modo. si primus est maior secundo, quae pars, vel partes est secundus primi, eadem pars, vel partes erit & quartus tertij. sed si primus sit minor, quae pars, vel quae partes est primus secundi, eadem pars, vel eadem partes erit & tertius quarti. Ponit autem nunc minorem numerum maioris partem esse, vel partes, quod postea in quarto theoremate huius demonstratione confirmat.

X X I .

Similes plani, & solidi numeri sunt, qui latera habent proportionalia.

X X I I .

Perfectus numerus est, qui suis ipsius partibus est æqualis.

F . C . C O M M E N T A R I V S .

Numerus autem qui suis ipsius partibus minor est abundans appellatur, qui vero maior, diminutos. His definitionibus nos aliam addidimus. sed & petitiones quasdam, & communes notiones apponere libuit, quibus Euclides in his libris uti usus est.

Cum fuerint quocumque numeri deinceps proportionales, primus ad tertium duplam proportionem habere dicitur eius, quam habet ad secundum: & primus ad quartum triplam, & eodem modo in alijs.

PETITIONES.

- 1 Cuilibet numero quotlibet sumi posse aequales, vel multiplices.
- 2 Quolibet numero sumi posse maiorem.
- 3 Numerus infinite augetur, sed non infinite diminuitur.

COMMUNES NOTIONES.

- 1 Quicumque eiusdem, vel equalium aequae multiplices fuerint, & ipsi inter se sunt aequales.
- 2 Quorum idem numerus aequae multiplex fuerit, vel quorum aequae multiplices fuerint aequales, & ipsi inter se aequales sunt.
- 3 Quicumque eiusdem numeri, vel equalium eadem pars, vel eadem partes fuerint, & ipsi inter se sunt aequales.
- 4 Quorum idem, vel aequales numeri eadem pars, vel eadem partes fuerint, inter se sunt aequales.
- 5 Omnis numeri pars est unitas ab eo denominata, binarii enim numeri unitas pars est ab ipso binario denominata, quae dimidia dicitur, ternarii vero unitas est pars, quae a ternario denominata tertia dicitur, quaternarii quarta, & ita in alijs.
- 6 Unitas omnem numerum metitur per unitates, quae in ipso sunt.
- 7 Omnis numerus se ipsum metitur.
- 8 Si numerus metiatur numerum, & ille, per quem metitur, eundem metietur per eas, quae sunt in metiente, unitates.
- 9 Quicumque numerus alium metitur, multiplicans eum, vel multiplicitas ab eo, per quem metitur, ipsum ipsum producit.
- 10 Si numerus numerum alium multiplicans aliquem produxerit, multiplicans quidem productum metitur per unitates, quae sunt in multiplicato; multiplicatus vero metitur eundem per unitates, quae sunt in multiplicante.
- 11 Quicumque numerus metitur duos, vel plures, metietur quoque eum, qui ex illis componitur.
- 12 Quicumque numerus metitur aliquem, metietur quoque eum, quem ille ipse metitur.
- 13 Quicumque numerus metitur totum & ablatum, etiam reliquum metietur.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

Si duobus numeris inæqualibus expositis, detracto semper minore de maiore, reliquus minime metiatur præcedentem, quo ad assumpta fuerit vnititas; numeri à principio positi primi inter se erunt.

Duobus enim inæqualibus numeris expositis AB CD, detracto semper minore de maiore reliquus minime metiatur præcedentem, quoad assumpta fuerit vnititas. Dico numeros AB CD inter se primos esse; hoc est ipsos AB CD vnitatem solam metiri. Si enim AB CD non sint primi inter se, metietur eos aliquis numerus. metiatur, sitq; E: & CD quidem ipsum AB metiens relinquat se ipso minorem FA, AF vero metiens DG relinquat se ipso minorem GC; & GC metiens FH vnitatem HA relinquat, quoniam igitur numerus E ipsum CD metitur, CD vero metitur BF; & E ipsum BF metitur; metitur aut & totum BA. ergo & reliquum AF metietur. Sed AF metitur DG, quare & E ipsum DG metietur. metitur autem & totum DC. ergo & reliquum metietur CG. at CG metitur FH. & E igitur ipsum FH metietur. sed & metitur totum FA; & reliquam igitur vnitatem AH metietur, numerus existens. quod fieri non potest. non igitur ipsos AB CD metietur aliquis numerus. ergo AB CD primi inter se sunt. quod oportebat demonstrare.

Per 12. com.
notionem.
13. com. not.

F. C. COMMENTARIUS

Huius conuersam hoc modo demonstrabimus. non enim si de maiori semper minor detrahatur, non cessabit huiusmodi detractio antequam ad vnitatem deuentum fuerit.

Expositis duobus numeris inter se primis; si de maiori semper minor detrahatur, non cessabit huiusmodi detractio antequam ad vnitatem deuentum fuerit.

Sint enim numeri inter se primi AB CD; & si fieri potest ipsi manentibus, & detracto semper minore de maiore deuentum sit ad numerum HA, qui præcedet GC metiatur. Si igitur HA metitur GC, & ipsum FH metietur, metitur aut & se ipsum, ergo & FA metietur; ac propterea ipsum DG. sed & metietur GC. quare & totum DC metietur. atq; ob id ipsa BF metietur. metitur aut & FA, ut ostensum est. ergo & totum BA metietur. Itaque quoniam HA manens duos numeros AB CD metitur, erunt AB, CD inter se compositi. Sed & inter se primi ponuntur. quod fieri non potest. non igitur expositis duobus numeris inter se primis, si de maiori semper minor detrahatur, cessabit detractio, antequam ad vnitatem deuentum fuerit. quod oportebat demonstrare. Sed & illud constat.

Expositis duobus numeris inter se compositis, si de maiori semper detrahatur minor, detractio ad vnitatem usque non perueniet.

Si enim ad vnitatem perueniat, erunt hi inter se primi, sed & compositi. quod est absurdum.

Ex iam demonstratis problema quoque illud perspicue apparere potest.

Duobus numeris expositis comperire an inter se primi sint, an compositi.

Facta namque detractio, ut dictum est, si deueniet ad vnitatem usque, dicemus eos inter se primos esse, sin minus, compositos.

PROBLEMA I. PROPOSITIO II.

Duobus numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram inuenire.

Sint dati duo numeri non primi inter se AB CD, quorum minor sit CD. oportet ipsum AB CD maximam communem mensuram inuenire. Si igitur CD metitur AB cum etiam se ipsum metiatur, erit CD ipsam AB CD communis mensura. & perspicuum est eam maximam esse: nullus enim maior CD ipsum CD metietur:

z 2 si vero

E V C L I D . E L E M E N T .

Ex ante-
cedente.

12. com. not.

11. com. not.

si vero CD non metitur AB, ipsorum AB CD detracto semper minore de maiore, relinquetur aliquis numerus, qui metietur præcedentem. vnitas quidem non relinquetur, essent enim AB CD primi inter se, quod nõ ponitur. & CD quidem ipsum AB metiens relinquat se ipso minorem AE; AE vero metiens CD relinquat se ipso minorem CF; & CF ipsum AE metiatur. Itaque quoniã CF ipsum AE metitur, AE vero ipsum DF; & CF ipsum DF metietur, sed & metitur se ipsum. & totũ igitur metietur CD. At CD ipsum BE metitur. ergo & CF metitur BE, metitur autem & EA. & totum igitur AB metietur. sed & metitur CD. ergo CF ipsos AB CD metitur; ac propterea CF ipsorum AB CD est cõmunis mēsurā. dico etiam maximam esse. Si enim non est maxima, ipsos AB CD metietur aliquis numerus maior ipso CF. metiatur, sitq; G. & quoniam G ipsum CD metitur; CD vero ipsum BE; & G ipsum BE metitur. metitur autem & totum BA. & reliquum igitur AE metietur. Sed AE metitur DF. ergo & G ipsum DF metitur. metitur autem & totum DC. quare & reliquum CF metietur, maior minorem. quod fieri non potest. non igitur ipsos AB CD nũmeros aliquis metietur, maior ipso CF. ergo CF ipsorum AB CD maxima erit communis mēsurā. Duobus igitur numeris datis non primis inter se, maxima eorum communis mēsurā inuenta est. quod facere oportebat.

C O R O L L A R I U M .

Ex hoc manifestum est, si numerus duos numeros metiatur, et maximam eorum communem mēsurā metiri.

F . C . C O M M E N T A R I U S .

12. com. not.

13. com. not.

Hoc corollarium apparet ex postrema parte demonstrationis. sit enim duorum numerorum AB CD communis mēsurā CF: & sit numerus aliquis G, qui ipsos AB CD metiatur. Dico etiam maximam eorum communem mēsurā CF metiri. Quoniam enim G ipsum CD metitur: CD vero metitur BE: et G ipsum BE metitur. sed & metitur totum BA. ergo & reliquum AE metietur: metitur autem AE ipsum DF. ergo G ipsum DF metitur. Sed & metitur totum DC. Quare & reliquum CF, maximam scilicet eorum communem mēsurā metietur. quod demonstrare oportebat.

P R O B L E M A I I . P R O P O S I T I O I I I .

Tribus numeris datis non primis inter se, maximam ipsorũ cõmunem mēsurā inuenire.

Sint dati tres numeri non primi inter se ABC. oportet ipsorum ABC maximam communem mēsurā inuenire. Sumatur enim duorum AB maxima cõmunis mēsurā D. itaque D vel ipsum C metitur, vel non metitur. metiatur primũ. metitur autem et ipsos A B. ergo D numeros A B C metitur: et ob id ipsum est communis mēsurā. dico et maximam esse. si enim D non est ipsum A B C maxima communis mēsurā, metietur eos aliquis numerus maior ipso D. metiatur, et sit E. quoniam igitur E metitur numeros A B C, et ipsos AB metietur, et ipsorũ AB maximam cõmunē mēsurā, quæ est D. ergo E ipsum D metitur, maior minorem. quod fieri non põt. non igitur ABC numeros numerus aliquis maior ipso D metietur. ergo D ipsum ABC maxima est cõis mēsurā.

Non

Non metiatur autē D ipsum C. Dico primum numeros DC non esse primos inter se. Quoniam enim ABC non sunt inter se primi, metietur eos aliquis numerus. et qui metietur ipsos ABC, & ipsos AB metietur, et ipsorum AB maximam communem mensurā, videlicet D. metietur autem et ipsum C. ergo ipsos DC numerus aliquis metietur; ideoque DC non sunt inter se primi. Sumatur ipsorum maxima communis mensura E. et quoniam E ipsum D metitur, et D metitur ipsos AB; et E ipsos AB metitur. metietur autē et C. ergo et ipsos ABC metietur; eritque E ipsorum ABC communis mensura. Dico et maximam esse. si enim E non est ipsorum ABC maxima communis mensura, metietur ABC numeros numeros aliquis maior ipso E. metiatur, sitque F. et quoniam F metitur numeros ABC, et ipsos AB; et ipsorum AB maximam communem mensuram metietur, videlicet ipsum D. ergo F ipsum D metitur. metitur autem et ipsum C. quare F et ipsos DC, et ipsorum DC maximam communem mensuram metietur, videlicet ipsum E. ergo F ipsum E metitur, maior minorem. quod fieri non potest. non igitur ABC numeros numeros aliquis maior ipso E metietur. ergo ipsorum ABC maxima est communis mensura. Tribus igitur numeris datis non primis inter se, eorum maxima communis mensura inuenta est. quod facere oportebat.

A..... 16

B..... 12

C.... 4

D..... 6

E... 2

F—

Ex corollari
eced.

COROLLARIUM.

Ex his manifestum est, si numerus numeros tres metiatur, et ipsum A forum maximam communem mensuram metiri.

Eodem modo et pluribus numeris datis maximam communem B mensuram inueniemus.

F. C. COMMENTARIUS.

Ex his manifestum est &c.] Sequitur hoc, quemadmodum in antecedente demonstrauimus. A
Eodem modo &c.] Sed & illud constat, si numerus plures numeros metiatur, & communem B
eorum mensuram metiri.

THEOREMA II. PROPOSITIO III.

Omnis numerus omnis numeri minor maioris, vel pars est, vel partes.

Sint duo numeri A BC, quorum BC sit minor. Dico BC ipsius A vel partem esse, vel partes. Numeri enim A BC vel primi sunt inter se, vel non. sint prius inter se primi, & diuiso BC in unitates, quæ in ipso sunt, erit vnaquæque unitas earum, quæ in BC, pars aliqua ipsius A. ergo BC ipsius A partes est. sed non sint A BC inter se primi. Itaque BC vel ipsum A metitur, vel non. et siquidem metitur, erit BC pars ipsius A: sin minus, sumatur ipsorum A BC maxima communis mensura D; et diuidatur BC in numeros ipsi D æquales BE EF FC. Quoniam igitur D numerum A metitur, erit D pars ipsius A. æqualis autem est D uni cuique ipsorum BE EF FC. ergo et vnusquisque ipsorum BE EF FC pars est ipsius A: ac propterea BC ipsius A partes est.

A..... 8

B..... 5C

A..... 8

B... 4C

A..... 8

B... 2E... 2F... 2C

D... 2

Omnis

Omnis igitur numerus omnis numeri, minor maioris, vel pars est, vel partes, quod demonstrare oportebat.

Si numerus numeri pars fuerit, et alter alterius eadem pars; et
vterque vtriusque eadem pars erit, quæ vnus vnus.

Numerus A numeri BC pars fit: et alter D alterius EF
eadem pars, quæ est A ipsius B C. Dico et vtrumque A D
vtriusque BC EF eadem partem esse, quæ est A ipsius BC.
Quoniam enim quæ pars est A ipsius B C, eadem est et D
ipsius EF; quot numeri sunt in BC æquales ipsi A, tot erit
et in EF numeri æquales ipsi D. Diuidatur BC quidem in
numeros æquales ipsi A, videlicet in BG, GC; EF vero di
uidatur in numeros ipsi D æquales, hoc est EH HF. erit vtiq; æqualis multitudo
numeriorū BG GC multitudinī ipsorum EH HF. & quoniam æqualis est BG ipsi
A, & EH ipsi D, erunt BG EH ipsi A D æquales. Et eadem ratione cum GC sit æ
qualis ipsi A, & HF ipsi D; & GC HF ipsi A D æquales erunt. quot igitur numeri
sunt in BC, æquales ipsi A, tot sunt et in BC EF æquales ipsi A. D. ergo quotuplex
est BC ipsius A, totuplex erit et vterque BC EF vtriusque A D. quæ igitur pars est
A ipsius BC, eadem pars erit et vterque A D vtriusque BC EF. quod demonstra
re oportebat.

Ex hoc autem licet illud etiam demonstrare.

Si numerus numeri multiplex fuerit, et alter alterius æque multiplex; et vterque vtriusque æque multiplex erit, atque vnus vnus.

Sit enim A numerus numeri B multiplex, et alter C alterius D aequae multiplex. Dico utriusque AC utriusque ED aequae multiplicem esse, atque A ipsius B . quoniam enim A ipsius B multiplex est, & Cipsius D aequae multiplex; erit B ipsius A pars aliqua, & D ipsius C eadem pars. quare ex ijs, quae proxime tradita sunt & uterque BD utriusque AC eadem pars erit, quae est B ipsius A . Perque igitur AC utriusque BD aequae multiplex est, atque A ipsius B . quod demonstrare oportebat.

Sed quod de duobus dicitur, possumus etiam ad quocumque numeros amplificare. ¶ Si fuerint quocumque numeri quocumque numerorum æqualium multitudo, singuli singulorum æque multiplices, quotuplex est vnus vnus, totuplices erunt & omnes omnium [quod eodem modo demonstrabimus. Hoc autem respondebit ei, quod in prima propositione quinti libri de omnibus magnitudinibus demonstratur.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter al-
terius eedem partes; & vterque vtriusque ex-
dem partes erit, que vnus vnus.

Numerus enim AB numeri C partes fit, & alter D alterius F eedem partes, quæ AB ipsius C. Dico & utrumque AB DE utriusque C F easde partes esse, quæ AB ipsius C. quoniam enim quæ partes est AB ipsius C, eadem est DE ipsius F; quot partes sunt in AB ipsius C, tot erunt & in DE

partes ipsius F. Diuidatur AB quidem in partes ipsius C, videlicet AC GB; DE ve-
ro diuidatur in partes ipsius F, hoc est DH HE. erit ipforum AG GB multitudo e-
qualis multitudini ipforum DH HE. & quoniam quæ pars est AG ipsius C, eadem est pars
& DH ipsius F: quæ pars est AG ipsius C, eadem pars erit & vterque AG DH vtrius-
que C F. Simili ratione & quæ pars est GB ipsius C, eadem pars erit & vterque GB
HE vtriusque C F. Quæ igitur partes est AB ipsius C, eadem partes est & vterque A
B DE vtriusque C F. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIUS.

*Similiter & hanc, & antecedentem possumus ad quocumque numeros transferre; ut Si quot-
cumque numeri minores ad totidem alios referantur, sintque singuli singu-
lorum vel eadem pars, vel eadem partes; quæ pars, vel partes est vnus vnus, eadem
pars, vel eadem partes erunt & omnes omnium.*

THEOREMA V. PROPOSITIO VII.

Si numerus numeri pars fuerit, quæ ablatus ablati; & reliquus
reliqui eadem pars erit, quæ totus totius.

Numerus enim AB numeri CD pars sit, quæ ablatus AE ablati CF.
Dico & reliquum EB reliqui FD eandem partem esse, quæ est totus A
B totius CD. quæ enim pars est AE ipsius CF, eadem pars sit & EB ip-
sius CG. ergo quæ pars est AE ipsius CF, eadem pars est & AB ipsius
CF. quæ autem pars est AE ipsius CF, eadem pars ponitur & AB ipsius
CD. quæ igitur pars est AB ipsius CF, eadem est & AB ipsius CD. qua-
re AB vtriusque GF CD eadem est pars. equalis igitur est GE ipsi C
D. communis auferatur CF. ergo reliquus GC reliquo FD est equalis.
& quoniam quæ pars est AE ipsius CF, eadem est & EB ipsius GC: æ-
qualis autem est GC ipsi FD: quæ pars est AE ipsius CF, eadem erit &
EB ipsius FD. sed quæ pars est AE ipsius CF, eadem est & AB ipsius C
D. ergo quæ pars est EB ipsius FD, eadem est & AB ipsius CD. & reliquus igitur E
B reliqui FD eadem pars erit, quæ totus AB totius CD. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIUS.

Ex his autem illud quoque demonstrare licebit.

Si numerus numeri æque multiplex fuerit, atque ablatus ablati, & reliquus reli-
qui æque multiplex erit, atque totus totius.

*Iisdem enim, quæ supra, manentibus. sit numerus CD æque multiplex numeri
AB, atque ablatus CF ablati AE. Dico & reliquum FD reliqui EB æque multi-
plex esse, atque totus CD totius AB. quoniam enim CD ipsius AB æque multiplex
est, atque ablatus CF ablati AE; erit AB ipsius CD eadem pars, quæ est AE ip-
sius CF. ergo ex iam demonstratis & reliquus EB reliqui FD eadem pars est, quæ
totus AB totius CD. reliquus igitur FD reliqui EB æque multiplex erit, atque to-
tus CD totius AB. quod demonstrandum fuerat.*

THEOREMA VI. PROPOSITIO VIII.

Si numerus numeri partes fuerit, quæ ablatus ablati; & reli-
quus reliqui eadem partes erit, quæ totus totius.

Numerus enim AB numeri CD partes sit, quæ ablatus AE ablati CF. Dico & re-
liquum EB reliqui FD eandem partes esse, quæ totus AB totius CD. ponatur enim
ipfi

THEVCLID. ELEMENT.

ipſi A B æqualis GH. quæ igitur partes eſt GH ipſius CD, eadẽ eſt & AE ipſius CF. Diuidatur GH quidẽ in partes ipſius CD, videlicet G K KH: AE vero diuidatur in partes ipſius CF, videlicet AL LE. erit igitur ipſarũ GK KH multitudo æqualis multitudini ipſarũ AL LE. Et quoniã quæ pars eſt GK ipſius CD, eadem eſt & AL ipſius C F: maior autẽ CD, quã CF. ergo & GK, quã AL eſt maior. ponatur ipſi AL æqualis GM. quẽ igitur pars eſt GK ipſius CD, eadem eſt et GM ipſius CF: quare et reliquus MK reliqui FD eadẽ pars eſt, quẽ totus GK totius CD. Rurſus quoniã quæ pars KH ipſius CD, eadẽ eſt et E L ipſius CF; maior autem CD, quã CF: erit & KH quã EL maior. ponatur ipſi EL æqualis KN. quẽ igitur pars eſt KH ipſius CD, eadẽ eſt & KN ipſius CF. ergo & reliquus NH reliqui FD eadẽ pars eſt, quæ totus KH totius CD. oſtẽſum autem eſt & reliquum MK reliqui FD eandem partem eſſe; quæ totus GK totius DC, & vterque igitur MK NH ipſius DF eadem partes eſt, quẽ totus HG totius DC. æqualis autem vterque quidem MK NH ipſi EB; HG vero ipſi BA. & reliquus igitur EB reliqui FD eadem partes eſt, quæ totus AB totius CD. quod demonſtrare oportebat.

7. huius.

THEOREMA VII. PROPOSITIO IX.

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars; & permutando quæ pars eſt, vel partes primus tertij, eadẽ erit pars, vel eadem partes & ſecundus quarti.

Numerus enim A numeri BC pars ſit, & alter D alterius EF eadem pars, quẽ A ipſius BC. minor autem ſit A, quã D. Dico & permutando quæ pars eſt A ipſius D, vel partes, eadẽ partem eſſe & BC ipſius EF, vel eandem partes. Quoniã enim quæ pars eſt A ipſius BC, eadem eſt & D ipſius EF: quot numeri ſunt in BC æquales ipſi A, tot ſunt et in EF æquales ipſi D. diuidatur BC quidẽ in numeros ipſi A æquales, videlicet in BG GC: EF vero diuidatur in numeros ipſi D æquales, EH HF. erit ipſorũ BG GC multitudo quãlis multitudini ipſorum EH HF. et quoniã numeri BG GC inter ſe ſunt æquales; ſunt autem et æquales EH HF: atque eſt ipſorum BG GC multitudo æqualis multitudini ipſorum EH HF: quæ pars eſt BG ipſius EH, vel partes, eadem pars erit et GC ipſius HF, vel eadem partes. ergo quæ pars eſt BG ipſius EH, vel partes, eadem pars erit et vterque BC vtriuſque EF, vel eadẽ partes. æqualis autem eſt BG ipſi A, et EH ipſi D. quæ igitur pars eſt A ipſius D, vel partes, eadem pars erit et BC ipſius EF, vel eadẽ partes. quod demonſtrare oportebat.

5. huius,
6. huius.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO X.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eadem partes; & permutando quæ partes eſt primus tertij, vel pars, eadẽ partes erit & ſecundus quarti, vel eadem pars.

Numerus enim A B numeri C partes ſit, et alter DE alterius F eadẽ partes: ſit autem AB minor, quã DE. Dico et permutando quæ partes eſt AB ipſius DE, vel partes, eandẽ partes eſſe et C ipſius F, vel eandẽ partem. quoniã enim quæ partes eſt AB ipſius C, eadem partes eſt et DE ipſius F: quot ſunt in AB partes ipſius C, tot erunt et

in DE partes ipsius F. diuidatur. AB quidem in partes ipsius C, videlicet AG GB. DE vero diuidatur in partes ipsius F, hoc est DH HE. erit vtique ipsarum AG GB multitudo multitudini ipsarum DH HE æqualis, et quoniam quæ pars est AG ipsius C, eadem est pars et DH ipsius F. Et permutando quæ pars est AG ipsius DH, vel partes, eadem pars erit et C ipsius F, vel egedæ partes. simili ratione et quæ pars est GB ipsius HE, vel partes, eadem pars erit et C ipsius F, vel eadem partes. ergo quæ pars est AG ipsius DH, vel partes; eadem pars erit et AB ipsius DE, vel eadem partes. sed quæ pars est AC ipsius DH, vel partes, eadem pars est et C ipsius F, vel egedæ partes. Et quæ igitur partes est AB ipsius DE, vel pars, eadem partes est et C ipsius F, vel eadem pars. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA IX. PROPOSITIO XI.

Si fuerit vt totus ad totum , ita ablatuſ ad ablatum, & reliquuſ
ad reliquum erit, vt totuſ ad totum.

Sit vt totus AB ad totum CD, ita ablatus AE ad ablatum CF. Dico et reliquum EB ad reliquum FD ita esse, vt totus AB ad totum CD. Quoniam enim est vt AB ad CD, ita AE ad CF, quæ pars est AB ipsius CD, vel partes, eadẽ pars erit et AE ipsius CF, vel eadẽ partes, ergo et reliquus EB reliqui FD eadem pars erit, vel eadẽ partes, quæ AB ipsius CD est. igitur ut EB ad FD, ita AB ad CD. quod demonstrare oportebat.

	D	
B	F	Diff. 26.
E		7.8. huius.
	G	
A	C	Per cōcursā.
		Diff. 26.

F. C. COMMENTARIVS.

Precedens demonstratio congruit, cum AB fuerit minor, quam CD . sed si AB maior sit, quam CD , nihilominus idem demonstrabitur. nam vel CD metitur ipsam AB , vel non metitur. & si quidem metitur, quoniam est vt AB ad CD , ita AE ad C ; Perit AB ipsius CD aeque multiplex, atque AE ipsius CF . quare ex ijs, quae nos demonstrauimus ad septimā huius; & reliquis EB , reliqui EB reliqui FD aeque multiplex est, atq; totus AB totius CD . reliquis igitur EB ad reliquum FD , erit vt totus AB ad totum CD . si vero C non metitur ipsam AB , rursus: quoniam vt AB ad CD , ita est AE ad CF , quae partes est CD ipsius AB , egedem partes erit CF ipsius AE . ergo & reliquis FD , reliqui EB egedem partes est, quae totus CD totius AB . reliquis igitur EB ad reliquum FD ita erit, vt totus AB ad totum CD . quod oportebat demonstrare.

Diffi. 20.
Per cōuersā.
Diffi. 20.
D. ffi. 20.
huius.
Per cōuersā.
Diffi. 20.

THEOREMA X. PROPOSITIO. XII.

Si quotcumque numeri proportionales fuerint, vt vnus antecedentium ad vnum consequentium, ita erunt omnes antecedentes ad omnes consequentes.

Sint quotcumque numeri proportionales ABCD; sitq; vt A ad B, ita C ad D. Dico, vt A B, ita esse AC ad BD. Quoniam enim est vt A ad B, ita C ad D, quæ pars est A ipsius B, uel partes, eadem pars erit et C ipsius D, uel partes. et uterque igitur AC utriusque BD eadem pars est, uel partes, quæ A ipsius B, ergo ut A ad B, ita est AC ad BD. quod demonstrare oportebat.

Diff. 20.
§. 6. huius.

Per conuers.
Diff. 20.

Hoc quinto, & sexto uniuersalius est. quæ enim illic seorsum in parte, & partibus, eadem hoc loco unâ demonstrantur.

F. C. COMMENTARIUS.

Et hæc demonstratio congruit tantum, cum antecedentes numeri minores fuerint consequentibus. quod si maiores sint, rursus vel B metitur ipsum A, vel non metitur. si metitur, ita dicemus. Quoniam est ut A ad B, ita C ad D, æque multiplex erit A ipsius B, atque C ipsius D. ergo ex ijs, quæ demonstrauimus ad

BD æque multiplex est, atque A ipsius B. Ut igitur A ad B, ita erit uterque A C ad utrumque B D. Quod si B non metitur ipsum A, ita argumentabimur, quoniam est ut A ad B, ita C ad D, quæ partes est B ipsius A, eadem partes erit D ipsius C. ergo & uterque A C utriusque B D eadem partes est, quæ A ipsius B. quare ut A ad B, ita erit A C ad B D. Idem demonstrabimus etiam si plures sint numeri proportionales, hoc, quod sequitur, premissis. Quæ eadem eadem sunt numerorum proportioniones, et inter se eadem erunt.

Sit ut A ad B, ita C ad D: ut autem C ad D, ita E ad F. Dico ut A ad B, ita esse E ad F. Si enim numerus A sit maior, quam B, quoniam est ut A ad B, ita C ad D, quæ pars, vel partes est B ipsius A, eadem pars erit, vel partes D ipsius C. Rursus quoniam ut C ad D, ita est E ad F, quæ pars est, vel partes D ipsius C, eadem pars, vel partes erit F ipsius E. quæ igitur pars, vel partes est B ipsius A, eadem pars erit, vel partes F ipsius E. ergo ut A ad B, ita est E ad F.

Si vero A sit minor, quam B, quoniam ut A ad B, ita est C ad D, quæ pars est, vel partes A ipsius B, eadem pars, vel partes erit C ipsius D. Rursus quoniam ut C ad D, ita E ad F, quæ pars, vel partes est C ipsius D, eadem pars, vel partes erit E ipsius F. ergo quæ pars, vel partes est A ipsius B, eadem est pars, vel partes E ipsius F. ut igitur A ad B, ita E ad F. quod demonstrandum proposuimus.

Hoc demonstrato sunt numeri proportionales A B C, D E F; sitq; ut A ad D, ita B ad E, & C ad F. Eadē ratione demonstrabimus ut A ad D, ita esse A B ad D E. Et quoniam ut A ad D, ita est C ad F, erit ex ijs, quæ nos proxime demonstrauimus, ut A B ad D E, ita C ad F. nō aliter ostendemus ut A B ad D E, ita esse A B C ad D E F. ut igitur A ad D, ita erit A B C ad D E F. et eodē modo in alijs, quotquot numeri proportionales fuerint. Hoc autem respondet ei, quod in 13 quinti uniuerse de magnitudinibus demonstratur.

THEOREMA XI. PROPOSITIO XIII.

Si quattuor numeri proportionales fuerint, & permutando proportionales erunt.

Sint quattuor numeri proportionales ABCD; sitq; ut A ad B, ita C ad D. Dico et per-

et permutado proportionales esse, videlicet vt A ad C, ita esse B ad D. quonia enim est vt A ad B, ita C ad D, que pars est A ipsius B, vel partes, eade pars erit et C ipsius D, vel eadem partes. permutado igitur que pars est A ipsius C, vel partes, eade pars est et B ipsius D, vel partes. ergo vt A ad C, ita est B ad D. quod demonstrare oportebat.

Diff. 20.

g. 20. huiss.

F. C. COMMENTARIES.

Hęc demonstratio congruit, vbi antecedentes numeri minores sint consequentes. sicut, A minor, quàm C. si vero sint maiores, & A maior sit quàm B, & minor quàm C, ita dicemus. Quoniam est vt A ad B, ita C ad D; quae pars est, vel partes B ipsius A, eadem partes, vel partes erit D ipsius C. ergo permutando quae pars est, vel partes B ipsius D, eadem pars, vel partes erit A ipsius C. vt igitur A ad C, ita est B ad D.

[illegible]

Diff. 10.

9. 12. 1917.

684. dif. 20.

Quòd si *A* sit maior, quàm *B*, et maior, quàm *C*, ita argumētābimur.

Quoniam ut A ad B ita C ad D , quae pars, vel partes est D ipsius C , ea
 de pars, vel partes erit B ipsius A , ergo permutato quae pars, vel partes
 est D ipsius B , eadem pars, vel partes erit C ipsius A . est igitur ut
 A ad C ita B ad D . Denique si A sit minor, quam B , & maior, quam
 C , hoc modo. Quoniam ut A ad B ita C ad D , quae pars, vel partes est
 C ipsius D , eadem pars, vel partes est A ipsius B . permutando igitur
 quae pars est, vel partes C ipsius A , eadem pars, vel partes est D ipsius
 B . ergo ut A ad C , ita
 erit B ad D .

๑.๑๐.๕๖

Cổy, đĩ, 20,

THEOREMA XII. PROPOSITIO XIII.

Si fuerint quotcumque numeri, et alij ipsis multitudine æquales, qui bini fumantur, et in eadem proportionē; etiam ex æquali in eadem proportionē erunt.

Sint enim quotcumque numeri ABC, & alij ipsis multitudine equeles; qui bini fumantur, & in eadem proportionē DEF; sitq; vt A ad B, ita D ad E; vt autem B ad C, ita E ad F. Dico etiam ex equali vt A ad C, ita esse D ad F. Quoniam enim est vt A ad B, ita D ad E; erit permutato vt A ad D, ita B ad E. Rursus quoniam est vt B ad C, ita E ad F; permutato vt B ad E, ita erit C ad F. vt autem B ad E, ita erat A ad D. & vt igitur A ad D, ita C ad F. ergo permutato vt A ad C, ita D ad F. quod oportebat demonstrare.

Ex ante-
cedentia

Ex demon.
Hrois. ad 12
demon.

F. C. COMMENTARIUS.

*Quod si plures, quàm tres numeri
proportionales fuerint ABCD EFGH;
sitq; ut A ad B, ita E ad F: vt autem
B ad C, ita F ad G; et vt C ad D, ita G
ad H: similiter demonstrabimus ut A ad
C, ita esse E ad G. et quoniam est vt C ad*

Ad 3 Dicitur

EVCLID. ELEMENT.

Et ita G ad H, rursus demonstrabimus ut A ad D, ita E ad H. & eodem modo in alijs.
Sed quoniam Euclides conversam rationem, compositam, & diuisam, conuersionemq; ratio-
nis in numeris misit; nos eas, ne quid desideretur, hoc loco apponere curauimus.

PROPOSITIO I.

Si quattuor numeri proportionales sint, & conuertendo proportionales erunt.

Sint quattuor numeri proportionales ABCD;
sitq; ut A ad B, ita C ad D. Dico ut B ad A, ita
esse D ad C. Si enim A sit minor, quam B, quo-
miam est ut A ad B, ita C ad D, quae pars uel
partes est A ipsius B, eadē pars, uel eadē partes
erit C ipsius D, ergo ut B ad A, ita est D ad C.
Si uero A sit maior, quam B, rursus quoniam
ut A ad B, ita C ad D, quae pars, uel partes est B
ipsius A, eadem pars, uel partes erit D ipsius C.
Ut igitur B ad A, ita est D ad C.

PROPOSITIO II.

Si quattuor numeri proportionales sint, & componendo proportionales erunt.

Sint quattuor numeri proportionales A B C D; & sit ut A ad B, ita C ad D.
Dico ut A B ad E, ita esse C D ad D. nem misit ut A ad B, ita C ad D; & per-
mutando ut A ad C, ita erit E ad D. quare ex duodecima huius ut A B ad C D,
ita est E ad D. Rursus igitur permutando ut AB ad B, ita CD ad D.

PROPOSITIO III.

Si quattuor numeri proportionales sint, & diuidentio proportionales erunt.

Sint quattuor numeri proportionales A B C D; sitq; ut numerus AB,
qui ex duobus numeris consistit ad numerum B, ita C D ex duobus C D constans
ad ipsum D. Dico ut A ad B, ita esse C ad D. Quoniam enim est ut AB ad B, ita
CD ad D, erit permutando ut A B ad C D, ita B ad D. si autem fuerit ut totus
ad totum, ita ablatum ad ablatum, & reliquum ad reliquum erit, ut totus ad to-
tium, ergo A ad C est ut AB ad CD. sed ut AB ad C D, ita erat B ad D. Ex eo
igitur, quod demonstrauimus ad 12 huius, ut A ad C, ita erit B ad D: & rur-
sus permutando ut A ad B, ita C ad D.

PROPOSITIO IIII.

Si quattuor numeri proportionales sint, et per conuersionem ra-
tionis proportionales erunt.

Sint quattuor numeri proportionales A B C D; sitq; ut AB ad B, ita
CD ad D. Dico ut AB ad A, ita esse CD ad C. Quoniam enim est ut AB ad B, ita
CD ad D, erit permutando ut A B ad C D, ita B ad D. quod cum sit ut totus ad
totum, ita ablatum ad ablatum, erit & reliquum A ad reliquum C, ut AB ad
CD: & rursus permutando, conuertendoq; ut AB ad A, ita CD ad C.

Sed & quod Euclides de magnitudinibus demonstrauit in vigesima quarta
quinti libri, nos de numeris demonstrabimus in hunc modum.

PROPOSITIO V.

Si primus ad secundum eandem habeat proportionem, quam tertius ad quar-
tum; habeat autem et quintus ad secundum proportionem eandem, quam sextus
ad quartum; et compositus primus et quintus ad secundum eandem proportio-
nem

E V C L I D. E L E M E N T.

B æqualiter metitur, atque A ipsum C. Cum igitur A vtrūque ipforum C D æqualiter metiatur, erit C ipsi D æqualis. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XV. PROPOSITIO XVII.

Si numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos, facti ex ipsis eandem proportionem habebunt, quam multiplicati.

Numerus enim A duos numeros B C multiplicans faciat ipsos D E. Dico ut B ad C, ita esse D ad E. quoniam enim A ipsum B multiplicans fecit D, metietur B ipsum D per unitates, quæ sunt in A. metitur autem et F unitas numerum A per unitates, quæ in ipso sunt. & qualiter igitur F unitas numerum A metitur, atque B ipsum D. ergo ut F unitas ad numerum A, ita est B ad D. eadem ratione et ut F unitas ad numerum A, ita C ad E. & ut igitur B ad D, ita C ad E; & permutando ut B ad C, ita D ad E. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIUS.

Idem sequetur etiam si numerus aliquis plures quam duos numeros multiplicans fecerit totidem alios, facti namque eandem, quam multiplicati, proportionem habebunt.

Numerus enim A tres numeros BCD multiplicans faciat ipsos EFG. Dico ut B ad C, ita esse E ad F; & ut C ad D, ita F ad G. Similiter enim, ut supra, demonstrabimus, ut H unitas ad numerum A, ita esse B ad E, & C ad F, & D ad G. erit igitur ut B ad E, ita C ad F, & D ad G. itaque quoniam est ut B ad E, ita C ad F, erit permutando ut B ad C, ita E ad F. Rursus quoniam ut C ad F, ita D ad G, & permutando erit ut C ad D, ita F ad G. ut igitur B ad C, ita est E ad F; & ut C ad D, ita F ad G. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XVI. PROPOSITIO. XVIII.

Si duo numeri numerum aliquem multiplicantes fecerint aliquos, facti ex ipsis eandem proportionem habebunt, quam multiplicantes.

Duo enim numeri A B numerum aliquem C multiplicantes faciant ipsos D E. Dico ut A ad B, ita esse D ad E. Quoniam enim A ipsum C multiplicans fecit D, & C multiplicans A ipsum D fecit. Eadem ratione & C ipsum B multiplicans fecit E. Itaque numerus C duos numeros A B multiplicans ipsos D E fecit. est igitur ut A ad B, ita D ad E. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIUS.

Quod si plures quam duo numeri aliquem multiplicantes fecerint totidem alios, facti similiter eandem, quam multiplicantes, proportionem habebunt. quod eodem modo demonstrabimus.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO. XIX.

Si quattuor numeri proportionales fuerint, qui ex primo, & quarto

quarto fit numerus æqualis erit ei, qui fit ex secundo, & tertio. & si numerus, qui fit ex primo, & quarto equalis fuerit ei, qui ex secundo, & tertio, quattuor numeri proportionales erunt.

Sint quattuor numeri proportionales ABCD; sitq; ut A ad B, ita C ad D: & A quidẽ ipsũ D multiplicans faciat E: B vero multiplicans C faciat F. Dico E ipsi F equalem esse. multiplicans enim A ipsum C faciat G. & quoniam A ipsum quidẽ C multiplicans fecit G; ipsum uero D multiplicans E fecit: numerus A duos numeros CD multiplicans fecit ipso G. E. est igitur ut C ad D, ita G ad E. Vt autem C ad D, ita A ad B. quare & ut ad B, ita G ad E. Rursus quoniam A ipsum C multiplicans G fecit; sed & B ipsum C multiplicans fecit F: duo numeri A B numerum aliquem C multiplicantes fecerunt ipso G. F. ut igitur A ad B, ita est G ad F. Sed & ut A ad B, ita G ad E. ergo & ut G ad E, ita est G ad F. quod cum G ad utrumque ipsum E F eadẽ proportionem habeat, erit E ipsi F æqualis. Sed sit E equalis ipsi F. Dico ut A ad B, ita esse C ad D. ipsi enim constructis quoniam A ipsos C D multiplicans fecit G E, erit ut C ad D, ita G ad E. est autem E ipsi F equalis. ut igitur G ad E, ita G ad F. sed ut A ad B, ita C ad D. ergo & ut C ad D, ita G ad F. ut autem G ad F, ita A ad B: & ut igitur A ad B, ita C ad D. quod demonstrare oportebat.

Ex antecedente.

17. huius.

F. C. COMMENTARIUS.

Quod cum G ad utrumque ipsum E F eandẽ proportionem habeat, erit E ipsi F æqualis. Hoc patet ex vigesima diffinitione. Si enim G sit maior, quã E, vel F; erit vterque ipsum E F vel eadẽ pars, vel eadẽ partes ipsius G; si vero G; sit minor, erit G vel eadẽ pars, vel eadẽ partes vtriusque ipsum E F. quare E F inter se æquales sint necesse est.

Est autem E ipsi F æqualis. ut igitur G ad E, ita G ad F. Per conversam vigesimae diffinitionis. nam siue vterque ipsum E F eadẽ pars, vel eadẽ partes sit ipsius G, siue G eadẽ pars sit, vel eadẽ partes vtriusque ipsum E F, erit ut G ad E, ita G ad F.

Vt autem G ad F, ita A ad B. cum enim duo numeri A B ipsum C multiplicantes faciant C F, ut A ad B, ita erit G ad F.

THEOREMA. XVIII. PROPOSITIO XX.

Si tres numeri proportionales fuerint, qui ab extremis fit numerus æqualis erit ei, qui fit à medio. Si autem qui ab extremis fit æqualis fuerit ei, qui à medio; tres numeri proportionales erunt.

Sint tres numeri proportionales ABC; sitq; ut A ad B, ita B ad C. Dico numerum, qui fit ex AC. æqualem esse ei, qui fit ex B. ponatur enim ipsi B æqualis D. est igitur ut A ad B, ita D ad C. ergo qui fit ex AC æqualis est ei, qui ex B. D. qui autem fit ex BD est æqualis ei, qui fit ex B; æqualis enim est B ipsi D. qui igitur fit ex AC ipsi B est æqualis. Sed qui fit ex AC æqualis fit ei, qui ex B. Dico ut A ad B, ita esse B ad C. Quoniam enim qui ex AC fit æqualis est ei, qui fit ex B; qui autem fit ex B est æqualis ei, qui ex BD. erit ut A ad B, ita D ad C. sed B ipse D est æqualis. ut igitur A ad B, ita est B ad C. quod demonstrare oportebat.

Ex antecedente.

Ex antecedente.

THEO-

E V C L I D . E L E M E N T .
THEOREMA XIX. PROPOSITIO. XXI.

Minimi numeri eandem, quam ipsi proportionem habentium, eos, qui eandem habent proportionem, æqualiter metiuntur, maior maiorem, & minor minorem.

Sint enim minimi numeri eandem, quam A B, proportionem habentium CD EF. Dico CD æqualiter metiri ipsum A, atque EF ipsum B. numerus enim CD ipsius A non est partes. Si enim fieri potest, sit CD partes ipsius A. ergo EF ipsius B eadem partes erit, quæ CD ipsius A. quot igitur in CD partes sunt ipsius A, tot erunt & in EF partes ipsius B. Diuidatur CD quidem in ipsius A partes CG GD: EF vero diuidatur in partes ipsius B, EH HF. erit igitur ipsarum CG GD multitudo æqualis multitudini ipsarum EH HF. & quoniam CG GD æquales inter se sunt, sunt autem & EH HF inter se æquales, atque est ipsarum CG GD multitudo multitudini ipsarum EH HF æqualis: erit ut CG ad EH, ita GD ad HF. erit igitur & ut unus antecedentium ad unum consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes. quare ut CG ad EH, ita est CD ad EF; ac propterea CG EH in eadẽ proportionem, in qua CD EF, minores ipsi existentes. quod fieri non potest: ponuntur enim CD EF minimi numeri eandem, quam ipsi proportionem habentium. non igitur CD ipsius A partes est. ergo est pars. et EF ipsius B pars eadem est quæ CD ipsius A. æqualiter igitur CD ipsum A, atque EF ipsum B metitur. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIUS.

* Erit ut CG ad EH, ita GD ad HF. Per conuersam vigesimæ diffinitionis. nam cum CG GD inter se æquales sint, itemq; æquales inter se EH HF, si CG sit minor, quàm EH, quæ pars, uel partes est CG ipsius EH, eadem pars, uel partes erit GD ipsius HF. si vero sit maior, quæ pars, uel partes EH ipsius CG, eadem erit pars, uel partes HF ipsius GD. ergo ut CG ad EH, ita GD ad HF.

THEOREMA XX. PROPOSITIO XXII.

Si sint tres numeri, & alij ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur, et in eadem proportionem; sit autem perturbata eorum analogia: etiam ex equali in eadem proportionem erunt.

Sint tres numeri A B C, et alij ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur, et in eadem proportionem DEF, sitq; perturbata eorum analogia: et ut A quidem ad B, ita sit E ad F; ut autem B ad C, ita D ad E. Dico etiam ex equali ut A ad C, ita esse D ad F. Quoniam enim est ut A ad B, ita E ad F; qui fit ex AF æqualis erit ei, qui ex BE. Rursum quoniam est ut B ad C, ita D ad E; qui fit ex CD æqualis erit ei, qui ex BE. ostensum autem est et qui fit ex AE æqualem esse ei, qui ex BE. ergo et qui fit ex AF æqualis est ei, qui fit ex CD, ut igitur A ad C, ita D ad F. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXIII.

Primi inter se numeri minimi sunt eorum, qui eandem, quam ipsi proportionem habent.

Sunt

Sint primi inter se numeri A B. Dico eos minimos esse eorum, qui eandem, quam ipsi, proportionem habent. si enim non ita sit, erunt aliqui numeri minores ipsis A B, qui eandem, quam A B proportionem habebunt. sint C D. Quoniam igitur minimi numeri eandem, quam ipsi proportionem habentium eos, qui eandem habent proportionem, æqualiter metiuntur, maior maiorem, et minor minorem, hoc est antecedens antecedentem, et consequens consequentem; numerus C ipsum A equaliter metietur, atque D ipsum B. quoties autem C metitur ipsum A, tot unitates sint in E. ergo et D ipsum B metitur per unitates, quæ sunt in E. et quoniam C metitur ipsum A per unitates quæ sunt in E, numerus E ipsum A per unitates, quæ sunt in C, metietur. et eadem ratione E metietur B per unitates, quæ sunt in D. ergo E ipsos A B metitur, primos inter se existentes. quod fieri non potest. non igitur erunt aliqui numeri minores ipsis AB, qui eandem habeant proportionem. ergo AB minimi sunt eorum, qui eandem, quam ipsi proportionem habent. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXIII.

Minimi numeri eorum, qui eandem, quam ipsi proportionem habent, primi inter se sunt.

Sint minimi numeri eorum qui eandem, quam ipsi proportionem habent A B. Dico A B primos inter se esse. si enim non sunt A B inter se primi, eos aliquis numerus metietur. metiatur; sitq; C. et quoties C ipsum quidem A metitur, tot unitates sint in D. quoties vero C metitur ipsum B, tot unitates sint in E. et quoniam C ipsum A metitur per unitates, quæ sunt in D, multiplicans C ipsum D fecit A. eadem ratione et C multiplicans E ipsum B fecit. Itaque cum numerus C duos numeros DE multiplicans faciat A B, erit ut D ad E, ita A ad B. ergo DE in eadem sunt proportionem, in qua AB, minores ipsis existentes, quod fieri non potest. non igitur A B numeros numeros aliquis metietur; ac propterea A B primi inter se sunt. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXV.

Si duo numeri primi inter se fuerint, qui vnum ipforum metitur numerus ad reliquum primus erit.

Sint duo numeri primi inter se A B, et aliquis numerus C ipsum A metiatur. Dico et B C inter se primos esse. Si enim B C non sint inter se primi, metietur eos aliquis numerus. metiatur, sitq; D. et quoniam D ipsum C metitur, et C ipsum A; et D ipsum A metietur. metitur autem et ipsum B. ergo D numeros AB metitur primos inter se existentes. quod fieri non potest. non igitur B C numeros numeros aliquis metietur. ideoq; B C inter se primi sunt. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XXIV. PROPOSITIO XXVI.

Si duo numeri ad aliquem numerum primi fuerint, et qui sit ex ipsis ad eum primus erit.

Bb Duo

Duo enim numeri A. B ad aliquem numerū C primi sint: et A ipsum B multiplicans faciat D. Dico CD inter se primos esse. si enim C. D non sint inter se primi, metietur eos aliquis numerus. metietur; sitq; E. et quoniam C. A primi inter se sunt, et ipsum C. metitur aliquis numerus E; erunt E A inter se primi. quoties autem E ipsum D metitur, tot vnitates sint in F. quare et F metitur ipsum D per vnitates, quæ sunt in E. ergo E ipsum F multiplicans fecit D. sed et A. multiplicans B ipsum D fecit. qui igitur sit ex E. F est æqualis ei, qui ex A. B. si uero qui sit ex extremis æqualis fuerit ei, qui ex medijs, quattuor numeri proportionales erunt. est igitur ut E. ad A. ita B. ad F. sunt autem A. E inter se primi, et qui primi etiam minimi sunt. minimi vero eadē, quam ipsi, proportionem habentium, eos, qui eandem habēt proportionem, æqualiter metiuntur, maior maiorem, et minor minorem, hoc est antecedens antecedentem, et consequens consequentem. ergo E ipsum B metitur. metitur autē et ipsum C. quare E ipsos B. C metitur, primos inter se existentes. quod fieri non potest. non igitur C. D numeros numerus aliquis metietur; ac propterea C. D inter se primi sunt. quod oportebat demonstrare.

Ex antecedente.

2. com. net.
9. com. not.

19. huius.

23. huius.
27. huius.

A . . 2 B . . . 3

C 5

D 6

E

F

THEOREMA XXV. PROPOSITIO. XXVII.

Si duo numeri primi inter se fuerint, qui sit ab vno ipforum ad reliquum primus erit.

Ex antecedente.

Sint duo numeri inter se primi AB; & A se ipsum multiplicans faciat C. Dico B. C inter se primos esse. ponatur enim ipsi A æqualis D & quoniam AB sunt primi inter se, æqualis autem A ipsi D; & DB inter se primi erunt. vterque igitur ipforum A. D ad B primus est. ergo & qui ex AD sit primus erit ad B. sed qui sit ex AD est numerus C. quare C. B inter se primi sunt. quod demonstrare oportebat.

A . . 2 B . . . 3

C 4

D . . 2

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO XXVIII.

Si duo numeri ad duos numeros vterque ad vtrumque primi fuerint, & qui sunt ex ipsis inter se primi erunt.

26. huius.

Duo enim numeri A. B ad duos numeros C. D vterque ad vtrumque primi sint: & A quidem ipsum B multiplicans faciat E: C vero multiplicans D faciat F. Dico EF inter se primos esse. Quoniam enim vterque ipforum A. B ad C primus est, & qui sit ex A. B ad C primus erit. qui autem sit ex A. B est E. ergo E. C primi inter se sunt. Eadē ratione & E. D primi sunt inter se. vterque igitur ipforum C. D ad E primus est: ac propterea qui sit ex C. D primus erit ad E. qui uero ex CD sit est numerus F. ergo EF primi inter se erunt. quod demonstrare oportebat.

5
3 5 7 4 8
A B E C D F

THEOREMA XXVII. PROPOSITIO. XXIX.

Si duo numeri primi inter se fuerint, & vterque seipsum multiplicans faciat aliquos: facti ex ipsis primi erunt inter se. & si numeri à principio positi eos, qui facti sunt, multiplicantes aliquos faciant

faciant, & ipsi inter se primi erunt: & semper circa extremos hoc
continget.

Sint duo numeri inter se primi A B : & A se ipsum multiplicans faciat C, multiplicans vero B faciat E : & B se ipsum multiplicans D faciat, multiplicans autem D faciat ipsum F. Dico C De & E F inter se primos esse . Quoniam enim A B primi inter se sunt : & A se ipsum multiplicans fecit C, erunt C B primi inter se. & quoniam C B inter se primi sunt, & B se ipsum multiplicans fecit D, erit C D inter se primi . Rursus quoniam A B primi sunt inter se, & B se ipsum multiplicans D fecit, A D inter se primi erunt . Cum igitur duo numeri A C ad duos numeros B D uterque ad utrumque primi sint, & qui ex A C fit ad eum, qui fit ex B D primus erit . sed qui fit ex A C est numerus E, qui vero ex B D fit est F. ergo E F primi inter se sunt, quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO. XXX.

Si duo numeri primi inter se fuerint, & uterque simul ad utrūque ipsorum primus erit quod si uterque simul ad vnum aliquem ipsorum sit primus, & numeri a principio positi inter se primi erunt.

[illegible]

F. C. C O M M E N T A R I V S.

Ergo CA ad utrumque ipsorum est primus. Eodem enim modo demonstrabitur & A
 & CB inter se primos esse.
 Ideoq; AB BC inter se primi sunt. Idem etiam sequetur si AC CB inter se primi sint.
 Quod eodem modo demonstrabimus.

THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XXX

Omnis primus numerus ad omnem numerum, quem non metitur, primus est.

Sit primus numerus A , qui numerum B non metiatur. Dico B a A inter se primos

EVCLIDI ELEMENT.

esse, si enim non sunt B. A inter se primi, metietur eos aliquis numerus. metiatur, et sit C. ergo C non est vnitas. et quoniam C ipsum B metitur, A vero non metitur ipsum B; non erit C idem qui A. et quoniam C ipsos B A metitur, et metietur ipsum A primum existentem, cum non sit idem, qui A. quod fieri non potest. non igitur ipsos B A numeros numerus aliquis metietur. quare A B inter se primi sunt. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIIS.

A Ergo C non est vnitas] si enim eos vnitas sola metiretur, primi essent inter se. quod non ponitur.
B Et quoniam C ipsos B A metitur, et metietur ipsum A primum existentem, cum non sit idem, qui A. quod fieri non potest] omnis enim numerus se ipsum metitur.

THEOREMA XXX. PROPOSITIO XXXII.

Si duo numeri se se multiplicantes aliquem faciāt, cum vero, qui ex ipsis fit, metiatur aliquis numerus primus; & vnum ipsorum, qui à principio positi sunt, metietur.

Duo enim numeri A B se innicem multiplicantes faciāt C, ipsum vero C metiatur aliquis numerus primus, qui sit D. Dico D vñi ipsum A B metiri. ipsum enim A non metiatur; atque est D numerus primus: ergo A D primi inter se sunt. et quoties D ipsum C metitur, tot unitates sint in E. Quoniam igitur D metitur ipsum C per eas, quæ sunt in E unitates; numerus D ipsum E multiplicans fecit C. sed et A multiplicans B ipsum C fecit. ergo qui fit ex D E æqualis est ei, qui ex A B. est igitur ut D ad A, ita B ad E. et sunt A D primi inter se, primi vero et minimi. sed minimi eos, qui eandem habent proportionem, æqualiter metiuntur, maior maiorem, et minor minorem, hoc est antecedens antecedentem, et consequens consequentem. ergo D ipsum B metitur. similiter demonstrabimus, si D non metiatur B ipsum A metiri. quare D metitur vnum ipsum A B. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO XXXIII.

Omnem numerum compositum primus aliquis numerus metitur.

Sit compositus numerus A. Dico primum aliquem numerum ipsum A metiri. Quoniam enim compositus numerus est A, metietur ipsum aliquis numerus. metiatur; et sit B. & si quidem primus est B, manifestum est, quod queritur. si vero compositus, ipsum aliquis numerus metietur. metiatur; sitq; C. Et quoniam C metitur ipsum B, B vero ipsum A; & C ipsum A metitur. & si quidem primus est C, manifestum est quod queritur. Si vero compositus eum aliquis numerus metitur. & hac consideratione facta, relinquetur tandem aliquis numerus primus, qui præcedentem & ipsum A metietur. si enim nõ relinquitur primus, metientur ipsum A infiniti numeri, quorum alter altero est minor. quod in numeris fieri non potest. ergo relinquetur aliquis, qui et præcedentem metietur et ipsum A. omnem igitur numerum compositum primus aliquis numerus metitur. quod demonstrare oportebat.

ALTER

ALITER. Sit compositus numerus A. Dico primum aliquem numerum ipsum A metiri. Quoniam enim A compositus est, metietur ipsum aliquis numerus. & sit B minimus eorum, qui ipsum A metiuntur. Dico B primum esse. si enim non sit primus, compositus erit, ergo eum aliquis numerus metietur. metiatur; sitq; C. erit C minor, quam B. & quoniam C ipsum B metitur, sed & B ipsum A; & C ipsum A metietur, minor existens ipso B, qui est minimus omnium, qui metiuntur. quod est absurdum. non igitur B compositus numerus est. ergo est primus. quod demonstrandum fuit.

THEOREMA. XXXII. PROPOSITIO XXXIII.

Omnis numerus vel primus est, vel eum primus aliquis numerus metitur.

Sit numerus A. Dico A vel primum esse, vel primum aliquem numerum ipsum A metiri. si quidem igitur primus est A, manifestum est quod quaritur. si vero compositus ipsum aliquis primus numerus metietur. Omnis igitur numerus vel primus est, vel eum primus aliquis numerus metitur. quod demonstrare oportebat.

A...3

A.....6

...3

Ex antecedente.

PROBLEMA III. PROPOSITIO. XXXV.

Numeris quocumque datis inuenire minimos eorum, qui eandem, quam ipsi, proportionem habeant.

Sint dati quocumque numeri A B C. oportet inuenire minimos eorum, qui eandem, quam ipsi A B C, proportionem habeant. vel igitur A B C primi inter se sunt, vel non. si quidem primi, et minimi erunt eandem, quam ipsi proportionem habentium. si vero non primi, sumatur ipsorum A B C maxima communis mensura D, et quoties D vnumquemque ipsorum A B C metitur, tot vnitates sint in vnoquoque horum E F G. et vnusquisque igitur ipsorum E F G vnumquemque ipsorum A B C metitur per eas, quæ sunt in D vnitates. ergo E F G ipsos A B C equaliter metiuntur, ac propterea E F G in eadem sunt proportionem, in qua ipsi A B C. Dico eos etiã minimos esse. si enim E F G non sint minimi, eandem, quam ipsi A B C, proportionem habentium, erunt aliqui ipsis E F G minores in eadem proportionem, in qua A B C. sint H K L, æqualiter igitur H metitur ipsum A, ac vterque ipsorum K L vtrumque BC metitur. quoties autem H metitur ipsum A, tot vnitates sint in M. et vterque igitur K L vtrumque BC metitur per eas, quæ sunt in M vnitates. et quoniam H ipsum A metitur per vnitates, quæ sunt in M, et M ipsum A per vnitates, quæ sunt in H metietur. Eadem ratione et M vtrumque ipsorum BC metietur per vnitates, quæ sunt in utroque K L. ergo M ipsos A B C metitur. Rursus quoniam H ipsum A metitur per vnitates, quæ sunt in M, H ipsum M multiplicans fecit A. Eadem ratione et E multiplicans D ipsum A fecit. ergo qui ex E D fit ei, qui fit ex HM est æqualis. vt igitur E ad H, ita M ad D maior autem est E, quam H. ergo et M quam D est maior, et ipsos ABC metitur. quod fieri nō potest. ponitur enim D ipsorum A B C maxima communis mensura. non igitur erunt aliqui numeri minores ipsis E F G, in eadem proportionem, in qua A B C. ergo E F G minimi sunt eorum, qui eandem, quam ipsi A B C proportionem habent. quod oportebat demonstrare.

A.....6

B.....8

C.....10

D.....2

E...3

F.....4

G.....5

H.....

K.....

L.....

M.....

23. huius.
2. huius.

18. huius.

21. huius.

8. com. not.

9. com. not.

19. huius.

F. C.

Quoniam sepe vsu venit, vt duo minimi numeri in data proportione inueniendi sint, libuit hoc loco sequens problema adnectere.

Numeris quotcūque datis deinceps proportionalibus, inuenire duos minimos, qui eandem, quam ipsi, proportionem habeant.

Sint dati quotcūque numeri deinceps proportionales ABC . oportet inuenire duos minimos numeros, qui eandem, quam ipsi ABC proportionem habeant. Itaque vel A B primi sint inter se, vel non primi: et si quidem primi, & minimi erunt eorum, qui eandem proportionem habent: sin minus, sumatur ipsorum AB maxima communis mensura D : & quoties D metitur A , tot unitates sint in E ; quoties vero idem metitur B , tot unitates sint in F . ergo & E F ipsos A B aequaliter metiuntur: ideoq; E F in eadem sunt proportione, in qua ipsi A B . Dico E F etiam minimos esse. si enim non sint minimi, erunt aliqui numeri minores ipsis E F , qui eandem, quam A B proportionem habeant: sint GH . ergo G aequaliter metitur A , atque H ipsum B . & quoties G metitur A , tot unitates sint in K . quare & H metitur B per eas, quae sint in K unitates. & ob id K metitur A per unitates, quae sint in G , metieturq; B per unitates, quae sint in H . ergo K ipsos A B metitur. & quoniam G ipsum A metitur per eas, quae sint in K unitates, G multiplicans K fecit A . Rursus quoniam E metitur A per unitates, quae sint in D ; & E multiplicans D fecit A . qui igitur fit ex E D est aequalis ei, qui ex GK fit ac propterea vt E ad G , ita erit K ad D . est autem E maior, quam C . ergo & K maior quam D , & ipsos A B metitur. quod fieri non potest. erat enim D ipsorum AB maxima communis mensura. non igitur sunt aliqui numeri minores ipsis E F , qui eandem, quam ipsi A B proportionem habeant. & quoniam vt A ad B , ita est B ad C , erunt E F minimi numeri in eadem proportione, in qua AB C . Inuenti igitur sunt minimi numeri E F , qui eandem, quam ipsi ABC proportionem habeant. quod facere oportebat.

PROBLEMA IIII. PROPOSITIO XXXVI.

Duobus numeris datis, inuenire quem minimum numerum metiantur.

Sint dati duo numeri A B . oportet inuenire quem minimum numerum metiantur. numeri enim A B uel primi inter se sunt, vel non. sint primum A B inter se primi: & A ipsum B multiplicans faciat C . ergo & B multiplicans A ipsum C fecit. ac propterea numeri A B ipsum C metiuntur. Dico etiam C minimum esse. si enim non ita sit, metientur A B numerum aliquem minorem, quam C . metiantur ipsum D . & quoties A ipsum D metitur, tot unitates sint in E ; quoties autem B metitur D , tot unitates sint in F . ergo A quidem ipsum E multiplicans fecit D ; B vero multiplicans F ipsum D fecit. quare numerus, qui ex AE fit est equalis ei, qui fit ex BF . vt igitur A ad B , ita est E ad F . & sunt A B primi. primi autem & minimi. sed minimi eos, qui eandem habent proportionem aequaliter metiuntur, maior maiorem, & minor minorem. ergo B ipsum E metitur, & consequens consequentem. & quoniam A numeros B E multiplicans fecit CD , erit vt B ad E , ita C ad D . metitur autem B ipsum E . ergo & C ipsum D metitur, maior minorem. quod fieri non potest. non igitur A B metiuntur aliquem numerum minorem ipso C , quando A B primi inter se fuerint. ergo A B ipsum C minimum existentem metiuntur. Sed non sint A B primi inter se: & sumatur minimi numeri eandem, quam A B proportionem habentium, qui sint F E . aequalis igitur est, qui ex AE fit ei, qui ex BF . & A ipsum E multiplicans faciat C . ergo & B multi-

multiplicans F ipsum C fecit. quare A B ipsum C metiuntur.

Dico & minimum esse. nisi enim ita sit, metientur A B aliquem numerum minorem, quam C. metiantur ipsum D. & quoties A ipsum D metitur, tot vnitates sint in G. quoties autem B metitur D, tot vnitates sint in H. ergo A quidem ipsum G multiplicans fecit D; B vero multiplicans H ipsū D fecit. qui igitur ex A G fit est equalis ei, qui fit ex B H. vt igitur A ad B, ita H ad G. sed vt A ad B, ita F ad E. ergo & vt F ad E, ita H ad G: & sunt F E minimi; minimi vero eos, qui eandem habent proportionem æqualiter metiuntur, maior

F...2A....4

E...3B.....6

C.....12

D.....

G.....

H.....

9. com. not.

19. huius.

21. huius.

18. huius.

maiorē, & minor minorem. quare E ipsum G metitur. & quoniam A numeros E G multiplicans ipsos C D fecit, vt E ad G, ita erit C ad D. Sed E metitur ipsum G. ergo & C ipsum D metitur, maior minorem. quod fieri nō potest. non igitur metiuntur A B aliquem numerum minorem, quā C. ergo A B ipsum C minimum existentem metiuntur. quod demonstrare oportebat.

SCHOLIUM.

Minimum dicit, quo minorem duo numeri metiri non possunt. vt est 15. eo enim minorem duo numeri 3, & 5 non metiuntur.

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XXXVII.

Si duo numeri metiantur numerum aliquem, & minimus, quem illi metiuntur, eundem metietur.

Duo enim numeri A B numerum aliquem C D metiantur, minimum autem ipsum E. Dico & E ipsum C D metiri. si enim E non metitur C D E, metiens F D relinquat se ipso minorem CF. & quoniam A B ipsum E metiuntur, E vero ipsum DF: & A B metiuntur D F. sed & metiuntur totum CD. ergo & reliquum C F minorem ipso E metiuntur. quod fieri non potest. non igitur E ipsum CD non metitur. quare ipsum metiatur necesse est. quod demonstrare oportebat.

A...2

B...3

E.....6

C.....F.....D

12. com. not.

13. com. not.

PROBLEMA V. PROPOSITIO XXXVIII.

Tribus numeris datis inuenire quem minimum numerum metiuntur.

Sint dati numeri A B C. oportet inuenire quem minimum metiantur numerum. sumatur enim D, quem minimum duo A B metiuntur. itaque C vel metitur D, vel non metitur. metiatur primum. sed & A B metiuntur ipsum D. ergo A B C ipsum D metiuntur. Dico & minimum. si enim non, metiuntur A B C quendam numerum minorem ipso D, metiantur E. Quoniam igitur A B C metiuntur ipsum E, & A B ipsum E metiuntur. ergo & minimus, quem metiuntur A B ipsum E metietur. minimus autem, quem metiuntur A B, est D. quare D metitur ipsum E, maior minorem. quod fieri non potest. non igitur A B C metiuntur aliquem numerum ipso D minorem. ergo A B C minimum D metiuntur. non metiatur autem C ipsum D: & sumatur mi-

Ex antecedente.

36. huius.

nimus

11. co. not.

Ex antecedente,

minus numerus E, quē C D metiuntur. Itaque qm̄ A B metiuntur ipsum D, D verō ipsum E; & A B ipsū E metiuntur. metitur aut̄ & C ipsum E. ergo A B C ipsum E metiuntur. Dico & minimum. si enim non, metiuntur A B C numerum minorem ipso E. metiuntur F. & quoniam A B C metiuntur F, & A B ipsum F metiuntur. ergo & minimus, quem A B metiuntur, metietur ipsum F: minimus autem, quem A B metiuntur, est D. quare D ipsum F metitur, & metitur C ipsum F. ergo D C ipsum F metiuntur; ac propterea minimus, quem metiuntur D C, metietur & F. sed minimus, quem metiuntur D C, est E. ergo E ipsum F metitur, maior minore. quod fieri non potest. non igitur A B C metiuntur aliquē numerum minorem ipso E. ergo numerum E minimum existentem ipsi A B C metiuntur. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO. XXXIX.

Si numerum numerus aliquis metiatur, mensus partem habebit à metiente denominatam.

15. huius,

3. com. not.

Numerum enim A numeri s aliquis B metiatur. Dico A partem habere ab ipso B denominatam. quoties enim B ipsum A metitur, tot unitates sint in C. Quoniam igitur B metitur ipsum A per eas, quę sunt in C, unitates; metitur autem & D unitas ipsorum C per unitates, quę in ipso sunt: & D unitas ipsum C numerum æqualiter metietur, atque B ipsum A. quare permutando unitas D ipsum B numerum æqualiter metietur, atque C ipsum A. quę igitur pars est unitas D ipsius B numeri, eadem est pars & C ipsius A. sed unitas D ipsius B numeri pars est ab eo denominata. ergo & C ipsius A pars est denominata ab ipso B. quare A partem habet C ab ipso B denominatam, quod ostendere oportebat.

THEOREMA XXXV. PROPOSITIO. XL.

Si numerus partem quamcumque habeat, eum numerus à parte denominatus metietur.

5. com. not.

15. huius,

Numerus enim A partem habeat quamcumque B; & ab ipso B denominatus sit numerus C. Dico C ipsum A metiri. Quoniam enim B ipsius A pars est denominata ab ipso C. est autem & D unitas ipsius C numeri pars ab eo denominata. quę igitur pars est unitas D ipsius C numeri, eadem pars est & B ipsius A. ergo unitas D æqualiter metitur ipsum B numerum, atque B ipsum A. & permutando unitas D ipsum B numerum æqualiter metitur, atque C ipsum A. ergo C ipsum A metitur. quod oportebat demonstrare.

PROBLEMA. VI. PROPOSITIO XLI.

Numerum inuenire, qui minimus existens datas partes habeat.

Sint

Sint datæ partes A B C. oportet numerum inuenire, qui cum minimus sit, habeat partes A B C. sint ab ipsis A B C partibus denominati numeri D E F. & sumatur minimus numerus G, quem ipsi D E F metiuntur. Quoniam igitur D E F metiuntur ipsum G, habebit G partes ab ipsis D E F denominatas: partes autem denominatas ab ipsis D E F sunt A B C. ergo G partes A B C habet. Dico & minimum esse, si enim G non existens minimus partes habet A B C, erit numerus aliquis minor ipso G, qui easdem partes habeat. sit H. Quoniam igitur H partes habet A B C, cum metientur numeri ab ipsis A B C partibus denominati, sunt autem hi numeri D E F. ergo D E F ipsum H metietur; atque est H minor ipso G. quod fieri non potest. non igitur erit aliquis numerus minor ipso H, qui partes A B C habeat. quod oportuit demonstrare.

$$A \frac{1}{2} D...2$$

$$B \frac{1}{3} E...3$$

$$C \frac{1}{4} F...4$$

$$M G...2$$

H —

38. huius.

39. huius.

SEPTIMI LIBRI FINIS.

E V C L I D I S E L E M E N T O R V M LIBER OCTAVVS

C V M C O M M E N T A R I I S,

Federici Commandini Vrbinatis.

THEOREMA I. PROPOSITIO. I.

I sint quotcumque numeri deinceps proportionales, quorum extremi sint inter se primi; minimi erunt omnium qui eandem, quam ipsi proportionem habent.

Sint quotcumque numeri deinceps proportionales $A B C D$, quorū extremi $A D$ primi inter se sint. Dico $A B C D$ minimos esse omnium, qui eandem, quam ipsi proportionem habent. si enim non, sint minores ipsis $A B C D$ numeri $E F G H$, & in eadem proportione. Et quoniam $A B C D$ sunt in

eadem proportione, in qua $E F G H$; atque est ipsorū $A B C D$ multitudo æqualis multitudini ipsorum $E F G H$: erit ex æquali ut A ad D , ita E ad H : et sunt $A D$ primi; primi autem, & minimi numeri æqualiter metiuntur eos, qui eandem proportionem habent, antecedens antecedentem, & consequens consequentem. ergo A ipsum E metitur, maior minorem. quod fieri non potest. non igitur $E F G H$ minores ipsis $A B C D$ existentes in eadē sunt, in qua ipsi, proportione; ac propterea $A B C D$ minimi sunt omnium, qui eandē, quam ipsi proportionem habent. quod demonstrare oportebat.

A 8
 B 12
 C 18
 D 27
 E
 F
 G
 H

14. septimi.

21. septimi.

PROBLEMA I. PROPOSITIO. II.

Numeros inuenire deinceps proportionales minimos, quotcumque quis imperauerit in data proportione.

Sit data proportio in minimis numeris, quam habet A ad B . oportet numeros inuenire deinceps proportionales minimos quotcumque quis imperauerit in proportione A ad B . imperentur quattuor: et A se ipsum multiplicans faciat C , multiplicans vero B faciat D , et B se ipsum multiplicans faciat E ; & adhuc A multiplicans $C D E$ ipsos $F G H$ faciat, B vero multiplicans E faciat K . Quoniam igitur A se ipsum multiplicans fecit C , multiplicans vero B ipsum D fecit; numerus A duos numeros $A B$ multiplicans fecit $C D$. est igitur ut A ad B , ita C ad D . rursus quoniam

17. septimi.

nam

niam A ipsum B multiplicans fecit D, & B seipsū multiplicans fecit E; vterque ipsorum A B multiplicans B vtrumque ipsorum D E fecit. vt igitur A ad B, ita D ad E. sed vt A ad B, ita C ad D. ergo & vt C ad D, ita D ad E. Et quoniam A numeros CD multiplicans ipso F G fecit, ut C ad D, ita erit F ad G. vt autem C ad D, ita erat A ad B. & ut igitur A ad B, ita F ad G. rursus quoniam A numeros DE multiplicans fecit GH, erit vt D ad E, ita G ad H. sed vt D ad E, ita A ad B. ergo & vt A ad B, ita G ad H. quod cum A B ipsum E multiplicantes faciant HK; erit vt A ad B, ita H ad K. ostensum autem est & ut A ad B, ita esse & F ad G, et G ad H. ergo & ut F ad G, ita G ad H, & H ad K. numeri igitur C D E, & F G H K proportionales sunt in proportione, quā habet A ad B. Dico ēt minimos esse. Quoniam enim A B minimi sunt eorum, qui eandem, quam ipsi, proportionem habent; minimi vero, & primi sunt inter se: erunt ipsi A B inter se primi. et vterque qui dem ipsorum A B seipsū multiplicans vtrumque C E fecit; vterque vero C E multiplicans fecit vtrumque F K. ergo C E, & F K primi inter se sunt. si autem sint quotcumque numeri deinceps proportionales, & eorum extremi sint inter se primi; minimi erunt omnium eandem, quam ipsi proportionem habentium. ergo C D E, & F G H K minimi sunt omnium, qui eandem quam A B proportionē habēt, quod oportebat demonstrare.

A...2

B...3

C...4

D...6

E...9

F...9

G...12

H...13

K...27

28. septimi.

28. septimi.

29. septimi.

29. septimi.

Ex antecedente.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum est si tres numeri deinceps proportionales minimi fuerint, eandem, quam ipsi proportionem habentium; extremos eorū quadratos esse: si vero quattuor esse cubos.

THEOREMA II.

PROPOSITIO. III.

Si sint quotcūque numeri deinceps proportionales, minimi omnium, qui eandem, quam ipsi, proportionem habent; eorum extremi primi inter se erunt.

Sint quotcumque numeri deinceps proportionales A B C D minimi omnium qui eandem, quā ipsi, proportionem habent. Dico eorum extremos A D inter se primos esse. sumatur enim duo numeri minimi in proportione ipsorum ABCD, qui sint EF, tres vero GHK, & semper deinceps vno plures, quo ad assumpta multitudo æqualis fuerit multitudini ipsorum ABCD. sumantur, & sint LMMX. extremi igitur ipsorum LX primi in-

A...9

B...12

C...18

D...27

E...2

F...3

G...4

H...6

K...9

L...2

M...12

N...18

O...27

Ex antecedente.

29. septimi.

Ecce 2 ter se

EVCLID. ELEMENT.

ter se sunt. Quoniam enim EF primi sunt, & vterque ipsorum se ipsum multiplicans vtrumque GK fecit; vtrumque vero GK multiplicans fecit vtrumque LX: erunt & GK, & LX primi. & quoniam ABCD minimi sunt eorum, qui eandem, quam ipsi, proportionem habent; sunt autem & LMNX minimi in eadē proportionē, in qua A BCD; estq; ipsorum ABCD multitudo æqualis multitudini ipsorum LMNX: erit vnusquisque ipsorum ABCD vnicuique ipsorum LMNX æqualis. Ergo A quidem est æqualis L, B vero ipsi M, C ipsi N, & D ipsi X. quòd cum LX primi sint inter se, & L ipsi A æqualis, & X ipsi D; & AD inter se primi erūt. quòd oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIUS.

Sumatur enim duo minimi numeri in proportionē ipsorum ABCD *Ex eo, quod ad 3 huius addidimus.*

PROBLEMA II. PROPOSITIO. IIII.

Proportionibus datis quotcumque in minimis numeris, numeros inuenire deinceps minimos in datis proportionibus.

Sint datæ proporcionēs in minimis numeris, videlicet proportio A ad B, & proportio C ad D, & E ad F. oportet numeros inuenire deinceps minimos in proportionē A ad B, & in proportionē C ad D; & adhuc in proportionē E ad F. Sumatur enim minimus numerus, quem BC metiuntur; sitq; G. & quoties B metitur G, toties A ipsum H metiatur; quoties vero C ipsum G metitur, toties & D metiatur K. itaque E ipsum K vel metitur, vel non metitur. metiatur primum. & quoties E metitur K, toties F ipsum L metiatur. & quoniam A æqualiter metitur H, atque B ipsum G; erit vt A ad B, ita H ad G. Eadem ratione & vt C ad D, ita G ad K; & adhuc vt E ad F, ita K ad L. ergo HGKL deinceps proportionales sunt in proportionē A ad B, & in proportionē C ad D, & adhuc in proportionē E ad F. Dico etiam minimos esse. Si enim non sint HGKL deinceps minimi in proportionibus. sint N X M O. & quoniam est vt A ad B, ita N ad X; & sunt A B minimi; minimi autem eos, qui eandem habent proportionem, æqualiter metiuntur, maior maiorem, & minor minorem, hoc est antecedens antecedentem, & consequens consequentem: metietur B ipsum X. Eadem ratione & C ipsum X metietur. quare B C metiuntur X, ac propterea minimus, quem metiuntur B C, ipsum X metietur. minimus autem, quem metiuntur B C, est G. ergo G metietur X, maior minorem. quod fieri non potest. non igitur erunt aliqui numeri minores ipsis HGKL deinceps minimi in proportionē A ad B, C ad D, & E ad F. Sed non metiatur E ipsum K; & sumatur minimus numerus, quem ipsi E K metiuntur; sitq; M. quoties autem K metitur M, toties & vterque ipsorum HG vtrumque NX metiatur: & quoties E metitur M, toties & F metiatur O. Quoniam igitur H ipsū N æqualiter metitur, atque G ipsum X; erit vt H ad G, ita N ad X. vt autem H ad G, ita A ad B. & vt igitur A ad B, ita N ad X. Eadem ratione & vt C ad D, ita X ad M. rursus quoniam E ipsum M æqualiter metitur, atque F ipsum O; erit vt E ad F, ita M ad O. quare NXMO deinceps proportionales sunt in proportionibus A ad B, C ad D, & E ad F. Dico minimos quoque esse. Si enim non sint NXMO deinceps minimi

A...3B...4
C...2D...3
E...4F...5
H.....6
G.....8
K.....12
L.....15
N
X
M
O

36. septimi.

17. septimi.

21. septimi.

A
37. septimi.

36. septimi.

7. septimi.

in

in proportionibus A ab B, C ad D, & E ad F, erūt aliqui numeri minores ipsis NX MO deinceps minimi in eisdem proportionibus. sint PRST. & cum sit vt P ad R, ita A ad B; sintq; AB minimi; minimi vero eos, qui eadē habēt proportionē, & equaliter metiuntur, antecedēs antecedētē, & cōsequēs cōsequētē: numerus B ipsū R metietur

21. septimi.

Eadem ratione & C metietur ipsū R. ergo B C ipsum R metiuntur: & ob id minimus, quem metiuntur B C, ipsum R metietur. minimus autē, quē metiuntur B C, est G. ergo G metietur ipsum R. atque est vt G ad R, ita K ad S. quare & K ipsum S metietur: metitur autem & E ipsum S; ideoq; EK ipsum S metiuntur. & minimus igitur, quem metiuntur E K, metietur ipsum S. Sed minimus, quem metiuntur E K, est M. ergo M ipsum S metietur, maior minorem. quod fieri non potest. non igitur erunt aliqui numeri minores ipsis NX MO deinceps minimi in proportionibus A ad B, C ad D, & E ad F. ergo NX MO deinceps minimi sunt in eisdem proportionibus. quod demonstrare oportebat.

A...4B.....5

C...2D...3

E...4F...3

H.....8

G.....10

K.....15

N.....30

X.....40

M.....60

O.....45

P.....

R.....

S.....

T.....

B

§7. septimi.

C

F. C. COMMENTARIUS.

Eadem ratione & C ipsum X metietur.] Quoniam enim est vt C ad D, ita X ad M; & A sunt C D minimi; minimi vero eos, qui eandem habent proportionem, & equaliter metiuntur: numerus C ipsum X metietur.

Eadem ratione & C metietur ipsum R] est enim vt C ad D, ita R ad S: suntq; C D minimi. ergo ob iam dictam causam C ipsum R metietur.

Atque ut G ad R, ita K ad S] est enim vt G ad K, ita R ad S. quare permutando vt G ad C, ita K ad S.

THEOREMA III. PROPOSITIO V.

Plani numeri inter se proportionē habēt ex lateribus cōpositā.

Sint plani numeri A B, et ipsius quidem A latera sint CD numeri; ipsius vero B latera sint E F. Dico A ad B proportionē habere ex lateribus cōpositā. proportionibus enim datis, videlicet quā hēt C ad E, & quā D ad F, sumatur numeri deinceps minimi GHK in proportionibus C ad E, & D ad F, sitq; vt C ad E ita G ad H: vt autē D ad F, ita H ad K. ergo GHK inter se proportionē habēt laterū. Sed proportio G ad K composita est ex proportionē G ad H, et proportionē H ad K. quare G ad K proportionē habet ex lateribus compositam. Dico igitur vt A ad B, ita esse G ad K; numerus enim D ipsum E multiplicans faciat L. & quoniam D multiplicans C ipsum A fecit; multiplicans vero E fecit L: erit vt C ad

A.....6

L.....12

D.....20

C...2

D...3

E...4

F.....5

G.....24

H.....48

K.....80

Ex antecedente.

E, ita

E V C L I D. E L E M E N T I.

E, ita A ad L. ut autem C ad E, ita G ad H. ergo & vt G ad H, ita A ad L. rursus quoniam E ipsum quidem D multiplicans fecit L, multiplicans vero F ipsum B fecit; vt D ad F, ita erit L ad B. sed vt D ad F, ita est H ad K. & ut igitur H ad K, ita L ad B. Ostensum autem est & vt G ad H, ita A ad L. quare ex equali ut G ad K, ita A ad B. Sed G ad K proportionem habet compositam, ex lateribus. ergo & A ad B proportionem habebit ex lateribus compositam. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA IIII. PROPOSITIO VI.

Si fuerint quotcumque numeri deinceps proportionales, primus autem secundum non metiatur; neque alius aliquis ullum metietur.

Sint quotcumque numeri deinceps proportionales A B C D E, & A ipsum B non metiatur. Dico neque alium aliquem ullum metiri. At vero numeros A B C D E deinceps sese nō metiri, perspicuum est; neque enim A ipsum B metitur. Dico neque alium aliquem vllum metiri. Dico enim A non metiri ipsum C. nam quot sunt A B C, tot sumantur minimi numeri eandem, quam ipsi A B C proportionem habentes. & sint F G H. Quoniam igitur F G H in eadem sunt proportionem, in qua A B C, atque est ipsum A B C multitudo æqualis multitudini ipsum F G H; erit ex equali vt A ad C, ita F ad H. & quoniam est vt A ad B, ita F ad G, non metitur autem A ipsum B; neque F ipsum G metietur. non igitur F vnitas est; vnitas enim omnem numerum metitur. & sunt F H primi inter se. ergo neque F metitur ipsum H. atque est vt F ad H, ita A ad C. neque igitur A ipsum C metietur. similiter demonstrabimus neque alium aliquem vllum metiri. quod demonstrare oportebat.

g. huius:

THEOREMA V. PROPOSITIO VII.

Si fuerint quotcumque numeri deinceps proportionales, primus autem metiatur extremum; & secundum metietur.

Sint quotcumque numeri deinceps proportionales A B C D; & A ipsum D metiatur. Dico A ipsum quoque B metiri. si enim A non metitur ipsum B, neque alius aliquis vllum metietur. quod est absurdū. ponitur enim A ipsum D metiri. metietur autem A ipsum D. ergo & A ipsum B metietur. quod demonstrasse oportuit.

THEOREMA VI. PROPOSITIO VIII.

Si inter duos numeros numeri deinceps proportionales ceciderint, quot inter eos cadunt numeri deinceps proportionales, totidem & inter alios eandem, quam ipsi, proportionem habentes, cadent.

Inter

Inter duos enim numeros A B cadant numeri C D deinceps proportionales; & fiat vt A ad B, ita E ad F. Dico quot numeri deinceps proportionales cadant inter A B, totidem & inter E F deinceps proportionales cadere. quot enim numeri sunt AC DB, totidem fumantur minimi numeri eandem, quam ipsi ACDB proportionem habentium GH KL. ergo extremi ipsorum G L primi inter se sunt. & quoniam ACDB ad ipsos GHKL in eadem sunt proportione; atque est ipsorum ACDB multitudo æqualis multitudini ipsorum GHKL; erit ex æquali vt A ad B, ita G ad L. vt autem A ad B, ita E ad F. & vt igitur G ad L, ita E ad F; & sunt G L primi. sed primi, & minimi; minimi vero eos, qui eandem proportionem habent, equaliter metiuntur, maior maiorem, & minor minorem. ergo G equaliter metitur ipsum E, atque ipsum F. quoties autem G metitur ipsum E, toties & vterque ipsum H K vtrūque M N metiatur. numeri igitur GHKL ipsos EMNF æqualiter metiuntur. ideoq; GHKL in eadem sunt proportione, in qua ipsi EMNF. at GHKL similiter in eadem sunt proportione, in qua ACDB. ergo ACDB in eadem proportione erunt, in qua EMNF. Sed ACDB sunt deinceps proportionales. ergo & EMNF deinceps proportionales erunt. quot igitur deinceps proportionales cadunt inter A B, totidẽ deinceps proportionales & inter E F cadent. quod demonstrare oportebat.

A . . . 2	
C 4	
D 8	
B 16	35. septimi.
G . . . 1	
H . . . 2	3. huius.
K . . . 4	
L 8	14. septimi.
E . . . 5	
M 6	23. septimi.
N 12	21. septimi.
F 24	

THEOREMA VII. PROPOSITIO IX.

Si duo numeri inter se primi fuerint, & inter ipsos numeri deinceps proportionales ceciderint, quot inter ipsos cadunt numeri deinceps proportionales, totidem & inter vtrumque ipsum, & vnitatem deinceps proportionales cadent.

Sint duo numeri inter se primi A B: & inter ipsos deinceps proportionales cadant C D; exponaturq; vnitates E. Dico quot numeri deinceps proportionales cadunt inter ipsos A B, totidem & inter vtrumque ipsum A B, & vnitatem E numeros deinceps proportionales cadere. fumantur enim duo quidem numeri minimi F G in eadem proportione, in qua sunt A C D B; tres vero HKL, & semper deinceps vno plures, quo ad fiat ipsum multitudinem æqualis multitudini ipsorum A C D B. fumantur, & sint MNXO. itaque manifestum est F se ipsum quidem multiplican-tem fecisse H, multiplican-tem vero H fecisse M: & G se ipsum quidẽ multiplican-tem fecisse L; multiplican-tem vero L fecisse O. & quoniam MNXO minimi sunt qui eadem, quam ipsi FG proportionem habent; sunt autem & A C D B minimi eandem, quam F G proportionem habentium; atque est ipsum MNXO multitudo æqualis multitudini ipsorum A C D B: erit vnusquisque ipsum MNXO vnusquisque ipsum A C D B æqualis. æqualis igitur est M ipsi A, & O ipsi B. & quoniam F se ipsum multiplicans fecit H, metitur F ipsum H per vnitates, quę sunt in F.

A 8	
M 8	
H 4	A
C 12	F . . 2
N 12	2. huius.
K 6	
D 18	G . . 3
X 18	
L 9	
O 27	
B 27	

10. com. not.
metitur

6. com. not. metitur autem & E vnitas numerum F per vnitates, quæ in ipso sunt. ergo E vnitas numerum F æqualiter metitur, atque F ipsum H.

Conuers. 20. est igitur vt E vnitas ad numerum F, ita F ad H. rursus quoniam F multiplicans H fecit M, metitur H ipsum M per vnitates, quæ sunt in F; metitur autem & E vnitas numerum F per vnitates, quæ in ipso sunt. æqualiter igitur E vnitas numerum F metitur, atque H ipsum M. ergo vt E vnitas ad numerum F, ita H ad M. ostensum est autem & ut E vnitas ad numerum F, ita esse F ad H, & ut igitur E vnitas ad numerum F, ita F ad H, & H ad M. sed M est equalis ipsi A. quare vt E vnitas ad numerum F, ita F ad H, & H ad M. Ea dem ratione & ut E vnitas ad numerum F, ita G ad L, & L ad B. quot igitur numeri deinceps proportionales cadunt inter A B, totidem & inter utrumque ipsum A B, & vnitatem E numeri deinceps proportionales cadent, quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIUS.

- A. Summantur enim duo minimi numeri F G in eadem proportionem, in qua sunt A C D B] ex problemate, quod nos ad 35 septimi conscripsimus.
- B. Eadem ratione, & vt E vnitas ad numerum G, ita G ad L, et L ad B] quoniam enim G se ipsum multiplicans fecit L, metitur G ipsum L per vnitates, quæ sunt in ipso G: metitur autem & E vnitas ipsum G per vnitates, quæ in ipso sunt. ergo E vnitas æqualiter metitur numerum G, atque G ipsum L. quare vt E vnitas ad numerum G, ita G ad L. rursus quoniam G multiplicans L fecit O, numerus L ipsum O metitur per vnitates, quæ sunt in G. sed E vnitas metitur ipsum G per vnitates, quæ in ipso sunt. æqualiter igitur E vnitas metitur G, atque L ipsum O. ergo vt E vnitas ad G, ita est L ad O. vt autem E vnitas ad G, ita erat G ad L. vt igitur E vnitas ad G, ita G ad L, & L ad O, hoc est ad B, qui ipsi O est equalis. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO. X.

Si inter duos numeros, & vnitatem deinceps proportionales numeri ceciderint, quot inter vtrumque ipsum, & vnitatem cadunt numeri deinceps proportionales; totidem & inter ipsos numeri deinceps proportionales cadunt.

Inter duos enim numeros A B, & vnitatem C numeri deinceps proportionales cadunt D E, & F G. Dico quot inter vtrumque ipsum A B, & vnitatem C cadunt numeri deinceps proportionales, totidem & inter ipsos A B numeros deinceps proportionales cadere. numerus enim D ipsum F multiplicans faciat H: vterque autem ipsum D F ipsum H multiplicans faciat vtrumque K L, & quoniam est ut C vnitas ad numerum D, ita D ad E, vnitas C ipsum D nume-

20. diffi.

rum

numi equaliter metietur, atque D ipsum E. Sed unitas C numerum D metitur per unitates, quæ sunt in D. ergo & numerus D ipsum E per unitates, quæ sunt in D metitur: ac propterea numerus D seipsum multiplicans fecit E. rursus quoniam vt unitas C ad D numerum, ita est E ad A, unitas C ipsum D numerum equaliter metitur, atque E ipsum A. sed unitas C ipsum D numerum metitur per unitates, quæ sunt in D. quare et E ipsum A per unitates, quæ sunt in D metietur: ideoq; D ipsum E multiplicans fecit A. Eadem ratione & F se ipsum multiplicans fecit G, multiplicans vero G ipsum B fecit. et quoniam D se ipsum multiplicans fecit E, multiplicans vero F fecit H; erit vt D ad F, ita E ad H. & ob eandem causam ut D ad F, ita H ad G. vt igitur E ad H, ita H ad G. rursus quoniam D vtrumque ipsorum E & H multiplicans fecit vtrumque A & K, erit ut E ad H, ita A ad K. sed vt E ad H, ita D ad F. & ut igitur D ad F, ita A ad K. Rursus quoniam vterque D F ipsum H multiplicans vtrumque KL fecit, vt D ad F, ita est K ad L. vt autem D ad F, ita erat A ad K. & ut igitur A ad K, ita K ad L. præterea cum F vtrumque H & G multiplicans vtrumque L B faciat, erit vt H ad G, ita L ad B. sed vt H ad G, ita D ad F. ergo & vt D ad F, ita L ad B. ostensum autem est & vt D ad F, ita A ad K, & K ad L, & L ad B. quare A K L B numeri deinceps proportionales sunt. quot igitur inter vtrumque ipsorum A B, & unitatem C cadunt numeri deinceps proportionales, totidem & inter A B numeri deinceps proportionales cadent. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA IX. PROPOSITIO. XI.

Inter duos numeros quadratos vnus medius proportionalis cadit: et quadratus ad quadratum duplam proportionem habet eius, quam latus habet latus.

Sint quadrati numeri A B; et ipsius quidem A latus sit C, ipsius vero B latus D. Dico inter ipsos A B vnum medium proportionalem cadere, et A ad B duplam proportionem habere eius, quam habet C ad D. numerus enim C multiplicans D faciat E. et quoniam A numerus quadratus est, cuius latus C; numerus C seipsum multiplicans fecit A. eadem ratione et D se ipsum multiplicans fecit B. Quoniam igitur C vtrumque ipsorum C D multiplicans vtrumque A E fecit, vt C ad D, ita erit A ad E. Rursus quoniam C multiplicans D ipsum E fecit, et D se ipsum multiplicans fecit B; duo numeri C D vnum, & eundem numerum D multiplicantes ipsos E B fecerunt. est igitur vt C ad D, ita E ad B. sed vt C ad D, ita erat A ad E. ergo et vt A ad E, ita E ad B. inter numeros igitur A B vnus medius proportionalis E cadit. Dico et A ad B duplam habere proportionem eius, quam habet C ad D. Quoniam enim tres numeri proportionales sunt A E B, habebit A ad B duplam proportionem eius, quam habet A ad E. vt autem A ad E, ita C ad D. ergo A ad B duplam proportionem habet eius, quam C latus habet ad latus D. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA X. PROPOSITIO. XII.

Inter duos numeros cubos duo medij proportionales cadunt, et cubus ad cubum triplam habet proportionem eius, quam latus habet ad latus.

Sint numeri cubi A B; & ipsius quidem A latus sit C, ipsius vero B latus D. Dico inter ipsos A B duos medios proportionales cadere; et numerum A ad B triplam habere proportionem eius, quam C habet ad D. numerus enim C se ipsum multiplicans faciat E; multiplicans vero D ipsum F faciat, et D se ipsum multiplicans faciat G. Dico et A ad B triplam habere proportionem eius, quam C habet ad D. Quoniam enim tres numeri proportionales sunt A E G, habebit A ad B triplam proportionem eius, quam habet A ad E. vt autem A ad E, ita C ad D. ergo A ad B triplam proportionem habet eius, quam C latus habet ad latus D. quod oportebat demonstrare.

EVCLID. ELEMENT.

ciat G: et utrūq; ipſorum CD multiplicās F vtrumque HK faciat. Quoniam igitur cubus eſt A, & eius latus C, numerus C ſe ipſum multiplicans fecit E; multiplicans vero E ipſum A fecit. ſimiliter & D ſe ipſum multiplicans fecit G; multiplicans vero G fecit ipſum B. & quoniam C vtrūque ipſorum CD multiplicans vtrumque EF fecit, vt C ad D, ita eſt E ad F. eadem ratione & ut C ad D, ita F ad G. Rurſus quoniam C vtrumque ipſorum EF multiplicans fecit vtrumque AH, erit vt E ad F, ita A ad H. ut autem E ad F, ita C ad D. et vt igitur C ad D, ita A ad H. Rurſus quoniam vterque ipſorum CD multiplicans F vtrumque HK fecit, vt C ad D, ita erit H ad K. rurſus quoniam D vtrumque FG multiplicans fecit vtrumque KB, erit vt F ad G, ita K ad B. ut autem F ad G, ita C ad D. & ut igitur C ad D, ita K ad B. oſenſum autem eſt vt C ad D, ita eſſe A ad H, & H ad K. ergo vt A ad H, ita H ad K, & K ad B: ac propterea inter ipſos A B duo HK medij proportionales cadunt. Dico & A ad B triplam proportionem habere eius, quam habet C ad D. Quoniam enim quattuor numeri proportionales ſunt A H K B, habebit A ad B triplam proportionem eius, quā habet A ad H. vt autem A ad H, ita C ad D. ergo A ad B triplam habet proportionem eius, quam C habet ad D. quod demonſtrare oportebat.

A.....8
H.....12
K.....16
B.....27
C...2
D...3
E...4
F.....6
G.....9

THEOREMA XI. PROPOSITIO. XIII.

Si ſint quotcumque numeri deinceps proportionales, & vnuiſque ſe ipſum multiplicans faciat aliquos; facti ex ipſis proportionales erunt. et ſi poſiti à principio numeri factos multiplicantes alios faciant, et ipſi proportionales erunt. et ſemper circa extremos hoc contingit.

Sint quotcumque numeri proportionales A B C; ſitq; ut A ad B, ita B ad C. & ipſi A B C ſe ipſos multiplicantes faciant D E F: ipſos vero D E F multidelicantes faciant G H K. Dico nnumeros DEF & G H K deinceps proportionales eſſe. numerus enim A ipſum B multiplicans faciat L; vterque autem ipſorum A B multiplicans L faciat vtrumque MN. et rurſus B quidem multiplicans C ipſum X faciat; vterque vero ipſorum B C multiplicans X faciat vtrumque OP. A ſimiliter ijs, quę dicta ſunt, oſtendemus DLE, & G M N H deinceps proportionales eſſe in proportionē, quę eſt A ad B: & adhuc EXF, & H O P B eſt A ad B: & adhuc EXF, & H O P K deinceps eſſe proportionales in proportionē B ad C. atque eſt vt A ad B, ita B ad C. ergo & DLE in eadem ſunt proportionē, in qua EXF: & præterea G M N H in eadem proportionē, in qua H O P K. eſtq; ipſorum quidem DLE multitudo

A...2B...4C.....8
D....4
L.....8
E.....16
X.....32
F.....64
G.....8
M.....16
N.....32
H.....64
O.....128
P.....256
R.....512

multitudo multitudini ipsorum EXF æqualis. multitudo autē ipsorum GMNH æqualis multitudini ipsorum HOPK. ex æquali igitur ut D ad E, ita E ad F. ut autem G ad H, ita H ad K. quod demonstrare oportebat. 14: septimū.

F. C. COMMENTARIUS.

Similiter ips, quæ dicta sunt, ostendemus D L E, & GMNH deinceps proportionales esse in proportionē, quæ est A ad B. quoniam enim A duos numeros A B multiplicans fecit D. L erit ut A ad B, ita D ad L. rursus quoniam B duos numeros A B multiplicans ipsos L E fecit; ut A ad B, ita erit L ad E. sed ut A ad B, ita est D ad L. ut igitur A ad B, ita est & D ad L. & L ad E. quare sequitur D L E deinceps proportionales esse in eadem proportionē, in qua est A ad B. & quoniam A duos numeros D L multiplicans fecit ipsos G M, erit ut D ad L, hoc est ut A ad B, ita G ad M. rursus quoniam duo numeri A B multiplicantes L ipsos M N fecerunt, ut A ad B, ita erit M ad N. præterea cum B duos numeros L E multiplicans faciat N H, erit ut L ad E, ut delict ut A ad B, ita N ad H. sed ut A ad B, ita erat & G ad M, & M ad N. ut igitur G ad M, ita M ad N, & N ad H. ergo G M N H deinceps proportionales sunt in eadē proportionē, in qua est A ad B. 17. septimū. 18. septimū.

Et adhuc EXF, & HOPK deinceps esse proportionales in proportionē B ad C. hoc eodem, quo supra, modo ostendemus. numerus enim B duos numeros B C multiplicans ipsos N X, & numerus C duos numeros BC multiplicans ipsos XF fecit. ergo ut B ad C, ita est & E ad X, & X ad F. præterea B duos numeros EX multiplicans fecit H O. & duo numeri BC multiplicantes X fecerunt ipsos O P. rursus C duos numeros XF multiplicans ipsos P K fecit. quare ut E ad X, hoc est ut C ad B, ita H ad O; & rursus ut C ad B, ita O ad P. præterea ut X ad F, hoc est ut B ad C, ita est P ad K. ut igitur B ad C, ita H ad O, & O ad P, & P ad K. ex quibus constat E X F, & HOPK. deinceps proportionales esse in ea proportionē, in qua est B ad C.

THEOREMA XII. PROPOSITIO XIII.

Si numerus quadratus metiatur quadratum numerum, & latus latus metietur; & si latus metiatur latus, & quadratus quadratum metietur.

Sint quadrati numeri A B, quorum latera C D, & A ipsum B metiatur. Dico & latus C ipsum D metiri. numerus enim C multiplicans D ipsum E faciat. ergo A E B deinceps proportionales sunt in proportionē, quæ est C ad D. Quoniam igitur A E B deinceps sunt proportionales, metiturq; A ipsum B; & A ipsum E metietur. atque est ut A ad E, ita C ad D. ergo & C metitur ipsum D. sed C metiatur ipsum D. Dico & A ipsum B metiri. Ipsd enim constructis si militer ostendemus A E B deinceps proportionales esse in proportionē C ad D. & quoniam est ut C ad D, ita A ad E. metitur autem C ipsum D. & A ipsum E. metietur. & sunt A E B deinceps proportionales, metitur igitur & A ipsum B, si igitur numerus quadratus. & reliqua. quod oportebat demonstrare. *

F. C. COMMENTARIUS.

Metitur igitur & A ipsum B. quoniam enim A E B deinceps proportionales sunt; metiturq; A ipsum E; & E ipsum B metietur. quare A ipsum B metiatur necesse est ex duodecima * 20. diff. communi notione.

THEOREMA XIII. PROPOSITIO XV.

Si numerus cubus metiatur cubum numerum, & latus latus me-

D d 2 tictur

tietur: & si latus metiatur latus, & cubus cubum metietur.

Numerus enim cubus A cubum numerum B metiatur: & ipsius quidem A latus sit C, ipsius vero B latus D. Dico C ipsum D metiri. Numerus enim C se ipsum multiplicans faciat E, & multiplicans D faciat F. D vero se ipsum multiplicans faciat G, & utroque ipsorum C, D multiplicans F utrumque HK faciat. manifestum est EFG, & AHKE deinceps proportionales esse in proportione, quæ est C ad D. & quoniam AHB deinceps proportionales sunt, metieturq; A ipsum B; & A ipsum H metietur. est autem A ad H, ita C ad D. ergo C ipsum D metietur. sed C metiatur D. Dico & A ipsum B metiri. ipsæ enim constructis similiter ostendimus AHKB deinceps proportionales esse in proportione C ad D. & quoniam C ipsum D metitur, estq; ut C ad D, ita A ad H; & A metitur ipsum H. quare & ipsum B metietur. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIUS.

- A Manifestum est EFG, & AHKB deinceps proportionales esse in proportione, quæ est C ad D. hoc similiter ut in 13 demonstrabimus.
B Et A metitur ipsum H. quare & ipsum B metietur. quoniam enim est ut A ad H, ita H ad K; metieturq; A ipsum H; & H metietur ipsum K. quare & A ipsum K metietur. rursus quoniam ut A ad H, ita est K ad B, & K ipsum B metietur. ergo & A ipsum B metiatur necesse est.

THEOREMA XIII. PROPOSITIO XVI.

Si numerus quadratus non metiatur quadratum numerum, neque latus latus metietur: & si latus non metiatur latus, neque quadratus quadratum metietur.

Sint quadrati numeri A, B, quorum latera C, D. & A non metiatur ipsum B. Dico neque C ipsum D metiri. si enim metitur C ipsum D, & A ipsum B metietur. non metitur autem A ipsum B. non igitur C ipsum D metietur. sed C non metiatur D. Dico neque A ipsum B metiri. Si enim A metitur ipsum B, & C ipsum D metietur: atqui C non metitur D; neque igitur A ipsum B metietur. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XV. PROPOSITIO XVII.

Si numerus cubus non metiatur cubum numerum, neque latus latus metietur. & si latus non metiatur latus, neque cubus cubum metietur.

Numerus enim cubus A cubum numerum B non metiatur: & ipsius quidem A latus sit C, ipsius vero B latus D. Dico C ipsum D non metiri.

si enim

fi enim C metitur ipsum D, & A ipsum B metietur. atqui non metitur A ipsum B. non igitur C ipsum D metietur. Sed non metietur C ipsum D. Dico neque A ipsum B metiri. si enim A ipsum B metitur, & C metietur ipsum D. non metitur autem C ipsum D. neque igitur A ipsum B metietur. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO XVIII.

Inter duos similes planos numeros vnus medius proportionalis. Iis cadit: & planus ad planum, duplam proportionem habet eius, quam latus homologum habet ad homologum latus.

Sint duo numeri plani inter se similes A B, & ipsius quidem A latera sint C D, ipsius vero B latera E F, & quoniam similes plani sunt, qui latera habent proportionalia, erit ut C ad D, ita E ad F. Dico inter ipsos A B vnum medium proportionalem cadere, & A ad B duplam proportionem habere eius, quam latus homologum C habet ad homologum latus E, vel D ad F. quoniam enim est ut C ad D, ita E ad F, & permutando ut C ad E, ita erit D ad F, & quoniam planus numerus est A, cuius latera CD, numerus D ipsum C multiplicans facit A. Eadem ratione, & E multiplicans F ipsum B facit. numerus autem D ipsum E multiplicans facit G. & cum D ipsum quidem C multiplicans faciat A, multiplicans vero E faciat G, erit ut C ad E, ita A ad G. sed ut C ad E, ita D ad F, & ut igitur D ad F, ita A ad G. rursus quoniam E ipsum D multiplicans facit G, multiplicans vero F ipsum B facit, ut D ad F, ita erit G ad B. ostensum est autem & ut D ad F, ita esse A ad G, & ut igitur A ad G, ita G ad B. ergo A G B deinceps proportionales sunt, ac propterea inter A B vnus medius proportionalis cadit. Dico & A ad B duplam proportionem habere eius, quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc est quam C ad E, vel D ad F. Quoniam enim A G B deinceps proportionales sunt, A ad B duplam proportionem habet eius, quam habet ad G, atque est ut A ad G, ita C ad E, & D ad F. ergo & A ad B duplam proportionem habet eius, quam C habet ad E, vel D ad F. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO XIX.

Inter duos similes solidos numeros duo medij proportionales cadunt; & solidus ad solidum triplam proportionem habet eius, quam latus homologum habet ad homologum latus.

Sint duo numeri solidi inter se similes A B, & ipsius quidem A latera sint C D E, ipsius vero B latera F G H, & quoniam similes solidi sunt, qui latera habent proportionalia, erit ut C ad D, ita E ad G, ut autem D ad E, ita G ad H. Dico inter ipsos A B duos medios proportionales cadere, & A ad B triplam proportionem habere eius, quam habet C ad F, & D ad G, & adhuc D ad H. numerus enim C ipsum D multiplicans facit K, F vero multiplicans G ipsum L faciat. & quoniam C D in eadem sunt proportione, in qua F G: & ex ipsis C D

A 9
N 12
X 18
B 27
C 1
D 2
E 2
F 3
G 3
H 3
K 4
L 6
M 6
N 9
O 9
P 9
Q 9
R 9
S 9
T 9
U 9
V 9
W 9
X 9
Y 9
Z 9

fit

Ex ante-
cedente.

17. septimi.

fit K , ex ipsis vero $F G$ fit L , erunt $K L$ similes plani numeri, quare inter ipsos vnus medius proportionalis cadit, fit is numerus M , ergo M fit ex $D F$, vt in precedenti theoremate, est igitur vt K ad M , ita M ad L , & quoniam D ipsum C multiplicans fecit K , multiplicans vero F fecit M , erit vt C ad F , ita K ad M , sed vt K ad M , ita M ad L , ergo $K M L$ deinceps proportionales sunt in proportionem C ad F , & quoniam vt C ad D , ita F ad G , erit permutando vt C ad F , ita D ad G , rursum quoniam vt D ad E , ita G ad H , & permutado erit vt D ad G , ita E ad H , ergo $K M L$ deinceps proportionales sunt in proportionem C ad F , & D ad G , & E ad H , vterque autem ipsorum $E H$ multiplicans M faciat vtrumq; $N X$, & quoniam solidus est A , latera autem ipsius $C D E$, numerus E eum, qui fit ex $C D$ multiplicans fecit A , qui vero fit ex $C D$ est K , ergo E multiplicans K ipsum A fecit. Eadem ratione & H multiplicans L , qui fit ex $F G$, fecit ipsum B , & quoniam E ipsum K multiplicans fecit A , sed & multiplicans M fecit N , erit vt K ad M , ita A ad N , vt autem K ad M , ita C ad F , & D ad G , & adhuc E ad H , ergo vt C ad F , & D ad G , & E ad H , ita A ad N , rursus quoniam vterque ipsorum $E H$ multiplicans M fecit vtrumque $N X$, erit vt E ad H , ita N ad X , sed vt E ad H , ita C ad F , & D ad G , est igitur vt C ad F , & D ad G , & E ad H , ita & A ad N , & N ad X , rursus quoniam H multiplicans M fecit ipsum X , sed & multiplicans L fecit B : erit vt M ad L , ita X ad B , sed vt M ad L , ita C ad F , & D ad G , & E ad H , & vt igitur C ad F , & D ad G , & E ad H , ita non solum X ad B , sed & A ad N , & N ad X , ergo $A N X B$ deinceps proportionales sunt in dictis laterum proportionibus. Dico & A ad B triplam proportionem habere eius, quam habet latus homologum ad homologum latus, hoc est quam habet numerus C ad F , vel D ad G , & E ad H . Quoniam enim quattuor numeri proportionales sunt $A N X B$, habebit A ad B triplam proportionem eius, quam habet A ad N , sed vt A ad N , ita ostensus est & C ad F , & D ad G , & E ad H , ergo A ad B triplam habet proportionem eius, quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc est quā C habet ad F , & D ad G , & E ad H . quod demonstrare oportebat.

Diffi. 24.

F. C. COMMENTARIIVS.

- A Et quoniam E ipsum K multiplicans fecit A] est enim K , qui fit ex $C D$, & E multiplicans eum, qui fit ex $C D$ ipsum A fecit.
 B Rursus quoniam H multiplicans M fecit ipsum X , sed & multiplicans L fecit B] est enim L , qui fit ex $F G$, & H eum, qui fit ex $F G$ multiplicans ipsum B fecit.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO. XX.

Si inter duos numeros vnus medius proportionalis cadat, numeri similes plani erunt.

Inter duos enim numeros $A B$ vnus medius proportionalis cadat C . Dico numeros $A B$ similes planos esse.
 A Sumantur enim minimi numeri $D E$, eandem, quam ipsi $A C B$ proportionem habentium. est igitur vt D ad E , ita A ad C , vt autem A ad C , ita C ad B , ergo & vt D ad E , ita C ad B . equaliter igitur D ipsum A metitur, atque E ipsum C , ergo quoties D metitur A , tot vnitates sunt in

20. diffi.

F pro-

F; proptereaq; F multiplicans D ipsum A fecit; multiplicans vero E fecit C. quare A planus numerus est, cuius latera D F. rursus qm D E minimi numeri sunt, eandē quā C B proportionē habētū; aequaliter D ipsum C metitur, & E ipsum B. quoties aut E ipsū B metitur, tot unitates sint in G. ergo E ipsū B metitur per eas, quæ sunt in G unitates. quare G ipsum E multiplicās fecit B; ideoq; B numerus planus est, cuius latera E G. ergo numeri AB sunt plani. Dico & similes esse. Quoniam enim uterque ipsorum F G multiplicans E utrumque C B fecit, ut F ad G, ita erit C ad B. ut aut C ad B. ita D ad E. & ut igitur D ad E, ita F ad G. quare A B similes plani sunt; cum ipsorum latera sint proportionalia. id quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIUS.

Sumantur enim minimi numeri DE, eandem, quam ipsi A C B proportionem A habentium] ex eo, quod additum est ad 35 septimi.

Quare A B similes plani sunt, cum ipsorum latera sint proportionalia] quoniam enim est ut D ad E, ita F ad G, erit permutando ut D ad F, ita E ad G. & sunt D F latera ipsius A, & E G latera ipsius B. cum igitur plani A B latera habeant proportionalia, similes inter se erunt.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XXI.

Si inter duos numeros duo medij proportionales cadant, numeri similes solidi erunt.

Inter duos enim numeros A D duo medij proportionales cadant C D. Dico ipsos A B similes solidos esse. sumantur enim minimi numeri tres, eandem quā A C D B proportionē habentū, qui sint EFG. extremi igitur ipsorum E G primi inter se sunt. & quoniam inter E G unus medius proportionalis cecidit F, erunt numeri E G similes plani. sint ipsius quidem E latera H K; ipsius vero G latera L M. manifestum est ex antecedente EFG deinceps proportionales esse in proportionē H ad L, & in proportionē K ad M. & quoniam EFG minimi sunt, eandem, quam ACD proportionem habentium, erit ex æquali ut E ad G, ita A ad D: & sunt E G primi, sed primi & minimi. minimi vero eos, qui eandem habent proportionem æqualiter metiuntur, maior maiorem, & minor minorem, hoc est antecedens antecedentem, & consequens consequentem. ergo E ipsum A æqualiter metitur, atque G ipsum D. quoties autem E metitur A, tot unitates sint in N. ergo N ipsum E multiplicās fecit A. sed E fit ex H K: ac propterea N eum, qui fit ex H K multiplicās ipsum A fecit. solidus igitur est A, cuius latera H K N. Rursus quoniam EFG minimi sunt, eandem quam ipsi C D B proportionem habentium, E ipsum C æqualiter metitur, atque G ipsum B. & quoties G metitur B, tot unitates sint in X. ergo G ipsum B metitur per eas, quæ sunt in X unitates; ideoq; X multiplicans G ipsum B fecit. at G fit ex L M. ergo X eum, qui fit ex L M multiplicans fecit B; multiplicans vero E ipsum C fecit. solidus igitur est B, & eius latera L M X. quare A B solidi sunt. Dico etiam similes esse. quoniam enim N X C multiplicantes E ipsos A C fecerunt, ut N ad X, ita erit A ad C, hoc est E ad F. sed ut E ad F, ita H ad L, & K ad M. & ut igitur H ad L, ita K ad M, & N ad X. sunt autem

A.....8

C.....12

D.....18

B.....27

E....4

F.....6

G.....9

H...2

K...2

N...2

L...3

M...3

X...3

A

3. huius:

Ex antecedenti,
B13 septimi.
21. septimi.

9. com. not.

HKN

non minus Δ HKN latera ipsius A, & L M X latera ipsius B. ergo A B similes solidi erunt. quod da
monstrare oportebat.

comparat Δ HKN & Δ LMN. **F. C. C O M M E N T A R I V S.**

17. septimi. **A** Sumantur enim minimi numeri tres eandem, quam ACDB proportionem habentium] inueniantur primum duo minimi numeri eandem quam ACDB proportionem habentium ex his, quae nos ad 35 septimi tradidimus ; deinde ex 2. huius inueniantur tres minimi numeri, qui eandem proportionem habeant ; vel ex 35 septimi sumantur tres minimi numeri eandem, quam ACD proportionem habentium.

B Manifestum est ex antecedente E F G deinceps proportionales esse in proportionem H ad L, & in proportionem K ad M] quoniam enim E G similes plani sunt, ipsorum latera eandem habent proportionem. est igitur ut H ad K ita L ad M ; & permutando ut H ad L ita K ad M. & K multiplicans L faciat F itaque quoniam K ipsum H multiplicans fecit E ; multiplicans vero L ipsum F fecit, ut H ad L ita erit E ad F. rursus quoniam L ipsum K multiplicans fecit F, multiplicans vero M ipsum G fecit, ut K ad M ita est F ad G. ostensum est autem ut H ad L, ita esse K ad M, ergo & ut E ad F ita F ad G : ac propterea E F G deinceps proportionales sunt in proportionem H ad L, & in proportionem K ad M.

C Quoniam enim NX multiplicantes E ipsos A & C fecerunt, ut N ad X, ita erit A ad C] etenim E ipsum C aequaliter metitur, atque G ipsum B, ut ostensum est. quoties autem G metitur B, tot quoties sunt in X. ergo X multiplicans E ipsum C fecit.

THEOREMA XX. PROPOSITIO XXII.

Si tres numeri deinceps proportionales fuerint, primus autem sit quadratus, & tertius quadratus erit.

20. huius. **A** Sint tres numeri deinceps proportionales A B C ; sitq; primus A quadratus. Dico & tertium C. quadratum esse. Quoniam enim inter A C unus medius proportionalis cadit B, erit A C similes plani. sed A est quadratus, ergo & C quadratus erit, quod oportebat demonstrare.

A 4

B 6

C 9

THEOREMA XXI. PROPOSITIO. XXIII.

Si quattuor numeri deinceps proportionales fuerint, primus autem sit cubus, & quartus cubus erit.

21. huius. **A** Sint quattuor numeri deinceps proportionales A B C D, & A sit cubus. Dico & D cubum esse. Quoniam enim inter A D duo medij proportionales cadunt B C, erunt A D similes solidi. est autem A cubus; ergo et D cubus erit. quod demonstrare oportebat.

A 8

B 12

C 16

D 27

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXIII.

Si duo numeri inter se proportionem habeant, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, primus autem sit quadratus; & secundus quadratus erit.

Duo enim numeri A B inter se proportionem habeant, quam numerus quadratus C ad quadratum numerum D : sitq; A quadratus. Dico & B quadratum esse. quoniam

quoniam enim CD quadrati sunt, erunt C D
similes plani; ideoq; inter ipsos CD vnus me-
dius proportionalis cadit, est autem vt C ad
D, ita A ad B. quare etiam inter A B cadit
vnus medius proportionalis, estq; A quadra-
tus, ergo & B quadratus erit.

A.....	4
.....	6
B.....	9
C.....	16
.....	24
D.....	36

18. huius.
8. huius.
32. huius.

THEOREMA XXIII.

PROPOSITIO XXV.

Si duo numeri inter se proportionem habeant, quam numerus
cubus ad cubum numerum, primus autem sit cubus; & secundus
cubus erit.

Duo enim numeri A B inter se pro-
portionem habeant, quam cubus nu-
merus C ad numerum cubum D; sitq;
A cubus. Dico & B cubum esse. Quo-
niam enim CD cubi sunt, erunt CD
similes solidi. idcircoq; inter ipsos
duo medij proportionales cadent:
quot autem inter C D cadunt medij
proportionales, totidem cadent &
inter eos, qui eandem, quam ipsi pro-
portionem habent. ergo inter A B
duo medij cadent proportionales. ca-
dant E F. quoniam igitur quattuor
numeri A E F B deinceps proportio-
nales sunt, estq; A cubus; & B cubus erit. quod oportebat demonstrare.

A.....	8
E.....	16
F.....	18
B.....	27
C.....	64
.....	96
.....	144
D.....	216

27. huius.
8. huius.
32. huius.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXVI.

Similes plani numeri inter se proportionem habent, quam nu-
merus quadratus ad quadratum numerum.

Sint similes plani numeri A B. Dico A ad B pro-
portionem habere, quam numerus quadratus ad
quadratum numerum. Quoniam enim AB similes
plani sunt, inter eos vnus medius cadit proportio-
nalis. cadat, sitq; C: & sumantur minimi numeri,
eandem, quam ABC proportionem habentiu D E F.
ergo ipsorum extremi D F quadrati sunt. & quo-
niam est vt D ad F, ita A ad B; et sunt DF quadri-
ti: habebit A ad B proportionem, quam numerus
quadratus ad quadratum numerum. quod demon-
strare oportebat.

A.....	6
C.....	12
B.....	24
D.....	36
E.....	4
F.....	4

18. huius.
35. septimi.
Cor. 2. huius.

F. C. COMMENTARIUS.

Sed & huius conuersam verum est. quod hoc modo demonstrabimus.

Plani numeri, qui proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadra-
tum numerum, inter se similes sunt.

EUCLID. ELEMENT.

Sint plani numeri A B , qui proportionem habeant, quā quadratus numerus C ad quadratum numerum D . Dico eos inter se similes esse. Quoniam enim CD quadrati sunt, erunt similes plani. quare inter eos cadit unus medius proportionalis: atque est ut C ad D , ita A ad B . ergo & inter ipsos A B unus medius proportionalis cadit. numeri igitur AB similes plani sunt. quod demonstrare oportebat.

A..... 6
B.....24
C.....1
D....4

THEOREMA XXV. PROPOSITIO. XXVII.

Similes solidi numeri inter se proportionem habent, quam numerus cubus ad cubum numerum.

Sint similes solidi numeri A B . Dico A ad B proportionem habere, quam numerus cubus ad cubum numerum. Quoniam enim A B similes solidi sunt, inter ipsos duo medij cadent proportionales: cadāt CD ; & sumantur minimi numeri, qui eādem, quam A C D B proportionem habeant, ipsis multitudine aequales $EFCH$. ergo eorum extremi EH cubi sunt. atque est ut E ad H , ita A ad B . habet igitur A ad B proportionem, quam numerus cubus ad cubum numerum. quod demonstrare oportebat.

A.....16
C.....24
D.....36
B.....54
E.....8
F.....12
G.....18
H.....27

F. C. COMMENTARIUS.

Huius etiam conuersum verum est. quod ita demonstratur.

Solidum numeri, qui proportionem habent, quam numerus cubus ad numerum cubum, inter se similes sunt.

Sint solidi numeri A B proportionem habentes, quam numerus cubus C ad numerum cubum D . Dico eos inter se similes esse. Quoniam enim C D cubi sunt, erunt similes solidi: ac propterea inter eos cadūt duo medij proportionales. est autem ut C ad D , ita A ad B . quare etiam inter ipsos A B duo medij proportionales cadent. similes igitur solidi sunt numeri A B . quod demonstrare oportebat.

A.....16
B.....54
C.....8
D.....27

OCTAVI LIBRI FINIS.

E V C L I D I S ELEMENTORVM

LIBER NONVS.

CVM SCHOLIIS ANTIQVIS

ET COMMENTARIIS.

Federici Commandini Vrbinatis.

THEOREMA I. PROPOSITIO. I.

I DVO fimiles plani numeri fe fe multiplicantes aliquem fecerint, factus quadratus erit.

Sint duo fimiles plani numeri A B, & A ipfum B multiplicans faciat C. Dico C quadratum effe. numerus enim A fe ipfum multiplicans faciat D. ergo D quadratus est. Quoniam igitur A fe ipfum multiplicans fecit D, multiplicans vero B ipfum C fecit; vt A ad B, ita erit D ad C. Et quoniam A B fimiles plani sunt, inter ipfos vnus medius proportionalis

17. feptimi.
18. octau.

cadet. fi autem inter duos numeros numeri deinceps proportionales ceciderint, quot inter ipfos cadunt, totidem cadent & inter eos, qui eandem habent proportionem. quare & inter D C vnus medius proportionalis cadit. atque est D quadratus. ergo & C quadratus erit. quod oportebat demonftrare.

A....4

E.....6

B.....9

D.....16

E.....24

C.....36

8. octau.

11. octau.

THEOREMA II. PROPOSITIO II.

Si duo numeri fe multiplicantes quadratum numerum efficiant, fimiles plani erunt.

Duo enim numeri A B fe fe multiplicantes quadratum numerum C efficiant. Dico A B fimiles planos effe. numerus enim A fe ipfum multiplicans faciat D. ergo D quadratus est. Quoniam igitur A fe ipfum multiplicans fecit D, multiplicans vero B ipfum C fecit; vt A ad B, ita erit D ad C. & quoniam D quadratus est, fed & C; erunt D C fimiles plani. quare

A...3

.....6

B.....18

D.....9

.....18

C.....36

17. feptimi

18. octau.

8. 2 inter

E V C L I D . E L E M E N T .

3. octavi. inter ipsos vnus medius proportionalis cadit. atque est vt D ad C, ita A ad B. ergo
 10. octavi. & inter A B cadet vnus medius proportionalis . si autem inter duos numeros vnus
 medius proportionalis cadat. erunt similes plani. ergo A B similes plani sunt. quod
 oportebat demonstrare.

T H E O R E M A I I I . P R O P O S I T I O I I I .

Si cubus numerus se ipsum multiplicans faciat aliquem, factus
 cubus erit.

Cubus enim numerus A se ip-
 sum multiplicans faciat B. Dico B
 cubum esse . sumatur enim ipsius A
 latus C, & C se ipsum multiplicans
 faciat D. manifestum est C multipli-
 cantem D facere ipsum A . & quo-
 niam C se ipsum multiplicans fecit
 D, metitur C ipsum D per vnita-
 tes, quæ in ipso sunt. sed & vnitas
 metitur C per eas, quæ in ipso sunt
 vnitates . est igitur vt vnitas ad C,
 ita C ad D. rursum quoniam C mul-
 tiplicans D ipsum A fecit, metitur D ipsum A per unitates, quæ sunt in C. metitur
 autem & vnitas ipsum C per vnitates, quæ in ipso sunt. ergo vt vnitas ad C, ita D ad
 A. sed vt vnitas ad C, ita C ad D. vt igitur vnitas ad C, ita C ad D, & D ad A: ideoq;
 inter vnitatem, & numerum A duo medij deinceps proportionales cadunt CD. rur-
 sum quoniã A se ipsum multiplicans fecit B & A ipsum B metitur per vnitates, quæ
 in ipso sunt. metitur autem & vnitas ipsum A per vnitates, quæ sunt in ipso. est igitur
 vt vnitas ad A, ita A ad B. sed inter vnitatem, & A cadunt duo medij proportio-
 nales. ergo & inter A & B duo medij proportionales cadent. quod si inter duos nu-
 meros cadant duo medij proportionales, primus autem sit cubus, & quartus cubus
 erit. atque est A cubus, ergo & B cubus erit. quod demonstrare oportebat.

T H E O R E M A I I I I . P R O P O S I T I O I I I I .

Si numerus cubus cubum numerum multiplicans faciat aliquem,
 factus cubus erit.

Cubus enim numerus A cubum nume-
 rum B multiplicans ipsum C faciat . Dico
 C cubum esse . numerus enim A se ipsum
 multiplicans faciat D. ergo D cubus est. &
 quoniam A se ipsum multiplicans fecit D;
 multiplicans vero B ipsum C fecit, vt A ad
 B, ita erit D ad C. & quoniam A B cubi
 sunt, erunt similes solidi; ac propterea inter
 ipsos cadent duo medij proportionales. qua re & inter D C duo medij propor-
 tionales cadent. estq; D cubus, ergo & C cubus erit.

T H E O R E M A V . P R O P O S I T I O V .

Si cubus numerus numerum aliquem multiplicans faciat cu-
 bum, & multiplicatus cubus erit.

Cubus

Cubus enim A numerū aliquem B multiplicans, faciat cubum C. Dico B cubum esse, numerus enim A se ipsum multiplicans faciat D. ergo D cubus est. & quoniam A se ipsum quidem multiplicans fecit D; multiplicans vero B ipsum C fecit, ut A ad B, ita erit D ad C. & quoniam D C cubi sunt, similes sunt solidi; ac propterea inter ipsos cadunt duo medij proportionales: atque est ut D ad C, ita A ad B. ergo & inter A B duo medij proportionales cadent estq; A cubus. Ergo & B cubus erit. quod oportebat demonstrare.

A 8

B 27

D 64

C 216

Ex antecedente.

17. septimi.

8. octavi.

23. octavi.

F. C. COMMENTARIUS.

Ex duobus precedentibus & illa sequuntur.

Si cubus numerus numerum non cubum multiplicans faciat aliquem, factus non erit cubus.

Si enim factus sit cubus, & multiplicatus cubus erit, ex antecedente. quod non ponitur.

Si cubus numerus numerum aliquem multiplicans faciat numerum non cubum & multiplicatus non erit cubus.

Si enim multiplicatus fuerit cubus, & factus cubus erit, ex 4. huius. quod non ponitur.

THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

Si numerus se ipsum multiplicans cubum faciat, & ipse cubus erit.

Numerus enim A se ipsum multiplicans cubum B faciat. Dico & A cubum esse. numerus enim A multiplicans B faciat C. Quoniam igitur A se ipsum multiplicans fecit B; multiplicans vero B ipsum C fecit, erit C cubus. & quoniam A se ipsum quidem multiplicans fecit B; multiplicans vero B fecit C, ut A ad B, ita erit B ad C. quod cum BC cubi sint, similes solidi erunt; ideoq; inter ipsos cadent duo medij proportionales. & est ut B ad C, ita A ad B. quare & inter A B duo medij proportionales cadunt. tunc est B cubus, ergo & A cubus. ergo & A cubus erit. quod oportebat demonstrare.

A 8

B 64

C 512

Diffi. 19.

17. septimi.

19. octavi.

23. octavi.

THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

Si compositus numerus numerum aliquem multiplicans, quampiam faciat, factus solidus erit.

Cōpositus enim numerus A numerum aliquem B multiplicans ipsum C faciat. Dico C solidū esse. Quoniam enim A cōpositus est, eū numerus aliquis metietur. metiatur D. & quoties D ipsum A metitur, tot unitates sint in E. ergo E multiplicans D fecit A. & quoniam A ipsum B multiplicans fecit C; estq; A, qui fit ex D E; numerus, qui fit ex D E, ipsum B multiplicans fecit C. ergo B multiplicans eum, qui fit ex D E, ipsum C fecit. ac propterea C solidus est, cuius latera DE. quod oportebat demonstrare.

A 6

B 7

C 42

D 3

E 2

13. diffi.

9. com. not.

16. septimi

Diffi. 17.

THEO-

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

Si ab vnitare quocumque numeri deinceps proportionales fuerint, tertius quidem ab vnitare quadratus est, & vnum intermittentes omnes: quartus autem est cubus, & duos intermittentes omnes: septimus vero cubus simul, & quadratus, & quinque intermittentes omnes.

Sint ab vnitare quocumque numeri deinceps proportionales $A B C D E F$. Dico tertium quidem ab vnitare B quadratum esse, & vnum intermittentes omnes: quartum autem C cubum; & duos intermittentes omnes; septimum vero F cubum simul, & quadratum, & quinque intermittentes omnes.

Quoniam enim ut vnitatis ad A , ita A ad B , vnitatis equaliter metitur numerum A , atque A ipsum B . sed vnitatis metitur A per vnitates, quæ in ipso sunt. Ergo & A ipsum B per vnitates, quæ sunt in A metitur. quare A se ipsum multiplicans fecit B . quadratus igitur est B . & quoniam $B C D$ deinceps proportionales sunt; estque B quadratus; & D quadratus erit. Eadem ratione erit & F quadratus. similiter demonstrabimus & vnum intermittentes omnes quadratos esse. Dico & quartum ab vnitare videlicet C esse cubum, & duos intermittentes omnes. Quoniam enim est ut vnitatis ad A , ita B ad C ; vnitatis numerum A equaliter metitur, atque B ipsum C . sed vnitatis numerum A metitur per vnitates, quæ in A sunt. Ergo & B metitur C per vnitates, quæ sunt in A ; & ob id A multiplicans B ipsum C fecit. Quoniam igitur A se ipsum multiplicans fecit B ; multiplicans vero B fecit C ; erit C cubus. quod cum $C D E F$ deinceps proportionales sint; sitque C cubus; & F cubus erit. ostensum autem est & quadratum esse. septimus igitur ab vnitare F , & cubus est, & quadratus. Similiter quoque demonstrabimus quinque intermittentes omnes & cubos, & quadratos esse. quod demonstrare oportebat.

Diffin. 10.
6. com. not.

12. octavi.

10. diffin.

6. com. not.

5. com. not.

19. diffin.

13. octavi.

THEOREMA IX. PROPOSITIO IX.

Si ab vnitare quocumque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero post vnitatem sit quadratus; & reliqui omnes quadrati erunt. At si qui post vnitatem sit cubus, & reliqui omnes cubi erunt.

Sint ab vnitare numeri quocumque deinceps proportionales $A B C D E F$, & qui post vnitatem A sit quadratus. Dico & reliquos omnes quadratos esse: tertium quidem ab vnitare

B esse

B esse quadratum, & vnum intermittentes omnes, demonstratum iam est. sed & reliqui omnes quadrati erunt. Quoniam enim A B C deinceps sunt proportionales; estq; A quadratus: & C quadratus erit. rursus quoniam B C D deinceps proportionales sunt; est autem B quadratus: & D quadratus erit. similiter ostendemus & reliquos omnes quadratos esse. sit autem A cubus. Dico & reliquos cubos esse. quatum quidem ab vnitatem C esse cubum, & duos intermittentes omnes, iam demonstratum est. sed & reliqui omnes cubi erunt. Quoniam enim est vt vnitatem ad A, ita A ad B, vnitatem numerum A equaliter metitur, atque A ipsum B. sed vnitatem metitur numerum A per vnitates, quæ sunt in ipso. quare & A numerum B metitur per vnitates, quæ in ipso sunt. ergo A seipsum multiplicans fecit B, atque est A cubus. si autem cubus numerus se ipsum multiplicans fecerit aliquem, factus cubus erit. Ergo B est cubus. & quoniam quattuor numeri A B C D deinceps proportionales sunt, estq; A cubus; & D cubus erit. Eadem ratione & E est cubus, & similiter reliqui omnes cubi sunt. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIUS.

Rursus quoniam B C D deinceps proportionales sunt, est autem B quadratus; et A D quadratus erit] *videntur hæc si per uicane esse, cum superius demonstratum sit tertium ab vnitatem quadratum esse, & vnum intermittentes omnes.*

Eadem ratione & E est cubus] *quattuor enim numeri B C D E deinceps proportionales sunt; atque est B cubus. ergo & E cubus sit necesse est.*

THEOREMA X. PROPOSITIO. X.

Si ab vnitatem quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui uero post unitatem non sit quadratus; neque alius vllus quadratus erit, præter tertium ab vnitatem, & unum intermittentes omnes. At si qui post unitatem non sit cubus; neque alius vllus cubus erit, præter quartum ab vnitatem, & duos intermittentes oēs.

Sint ab vnitatem deinceps proportionales numeri A B C D E F, & qui post unitatem A non sit quadratus. Dico neque alium vllum quadratum esse, præter tertium ab vnitatem, & vnum intermittentes omnes. si enim fieri potest, sit C quadratus; est autem & quadratus B. ergo B C inter se proportionem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; atque est vt B ad C, ita A ad B. habent igitur A B inter se proportionem eam, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ideoq; AB similes plani sunt. & est B quadratus. ergo & A quadratus est. quod non ponitur. non igitur C quadratus erit. similiter ostendemus neque alium vllum quadratum esse, præter tertium ab vnitatem, & vnum intermittentes omnes. sed non sit A cubus. Dico neque alium vllum cubum esse, præter quartum ab vnitatem, & duos intermittentes omnes. si enim fieri potest, sit D cubus. est autem & cubus C; quartus enim est ab vnitatem. & vt C ad D, ita est B ad C. ergo & B ad C proportionem habet, quam cubus ad cubum; ac propterea B C similes solidi sunt. atque est C cubus. ergo & B cubus erit. & quoniam est vt unitatem ad numerum A, ita A ad B; unitatem autem numerum A metitur per unitates, quæ sunt in ipso: & A metietur B per unitates, quæ in ipso sunt.

E V C L I D . E L E M E N T .

6. huius.

sunt. quare A se ipsum multiplicans cubum B fecit. si autē numerus se ipsum multiplicans cubum faciat, & ipse cubus erit. cubus igitur est A. quod non ponitur. ergo neque D est cubus. similiter demonstrabimus neque alium vllū cubū esse, præter quartū ab vnitāte, & duos intermittentes omnes. quod demonstrare oportebat.

F. C. C O M M E N T A R I V S .

- A Ideoq; A B similes plani sunt. & est B quadratus; ergo & A quadratus erit] *quoniam enim A B similes plani sunt, inter eos unus medius proportionalis cadit. sunt igitur tres numeri deinceps proportionales; estq; primus quadratus. ergo & tertius quadratus erit.*
- B Ac propterea B C similes solidi sunt; atque est C cubus; ergo & B cubus erit] *quoniam enim similes solidi sunt, inter eos cadent duo medij proportionales; & quattuor numeri deinceps proportionales erunt. Quod cum primus sit cubus, & quartus cubus sit necesse est.*
18. octauit.
22. octauit.
19. octauit.
23. octauit.

T H E O R E M A X I . P R O P O S I T I O . X I .

Si ab vnitāte quotcūque numeri deinceps proportionales fuerint, minor maiorem metitur per aliquem eorum, qui sunt in numeris proportionalibus.

Sint ab vnitāte A quotcumque numeri deinceps proportionales B C D E. Dico horum B C D E minorem numerum B maiorem E metiri per aliquem ipsorum C D. Quā enim est vt A vnitas ad B, ita D ad E; A vnitas numeri B æqualiter metitur, atque D ipsum E. quare permutādo A vnitas numerum a qualiter D metitur, atque B ipsum E. sed A vnitas metitur D per eas, quæ sunt in ipso D vnitates. ergo & B metitur E per vnitates, quæ sunt in D. minor igitur B maiorem E metitur per aliquem eorū, qui sunt in numeris proportionalibus. quod demonstrare oportebat.

T H E O R E M A X I I . P R O P O S I T I O . X I I .

Si ab vnitāte quotlibet numeri deinceps proportionales fuerint, quicumque primorum numerorum metiuntur ultimum, ijdē & eum, qui unita ti proximus est, metientur.

Sint ab vnitāte quotlibet numeri deinceps proportionales A B C D. Dico quicumque primorum numerorum metiuntur D, eisdem & ipsū A metiri. metiatur enim aliquis primus numerus E ipsum D. Dico E ipsum quoque A metiri. Non enim metiatur E ipsum A, atq; E est primus. omnis autē m primus numerus ad omnem numerum, quē nō metitur, primus est. ergo E A numeri inter se primi sunt. et quoniam E metitur ipsum D, metiatur per vnitates, quæ

sunt

sunt in F. ergo E multiplicans F ipsū D fecit. Rursus quoniam A metitur ipsum D per eas, quæ sunt in C vnitates, A multiplicans C ipsum D fecit. Sed & E multiplicans F fecit D. qui igitur sit ex A C ei, qui sit ex E F est æqualis. ergo vt A ad E, ita F ad C. suntq; AE primi: primi aut, & minimi; minimi vero eos, qui eandē habēt proportionem, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem, & consequens consequentem. metitur igitur E ipsum C, metiatur per G. ergo E ipsum G multiplicans fecit C. sed ex antecedente & A multiplicans B ipsum C fecit. qui igitur sit ex A B æqualis est ei, qui ex E G. ergo vt A ad E, ita G ad B. & sunt A E primi. sed primi, & minimi; minimi vero eos, qui eandem habent proportionem, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem, & consequens consequentem. quare & E ipsum B metitur. metiatur per H. multiplicans igitur E ipsum H fecit B. sed & A se ipsum multiplicans fecit B. ergo qui sit ex H E est æqualis ei, qui sit ab ipso A. est igitur vt E ad A, ita A ad H. suntq; A E primi: sed primi, & minimi; minimi vero æqualiter metiuntur eos, qui eandem, quam ipsi proportionem habent, maior maiorem, & minor minorem, hoc est antecedens antecedentem, & consequens consequentem. ergo E metitur ipsum A. sed & non metitur. quod fieri non potest. non igitur A E sunt inter se primi. ergo compositi erunt. compositos vero primus aliquis numerus metitur. quare ipsos A E metietur aliquis numerus primus. & quoniam E primus ponitur: primum autem non metitur alius numerus præter se ipsum. metitur igitur E ipsos A E: ideoq; E ipsum A metitur. metitur autem & ipsum D. ergo E ipsos A D metietur. similiter demonstrabimus quicumque primorum numerorum metiuntur ipsum D, eosdem & ipsum A metiri. quod demonstrare oportebat.

19. com. nos.
A
19. septimi.
13. septimi.
21. septimi.

B
19. septimi.
23. septimi.
21. septimi.

20. septimi.

14. diff.

F. C. COMMENTARIUS.

Rursus quoniam A metitur ipsum D per eas, quæ sunt in C vnitates] hoc enim in antecedente demonstratum fuit.

Sed ex antecedente & A multiplicans B ipsum C fecit] quoniam enim, vt in antecedente demonstratum est, A metitur ipsum C per B; & A multiplicans B fecit C.

THEOREMA XIII. PROPOSITIO. XIII.

Si ab vnitate quocumque numeri deinceps proportionales fuerint; qui vero post vnitatem primus sit: maximum nullus alius metietur præter eos, qui sunt in numeris proportionalibus.

Sint quocūque numeri ab vnitate deinceps proportionales A B C D, & qui post vnitatem, videlicet A sit primus. Dico maximum D nullum alium numerum metiri, præter ipsos A B C. si enim fieri potest, metiatur E ipsum D, & non sit E idem, qui aliquis ipsorum A B C; manifestum est E primum non esse. Si enim primus sit, & metiatur D, ipsum quoque A metietur primum existentem, cum non sit idem, qui A. quod fieri non potest. non igitur E primus est. ergo compositus: omnem autem compositum numerum primus aliquis numerus metitur. Dico nullum alium primum metiri ipsum E præterquam A. si enim alius metitur E, & E metitur D, & ille ipsum D metietur. quare & ipsum A primum existentem, cum non sit idem, qui A. quod fieri non potest. ergo A ipsum E metitur. & quoniam E metitur D, metiatur ipsum per F. non erit F idem, qui aliquis ipsorum A B C. si enim est idem, metiaturq; ipsum D per E; & vnus ipsorum A B C ipsum D per E metietur. sed vnus ipso

Ex antecedente:

13. diff.

12. com. nos.

Ex antecedente.

11 huius.

F f rum

Ex anteceden-
tibus.

19. septimi.

20. septimi.

rum ABC metitur D per aliquem ipsorum ABC . quare & E idem erit, qui vnus ipsorum ABC . quod non ponitur. non igitur F est idem, qui vnus ipsorum ABC . similiter ostendemus A metiri ipsum F . rursum ostendentes non esse F primum numerum, si enim est primus, & metitur ipsum D , ipsum quoque A metietur, primum existentem, cum non sit idem, qui A . quod fieri non potest. non igitur F primus est. ergo compositus, & eum aliquis primus metietur. Dico nullum alium metiri ipsum F præterquam A . si enim alius metitur F , & F metitur D ; & ille ipsum D metietur. quare & ipsum A , primum existentem, cum non sit idem, qui A . quod fieri non potest. ergo A ipsum F metitur. Et quoniam E metitur D per F , & E multiplicans F ipsum D fecit. Sed & A multiplicans C fecit D . qui igitur fit ex A C est æqualis ei, qui ex EF . ergo vt A ad E , ita est F ad C . sed A metitur E . quare & F ipsum C metietur. metiatur per G . similiter demonstrabimus G non esse eundem, qui vnus ipsorum ABC , & A ipsum G metiri. & quoniam F ipsum C metitur per G , multiplicans F ipsum G fecit C . sed & A multiplicans B ipsum C fecit. ergo qui fit ex AB ei, qui ex FG est æqualis. vt igitur A ad F , ita est G ad B . metitur autem A ipsum F . ergo & G ipsum B metietur. metiatur per H . similiter demonstrabimus H non esse eundem, qui A . & quoniam G ipsum B per H metitur, G multiplicans H ipsum B fecit. sed & A se ipsum multiplicans fecit B . qui igitur fit ex HG est æqualis quadrato, qui ex A . ergo ut H ad A , ita A ad G . metitur autem A ipsum G . quare & H ipsum A metietur, primum existentem, cum non sit idem, qui A . quod est absurdum. non igitur aliquis alius metietur ipsum D maximum, præter ipsos ABC . quod demonstrandum fuerat.

THEOREMA. XIII. PROPOSITIO XIII.

Si minimum numerum primi numeri metiantur, nullus alius numerus metietur ipsum, præter eos, qui à principio metiebantur.

32. septimi.

Minimum enim numerum A primi numeri BCD metiantur. Dico nullum alium primum numerum metiri ipsum A , præter ipsos BCD . si enim fieri potest, metiatur E ipsum A ; & non sit E idem, qui aliquis ipsorum BCD . & quoniam E metitur A , ipsum per F metiatur. ergo E multiplicans F ipsum A fecit. Et metiuntur A primi numeri BCD . si autem duo numeri se se multiplicantes aliquem faciant, & factum ex ipsis metiatur aliquis primus numerus; & vnus eorum, qui à principio positi sunt, metietur. ergo BCD metientur vnus ipsorum EF . ipsum quidem E non metientur; etenim E primus est; & non idem qui aliquis ipsorum BCD . ergo ipsum F metietur, qui est minor, quam A . quod fieri non potest. ponitur enim A minimus eorum, quos BCD metiantur. non igitur ipsum A metietur aliquis primus numerus, præter ipsos BCD . quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XV. PROPOSITIO XV.

Si tres numeri deinceps proportionales fuerint, minimi eorum

qui eandem,quam ipsi proportionem habeant; duo quilibet compositi ad reliquum primi erunt.

Sint tres numeri deinceps proportionales minimi eorum,qui eadem,quam ipsi proportionem habent A B C.Dico duos quoslibet compositos ad reliquum primos esse, videlicet A B ad C, & B C ad A, & A C ad B. sumantur enim duo minimi numeri qui eandem, quam ipsi A B C proportionem habeant D E E F. manifestum est D E se ipsum quidem multiplicantem facere A; multiplicantem vero E F facere B; & E F se ipsum multiplicantem facere C.& quoniam D E E F minimi sunt,primi erunt inter se.si autem duo numeri primi inter se fuerint, & vterque simul ad vtrumque primus erit. ergo D F ad vtrumque ipsorum D E E F primus est.Sed & D E ad E F est primus.quare D F D E ad E F primi sunt:ac propterea qui fit ex F D D E primus est ad E F. si autem duo numeri primi inter se fuerint, qui fit ex vno ipsorum ad reliquum primus erit.ergo qui fit ex F D D E ad eum, qui fit ex E F est primus. sed qui fit ex F D D E est qui fit ex D E vna cum eo,qui ex D E E F. qui igitur ex D E vna cum eo, qui ex D E E F primus est ad eum, qui ex E F. Sed qui fit ex D E est A; qui vero ex D E E F est B, & qui ex E F est C. ergo A B compositi ad ipsum C primi sunt. similiter ostendemus & B C ad A esse primos.Dico & A C ad B primos esse. Quoniam enim D F ad vtrumque ipsorum D E E F est primus, & qui fit ex D F ad eum, qui ex D E E F primus erit. Sed ei, qui fit ex D F aequales sunt qui ex D E, & E F sunt vna cum eo, qui bis fit ex D E E F. qui igitur ex D E, & E F sunt vna cum eo, qui bis ex D E E F primi sunt ad eum, qui ex D E E F. ergo & diuidendo qui sunt ex D E, & E F vna cum eo, qui semel fit ex D E E F primi sunt ad eum, qui ex D E E F. & rursus diuidendo qui sunt ex D E, & E F ad eum, qui fit ex D E E F primi sunt. Sed qui fit ex D E est A, qui vero ex D E E F est B; & qui ex E F est C. ergo A C compositi ad ipsum B primi crunt. quod demonstrare oportebat.

A . . . 4 B 6

C 9

B 6 C 9

A . . . 4

C 9 A . . . 4

B 6

D . . E . . F

A

2. octavi.

24. septimi.

30. septimi.

26. septimi.

27. septimi.

C

D

E

F

F. C. COMMENTARIUS.

Sumantur enim duo minimi numeri eandem, quam ipsi A B C proportionem habentium] ex ijs, quae demonstrauimus ad 35 septimi.

Sed qui ex F D D E est qui fit ex D E vna cum eo, qui ex D E E F] Hoc in lineis demonstratur ab Euclide in secundo libro, propositione tertia. sed quoniam numeri propria habent principia, Barlaam monachus non solum hoc ex illis demonstrauit, sed & quaecumque in secundo libro tradita sunt, quae nos vtpote non aliena loco apponenda censuimus. demonstrat autem hoc theoremate tertio.

Quoniam enim D F ad vtrumque ipsorum D E E F est primus, & qui fit ex D F ad eum, qui ex D E E F primus erit] nam cum D F ad vtrumque ipsorum D E E F sit primus, erit D F primus ad eum, qui ex D E E F est 26 septimi. quare ex 27 eiusdem & qui fit ex D F ad eum, qui ex D E E F est primus.

Sed ei, qui fit ex D F aequales sunt qui ex D E, & E F] hoc in lineis demonstratur in secundo libro propositione 4. sed in numeris Barlaam demonstrauit theoremate quarto.

Ergo & diuidendo qui sunt ex D E, & E F vna cum eo, qui semel fit ex D E E F] primi sunt ad eum, qui fit ex D E E F.] si enim non sunt primi, compositi erunt. quare eos aliquis numerus communis mensura metietur. cum igitur is numerus metiatur vtrumque & compositum ex illis metietur, videlicet qui sunt ex D E, & E F vna cum eo, qui bis fit ex D E E F. sed & metitur eum, qui fit ex D E E F. ergo qui sunt ex D E, & E F vna cum eo, qui bis fit ex D E E F non sunt primi ad eum, qui ex D E E F. atqui primi sunt. quod est absurdum. non igitur sunt compositi. ergo qui sunt ex D E, & E F vna cum eo, qui semel fit ex D E E F primi sunt ad eum, qui fit ex D E E F.

11. com. not.

E V C L I D . E L E M E N T .

F Et rursus diuidendo qui sunt ex DE, & EF ad eum, qui fit ex DE, EF primi sunt] Si enim non sint primi, eodem, quo supra, modo ostendemus eos, qui sunt ex DE, & EF una cum eo, qui fit ex DE EF non esse primos ad eum, qui ex DE EF, quod est absurdum: sunt enim primi, ut demonstratum iam fuit. ergo qui sunt ex DE & EF ad eum, qui ex DE EF primi sunt necesse est.

Barlaam Monachi arithmetica demonstratio eorum, quæ Euclides libro secundo in lineis demonstrauit.

T H E O R E M A I .

Si duobus numeris propositis eorum alter in quotlibet numeros diuidatur, numerus planus, qui fit ex duobus numeris ab initio propositis æqualis erit numeris planis, qui ex numero indiuiso, & singulis partibus numeri diuisi sunt.

Sint duo numeri AB C; & diuidatur AB in quotlibet numeros AD DE EB. Dico numerum planum, qui fit ex C AB numeris planis, qui sunt ex C AD, & C DE, & C EB æqualem esse. fit enim numerus planus F, qui fit ex C AB: GH vero, qui fit ex C AD: & HI, qui fit ex C DE: & IK, qui ex C EB. Quoniam igitur AB multiplicans C ipsum F fecit, C metitur F per eas, quæ sunt in AB unitates. Eadem ratione C metitur GH per unitates, quæ sunt in AD: & metitur HI per unitates, quæ in DE: & IK per unitates, quæ in EB. ergo C metitur totum GK per unitates, quæ sunt in AB. metiebatur autem & ipsum F per eas, quæ sunt in AB unitates. uterque igitur ipsorum F GK æque multiplex est numeri C. qui vero eiusdem sunt æque multiplices, inter se æquales sunt. ergo F ipsi GK est æqualis: atque est F quidem numerus planus, qui fit ex C AB: GK vero compositus ex numeris planis, qui sunt ex C, & singulis ipsorum AD DE EB. qui igitur fit ex C AB numerus planus æqualis est planis numeris, qui ex C, & singulis ipsorum AD DE EB sunt. quare si duobus numeris propositis eorum alter in quotlibet numeros diuidatur, numerus planus, qui fit ex duobus numeris ab initio propositis æqualis erit numeris, qui ex numero indiuiso, & singulis partibus numeri diuisi sunt. quod oportebat demonstrare.

1. com. not.

3. com. not.

T H E O R E M A I I .

Si numerus in duos numeros diuidatur, duo numeri plani, qui sunt ex toto, & utraque parte, inter se compositi æquales sunt numero quadrato, qui à toto efficitur.

Numerus enim AB diuidatur in duos numeros AC CB. Dico duos numeros planos, qui sunt ex BA AC, & AB BC inter se compositos, quadrato, qui fit ex AB, æquales esse. numerus enim AB se ipsam multiplicans faciat D: AC vero multiplicans AB faciat EF: & CB eundem AB multiplicans faciat FG. quoniam igitur AC multiplicans AB ipsum EF fecit, AB metitur EF per eas, quæ sunt in AC unitates. Rursus quoniam CB ipsum AB multiplicans fecit FG, AB metitur FG per unitates, quæ sunt in CB. metiebatur autem & E F per unitates, quæ in A C. ergo AB totum E G per unitates, quæ in se ipso sunt metitur. rursus quoniam AB se ipsam multiplicans fecit D, metitur AB ipsam quoque D per unitates, quæ in seipso sunt. ergo AB utrumque ipsorum D, E G metitur per eas, quæ in seipso sunt unitates. quotuplex igitur est D ipsius AB, totuplex erit & E G ipsius AB. qui vero eiusdem numeri sunt æque multiplices inter se æquales sunt. ergo D ipsi E G est æqualis. atque est D quidem numerus quadratus, qui fit ex AB, EG vero numerus compositus ex duobus planis, qui sunt ex AB BC, & BA AC. quadratus igitur numerus ex AB est æqualis numero composito ex duobus planis, qui ex AB BC, & BA AC sunt. quare si numerus in duos numeros diuidatur, duo numeri plani, qui sunt ex toto, & utraque parte inter se compositi æquales sunt numero quadrato, qui à toto efficitur: atque illud est. quod oportebat demonstrare.

1. com. not.

1. com. not.

T H E O -

T H E O R E M A I I I.

Si numerus in duos numeros diuidatur, planus numerus, qui ex toto, & vna parte fit & qualis est plano, qui fit ex partibus vna cum eo quadrato, qui à prædicta parte efficitur.

Numerus enim AB diuidatur in duos numeros AC CB . Dico planum numerum, qui fit ex AB plano, qui ex AC CB vñ cum quadrato, qui fit à CB aequalem esse. numerus enim AB multiplicans B C ipsius D faciat. AC vero multiplicans CB faciat EF : & CB se ipsum multiplicans faciat FG . itaq; quoniam AB ipsum B multiplicans fecit D , metitur BC ipsum D per vñitates, quae sunt in AB . rursus quoniam AC multiplicans CB fecit EF , CB metitur EF per eas, quae sunt in AC vñitates. rursus quoniam CB seipsum multiplicans fecit FG , CB metitur FG per vñitates, quae in se ipso sunt; metiebatur autem & EF per vñitates, quae sunt in AC . totum igitur EG metitur CB per eas, quae sunt in AB vñitates: metiebatur autem & ipsum D per vñitates, quae in AB . ergo CB vtrumque D , EG aequaliter metitur: ij vero, quos idem numerus aequaliter metitur, inter se aequales sunt. quare D est aequalis ipsi FG . atque est D quidem planus numerus, qui fit ex AB BC : E G vero, qui ex AC CB vñ cum quadrato, qui à CB . ergo planus numerus, qui fit ex AB BC est aequalis ei, qui ex AC CB , & quadrato, qui à CB . si igitur numerus in duos numeros diuidatur, planus numerus, qui ex toto, & una parte fit aequalis est plano, qui fit ex partibus vñ cum eo quadrato, qui à predicta parte efficitur, quod oportebat demonstrare.

T H E O R E M A I I I I.

Si numerus diuidatur in duos numeros, qui à toto fit quadratus equalis est quadratis, qui à partibus fiūt, & ei, qui bis ex dictis partibus fit numero plano.

Numerus enim AB diuiditur in duos numeros AC CB . Dico quadratum, qui fit ex AB quadratis, qui ex AC CB , & numero plano, qui bis ex AC CB fit, aequalem esse. fit enim D quadratus numerus, qui fit ex AB : EF vero quadratus, qui fit AC , & GH quadratus, qui ex CB : numerus autem planus, qui fit ex AC CB uterque ipsorum FG HK . quoniam igitur AC fit ipsum multiplicans fecit EF , metitur AC numerum EF per unitates, quae in se ipso sunt. rursum quoniam BC multiplicatur AC fecit FG , metitur CA ipsum FG per unitates, quae sunt in B C . metiebatur autem & EF per unitates, quae in ipso sunt. ergo AC totum EG per unitates, quae sunt in AB metitur. quare AB multiplicans AC ipsum EG fecit: ideoque, EG est numerus planus, qui fit ex B A A C . similiter ostendimus & G K numerum planum esse, qui fit ex AB BC . atque est D numerus quadratus, qui ex AB efficitur. si autem numerus in duos numeros diuidatur, qui a toto fit quadratus aequalis est duobus numeris planis, qui fiunt ex toto, & vtraque parte. ergo D ipsi E K est aequalis. sed E K constat ex quadratis, qui ex AC CB fiunt, & eo, qui bis ex AC CB numero plano. atque est D quadratus ex AB . quadratus igitur ex AB est aequalis quadratis, qui ex AC CB , & ei, qui bis ex AC , CB fit, numero plano. Ergo si numerus diuidatur in duos numeros, qui a toto fit quadratus aequalis est quadratis, qui ex partibus fiunt, & ei, qui bis ex dictis partibus fit numero plano. quod demonstrare oportebat.

T H E O R E M A V.

Si par numerus bifariam diuidatur; diuidatur, autem & in numeros inæquales, qui ex inæqualibus partibus fit numerus planus vnâ cum quadrato numeri interiecti æqualis est ei, qui ex dimidio fit quadrato.

Sit par numerus AB : & bifariam in AC CB diuidatur: diuidaturq; in partes inequales AD DB . Dico quadratum ex CB numero plano, qui

fit ex

E V C L I D . E L E M E N T .

fit ex AD DB una cum quadrato, qui ex C D aequalem esse. fit enim E quadratus ex CB: numerus vero planus FG, qui fit ex AD DB. & ex DC quadratus fit GH. itaq; quoniam numerus B C diuiditur in duos numeros ED DC, erit quadratus ex B C, hoc est E aequalis quadratis ex BD DC una cum eo; qui bis fit ex BD DC numero plano. fit igitur ex E D quidem quadratus K L, ex DC vero quadratus N X: & planus ex BD DC uterque ipsorum LM MN: totus igitur KX ipsi E est aequalis. et quoniam BD se ipsum multiplicans fecit KL, metitur ED ipsam KL per unitates, quae in se ipso sunt. rursus quoniam C D ipsum D B multiplicans fecit LM; D B metitur L M per unitates, quae sunt in C D. metiebatur autem KL per eas, quae in se ipso sunt unitates. ergo D B totum K M metitur per unitates, quae sunt in C B. aequalis autem est C B ipsi C A. quare D B metitur K M per unitates, quae sunt in C A. rursus quoniam C D multiplicans DB fecit MN, DB metitur MN per eas, quae sunt in C D unitates. metiebatur autem & KM per unitates, quae sunt in A C. ergo DB totum KN per unitates, quae sunt in A D, metitur. sed & DE metitur FG per unitates, quae sunt in A D: ponitur enim F G, qui fit ex AD DB. aequalis igitur est F G ipsi KN. qui enim sunt eiusdem aequae multiplices inter se aequales sunt. est autem et GH aequalis N X, cum uterque quadratus ex CD ponatur. totus igitur KX toti FH est aequalis; estq; ipsi E aequalis K X. Ergo FH ipsi E aequalis erit. atque est F H quidem numerus planus ex AD DB una cum quadrato, qui fit ex D C. E vero est qui fit ex C B quadratus. numerus igitur planus, qui fit ex AD DB una cum quadrato ex D C aequalis est ei, qui fit ex C B quadrato. ergo si par numerus bisariam diuidatur; diuidatur autem & in numeros inaequales; qui ex inaequalibus partibus fit numerus planus una cum quadrato numeri interiecti aequalis est ei, qui ex dimidio fit quadrato. quod oportebat demonstrare.

T H E O R E M A V I .

Si par numerus bisariam diuidatur, adiciaturq; ipsi numerus aliquis, qui fit ex toto cum adiecto, & adiecto planus numerus una cum quadrato dimidij est aequalis quadrato eius, qui ex dimidio, & adiecto constat.

Par enim numerus AB diuidatur bisariam in numeros A C C B: & ipsi alius numerus ED adiciatur. Dico numerum planum qui fit ex AD DB una cum quadrato ex CB aequalem esse ei, qui fit ex CD quadrato. Sit enim E quadratus ex CD: numerus autem planus, qui fit ex AD DB fit FG: & ex CB quadratus CH. & quoniam quadratus ex CD est aequalis quadratis ex DB EC una cum eo, qui bis fit ex DB EC: fit quadratus quidem ex BD numerus KL: planus vero numerus ex DB EC fit uterque ipsorum LM MN: & ex BC quadratus N X. totus igitur KX est aequalis quadrato ex CD: est autem E, qui fit ex CD quadratus. ergo KX ipsi E est aequalis. & quoniam BD se ipsum multiplicans fecit K L, B D metitur KL per unitates, quae in se ipso sunt. metitur autem & LM per unitates, quae sunt in C E. ergo DB metitur totum KM per eas, quae sunt in C D unitates. est autem C B ipsi C A aequalis, ut ponitur. quare DB totum K N metitur per unitates, quae sunt in A D. sed DE metitur quoque ipsam FG per unitates, quae sunt in A D: ponitur enim FG, qui fit ex AD DB. ergo FG ipsi KN est aequalis. est autem & H G aequalis N X. uterque enim est quadratus, qui fit ex C B. totus igitur FH est aequalis toti KX. sed KX offensus est aequalis ipsi E, ergo & FH ipsi E est aequalis. atque est FH quidem planus numerus, qui fit ex AD DB una cum quadrato, qui ex C B; E vero est quadratus, qui fit ex C D. qui igitur fit ex AD DB una cum quadrato, qui ex C B est aequalis ei, qui fit ex C D quadrato. Ergo si par numerus bisariam diuidatur, adiciaturq; ipsi numerus aliquis, qui fit ex toto cum adiecto, & adiecto planus numerus una cum quadrato dimidij est aequalis quadrato eius, qui ex dimidio, & adiecto constat. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA VII.

Si numerus in duos numeros diuidatur, qui à toto fit quadratus vnà cum quadrato vnus partis æqualis est numero plano, qui bis fit ex toto, & dicta parte vnà cum reliqua partis quadrato.

Numerus enim AB diuidatur in numeros AC CB . Dico quadratos, qui sunt ex BA AC æquales esse numero plano, qui bis fit ex BA . AC vnà cum ipsius BC quadrato. Quoniam enim quadratus, qui ex AB , est æqualis quadratis, qui ex BC CA , & ei, qui bis fit ex BC CA numero plano. communis apponatur quadratus ex AC . quadratus igitur ex BA vnà cum quadrato ex AC est æqualis duobus quadratis, qui ex AC , & quadrato ex CB vnà cum eo, qui bis fit ex BC CA plano. et quoniam qui semel fit ex BA AC est æqualis ei, qui semel fit ex BC CA vnà cum ipsius CA quadrato; qui bis fit ex BA AC æqualis erit ei, qui bis fit ex BC CA vnà cum duobus quadratis ipsius CA . communis apponatur quadratus, qui ex BC . Duo igitur quadrati ex AC , & quadratus vnus ex CB vnà cum eo, qui bis fit ex BC CA æquales sunt ei, qui bis fit ex BA . AC vnà cum ipsius CB quadrato. quadratus igitur ex AB vnà cum quadrato ex AC æqualis est ei, qui bis fit ex BA . AC vnà cum quadrato reliquæ partis CB . ergo si numerus in duos numeros diuidatur, qui à toto fit quadratus vnà cum quadrato vnus partis æqualis est numero plano, qui bis fit ex toto, & dicta parte vnà cum reliquæ partis quadrato. quod oportebat demonstrare.

B
:
:
:
:
:
:
 A

4. antecedentium.

3. antecedentium.

THEOREMA VIII.

Si numerus in duos numeros diuidatur, qui quater ex toto & vnà parte fit numerus planus vnà cum quadrato reliquæ partis æqualis est quadrato, qui à toto, & dicta parte, tamquam ab vno efficitur.

Numerus enim AB diuidatur in duos numeros AC CB . Dico numerum planum, qui quater fit ex AB BC vnà cum quadrato ipsius AC æqualē esse ei, qui ex AB BC tamquam ex vno fit quadrato. ponatur enim ipsi B C æqualis BD . & quoniam quadratus ex AD æqualis est quadratis, qui ex AB BD , & ei, qui bis fit ex AB BD numero plano. atque est B D æqualis B C . ergo qui fit ex AD quadratus æqualis est quadratis, qui ex AB BC , & ei, qui bis fit ex AB BC numero plano. sed quadrati, qui ex AB BC æquales sunt numero plano, qui bis fit ex AB BC vnà cum ipsius AC quadrato. est igitur qui fit ex AD quadratus æqualis ei, qui quater fit ex AB BC , & quadrato ex AC . atque est quadratus ex AD , qui ex AB , & BC , tamquam ex vno efficitur: ceterum BD ipsi BC est æqualis. ergo quadratus, qui ex AB BC fit tamquam ex vno est æqualis ei, qui quater fit ex AB BC , & ipsius AC quadrato. si igitur numerus in duos numeros diuidatur, qui quater ex toto, & vnà parte fit numerus planus vnà cum quadrato reliquæ partis æqualis est quadrato, qui à toto, & dicta parte tamquam ab vno efficitur. quod demonstrare oportebat.

D
:
:
:
:
:
:
 A

Ex antecedente.

THEOREMA IX.

Si par numerus bisariam diuidatur; diuidatur autem & in numeros inæquales, quadrati, qui ab inæqualibus numeris fiunt, dupli sunt eius quadrati, qui fit à dimidio, vnà cum quadrato numeri inter ipsos interiecti.

Par enim numerus AB bisariam diuidatur in numeros AC CB : diuidatur etiam in numeros inæquales AD DB . Dico quadratos, qui sunt ex AD DB quadratorum, qui ex AC CD duplos esse. Quoniam enim par numerus AB in numeros æquales diuiditur AC CB : & in numeros inæquales AD DB : qui fit ex AD DB vnà cum quadrato ex CD æqualis est ei, qui fit ex AC quadrato. qui igitur bis fit ex AD DB vnà cum duobus ex CD quadratis duplus est eius quadrati, qui fit ex AC . Quoniam igitur AB bisariam diuiditur in numeros AC CB , quadratus, qui fit ex AB quadruplus erit eius, qui ex AC quadrati. & quoniam qui bis fit ex AD DB vnà cum duobus quadratis ex CD duplus est quadrati, qui ex AC . si autem sint duo numeri, quorum alter eiusdem quadruplus sit, alter vero duplus, qui quadruplus est dupli est du-

B
:
:
:
:
:
:
 A

5. antecedentium.

plus,

4. antecedent
num.

5. antecedent
num.

6. antecedent
num.

plus; erit quadratus ex AB duplus eius, qui bis fit ex AD DB una cum duobus qui ex CD quadratis. qui igitur bis fit ex AD DB minor est, quam dimidius quadrati ex AB , duplo quadrati ex CD . rursus quoniam qui bis fit ex AD DB una cum numero composito ex quadratis AD DB aequalis est ei, qui fit ex AB quadrato: erit compositus ex AD DB quadratis maior, quam dimidius quadrati ex AB , duplo quadrati ex CD . atque est quadratus ex AB quadrati ex AC quadruplus. compositus igitur ex quadratis AD DB maior est, quam duplus quadrati ex AC , duplo quadrati ex DC . ergo duplus est quadratorum, qui ex AC CD fiunt. si igitur par numerus bifariam diuidatur, diuidatur autem & in numeros inaequales; quadrati, qui ab inaequalibus numeris fiunt, dupli sunt eius quadrati, qui fit à dimidio una cum quadrato numeri inter ipsos interiecti. quod demonstrare oportebat.

B
2
D
C
C
5
A

F. C. C O M M E N T A R I V S .

Præcedens demonstratio obscuriuscula est, quare apertius hoc modo explicabitur.

Quoniam enim numerus AD diuiditur in numeros AC CD , erit ex quarta huius quadratus, qui fit ex AD , aequalis quadratis ex AC CD una cum numero plano, qui bis fit ex AC CD . & cum numerus CB sit aequalis ipsi AC , quadratus ex AD aequalis erit quadratis ex BC CD una cum eo, qui bis fit ex BC CD . addatur communis quadratus ex DB . quadrati igitur ex AD DB aequales sunt quadratis ex BC CD DB una cum eo, qui bis fit ex BC CD . sed quadrati ex BC CD ex 7. antecedentium sunt aequales ei, qui bis fit ex BC CD una cum quadrato DB . ergo quadrati ex AD DB aequales sunt dupli quadratorum ex BC CD , hoc est dupli quadratorum ex AC CD : ac propterea quadrati, ex AD DB quadratorum ex AC CD dupli erunt. quod demonstrare oportebat.

B
2
D
5
C
5
A

T H E O R E M A X .

Si par numerus bifariam diuidatur, adijciaturque ipsi alter numerus; qui fit ex toto cum adiecto, & qui ex adiecto utrique quadrati dupli sunt quadrati ex dimidio, & quadrati, qui ex dimidio, & adiecto, tamquam ex uno efficitur.

7. antecedent
num.

6. antecedent
num.

Sit enim par numerus AB , & in numeros AC CB bifariam diuidatur, adijciaturque ipsi alter numerus ED . Dico quadratos ex AD DB quadratorum ex AC CD duplos esse. Quoniam enim numerus AD diuiditur in numeros AB ED , erunt quadrati ex AD DB aequales numero plano, qui bis fit ex AD DB una cum quadrato ex AB . quadratus autem ex AB est aequalis quattuor quadratis, qui sunt ex AC CB ; est enim AC ipsi CB aequalis. quadrati igitur ex AD DB sunt aequales ei, qui bis fit ex AD DB , & quattuor quadratis ex AC CB . & quoniam qui fit ex AD DB una cum quadrato ex CB est aequalis quadrato ex CD : erit qui bis fit ex AD DB una cum duobus ex C B quadratis aequalis duobus quadratis, qui ex CD fiunt. ergo quadrati ex AD DB aequales sunt duobus quadratis ex CD , & duobus quadratis ex AC . dupli igitur sunt quadratorum ex AC CD . atque est quadratus quidē ex AD , qui fit ex toto cum adiecto; quadratus uero ex DB , qui fit ex adiecto, & quadratus ex CD , qui ex dimidio, & adiecto. quadratus igitur, qui fit ex toto cum adiecto una cum eo, qui ex adiecto, duplus est quadrati, qui fit ex dimidio una cum quadrato eius, qui ex dimidio, & adiecto consistit. quare si par numerus bifariam diuidatur, adijciaturque ipsi alter numerus; qui fit ex toto cum adiecto, & qui ex adiecto utrique quadrati dupli sunt quadrati ex dimidio, & quadrati, qui ex dimidio, & adiecto, tamquam ex uno efficitur. quod demonstrare oportebat.

D
2
B
5
C
5
A

F. C. C O M M E N T A R I V S .

Illud autem, quod undecime secundi libri respondet, nempe numerum ita diuidere, ut qui ex toto, & altera parte fit numerus planus, aequalis sit ei, qui à reliqua parte fit quadrato, nullo modo fieri potest.

Si enim fieri possit, diuidatur numerus AB in numeros AC CB . ut qui ex AB BC fit none-

rit

rus planus aequalis fit quadrato ex AC . qui igitur quater fit ex AB BC quadrati ex AC quadruplus est. ergo qui quater fit ex AB BC una cum quadrato ex AC quintuplus est ipsius quadrati ex AC . sed qui quater fit ex AB BC una cum quadrato ex AC numerus quadratus est; etenim aequalis est quadrato, qui à toto AB , et à parte BC tamquam ab uno efficitur ex octavo premissorum. est autem C qui fit AC quadratus. duo igitur quadrati numeri inter se proportionem habent, quam quinque ad unum. quod fieri non potest. Ergo numerus non diuiditur ita, ut qui à toto, & altera parte fit numerus planus aequalis sit ei, qui à reliqua parte fit quadrato. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XVI. PROPOSITIO. XVI.

Si duo numeri primi inter se fuerint, non erit ut primus ad secundum, ita secundus ad alium vllum.

Duo enim numeri AB primi inter se sint. Dico non esse ut A ad B , ita B ad alium vllum. si enim fieri potest, sit ut A ad B , ita B ad C . & sunt AB primi, sed primi, & minimi, minimi vero eos, qui eandem habent proportionem, & qualiter metiuntur, antecedens antecedentem, & consequens consequentem. metitur igitur A ipsum B , ut antecedens antecedentem. sed & ipse se ipsum metitur. ergo A metitur ipsos AB primos inter se existentes. quod est absurdum. non igitur est ut A ad B , ita B ad C . quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO XVII.

Si fuerint quotcumque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipsorum primi inter se sint, non erit ut primus ad secundum, ita ultimus ad alium vllum.

Sint quotcumque numeri deinceps proportionales $ABCD$, extremi autem ipsorum AD primi sint inter se. Dico non esse ut A ad B , ita D ad alium vllum. si enim fieri potest, sit ut A ad B , ita D ad E . quare permutando, ut A ad D , ita erit B ad E . & sunt AD primi; sed primi, & minimi; minimi vero eos, qui eandem habent proportionem, & qualiter metiuntur, antecedens antecedentem, & consequens consequentem. metitur igitur A ipsum B . atque est ut A ad B , ita B ad C . ergo & B metitur ipsum C ; & ob id A quoque ipsum C metitur. & quoniam est ut B ad C , ita C ad D ; metitur autem B ipsum C , & C ipsum D metitur. Sed A metitur C . quare & ipsum D . metitur autem & se ipsum. Ergo A ipsos AD primos inter se existentes metitur. quod fieri non potest. non igitur erit ut A ad B , ita D ad alium vllum. quod demonstrare oportebat.

PROBLEMA I. PROPOSITIO. XVIII.

Duobus numeris datis considerare an tertius ipsis proportionalis inueniri possit.

Gg Sint

EVCLID. ELEMENT.

Sint dati duo numeri A B; & oporteat considerare an possit tertius ipsis proportionalis inueniri. Itaque AB vel primi inter se sunt, vel non primi. si quidem primi, iam ostensum est, fieri non posse, vt tertius ipsis proportionalis inueniatur. Sed non sint A B inter se primi, & B se ipsum multiplicans faciat C. vel igitur A metitur C, vel non metitur. metiatur primum per D. ergo A multiplicans D ipsum C fecit. sed & B se ipsum multiplicans fecit C. qui igitur fit ex A D est equalis ei, qui ex B. ergo vt A ad B, ita B ad D; ac propterea ipsis A B tertius proportionalis D inuentus est.

Sed non metiatur A ipsum C. Dico fieri non posse, vt ipsis A B tertius proportionalis inueniatur. Si enim fieri potest, inuentus sit D. ergo qui fit ex A D aequalis est ei, qui fit ex B. sed qui fit ex B est C. qui igitur fit ex A D ipsi C est equalis. ergo A ipsum D multiplicans fecit C. & ob id A ipsum C per D metitur. sed & non metiri positum est, quod est absurdum. non igitur fieri potest, vt ipsis A B tertius inueniatur proportionalis, quando A ipsum C non metitur. quod demonstrare oportebat.

PROBLEMA II. PROPOSITIONE XIX.

Tribus numeris datis considerare an quartus ipsis proportionalis inueniri possit.

Sint dati tres numeri A B C, & oporteat considerare an possit ipsis quartus proportionalis inueniri. ergo ipsi A B C vel deinceps sunt proportionales, & eorum extremi primi inter se sunt, vel non deinceps proportionales, & eorum extremi sunt primi inter se, vel proportionales quidē deinceps, non autem extremi ipsorum inter se primi, uel neque proportionales deinceps, neque eorum extremi primi inter se sunt. si quidem igitur A B C deinceps sunt proportionales, & eorum extremi A C primi inter se, iam demonstratum est fieri non posse, vt quartus ipsis proportionalis inueniatur. si vero non sunt deinceps proportionales, & extremi ipsorum sunt primi. Dico quartum proportionalem inueniri non posse. si enim inueniri potest sit D. vt igitur A ad B, ita C ad D; & vt B ad C, ita sit D ad E. ergo ex equali vt A ad C, ita C ad E: sed sunt A C primi; primi autem, & minimi; minimi vero eos, qui eandem proportionem habent, aequaliter metiuntur, antecedens antecedentem, & consequens consequentem. ergo A ipsum C metitur, antecedens antecedentem. metitur autem & se ipsum. quare A ipsos A C primos inter se existentes metitur. quod fieri non potest. ipsis igitur A B C non potest quartus proportionalis inueniri.

Rursus A B C proportionales quidem sint deinceps, non autem extremi eorum primi. Dico quartum proportionalem inueniri posse. multiplicans enim B ipsum C faciat D. itaque vel A metitur ipsum D, vel non metitur. metiatur primum per E. ergo A multiplicans E fecit D. sed & B multiplicans C ipsum D fecit. qui igitur fit ex A E est equalis ei, qui ex B C; propterea; vt A. ad B, ita est C ad E. ipsis igitur A B C quartus proportionalis E inuentus est.

17. huius.

23. septimi.

11. septimi.

9. cor. not.

19. septimi.

Sed

Sed non metiatur A ipsum D. Dico fieri non posse, ut ipsi ABC inueniatur quartus proportionalis. si enim inueniri potest, inueniatur, sitq; E. ergo qui fit ex AE est aequalis ei, qui ex BC. sed qui fit ex BC est D. quare qui fit ex AE ipsi D est aequalis: & ob id A ipsum E multiplicans fecit D. metitur igitur A ipsum D per E. quare A ipsum D metitur. sed & non metitur. quod est absurdum. non igitur fieri potest, ut ipsi ABC inueniatur quartus proportionalis, quando A ipsum D non metitur.

Sed non sint neque deinceps proportionales ABC, neque AC inter se primi, & B ipsum C multiplicans faciat D. similiter demonstrabimus, si A ipsum D metiatur, inueniri posse quartum proportionalem. sin minus, inueniri non posse. quod demonstrandum fuerat.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XX.

Primi numeri plures sunt, omni proposita multitudine primorum numerorum.

Sint propositi primi numeri ABC. Dico ipsi ABC plures esse primos numeros. sumatur enim minimus, quem ipsi ABC metiantur, sitq; DE: & ipsi DE apponatur unitas DF. ergo EF vel primus est, vel non. sit primum primus. Inuenti igitur sunt primi numeri ABC EF plures, quam ipsi ABC. sed non sit EF primus. ergo eum primus aliquis metitur, metiatur G. Dico C nulli ipsorum ABC eundem esse. si enim G idem sit, qui vnus ipsorum ABC, ipsi autem ABC metiantur DE: & G ipsum DE metietur. metitur autem & EF. & reliquam igitur DF unitatem metietur numerus existens. quod est absurdum. ergo G non est idem, qui vnus ipsorum ABC, & ponitur primus. Inuenti igitur sunt primi numeri ABC G plures proposita multitudine primorum numerorum ABC. quod oportebat demonstrare.

SCHOLIUM.

In hoc theoremate vult ostendere infinitos esse numeros primos; si enim omni proposita numerorum multitudine primi plures sint, infinitos esse primos manifestum est. si autem hoc, videtur obsistere philosophorum dogmati, qui asserunt prima determinata esse, & numero mirora.

E VCLID. ELEMENT.

quid igitur dicemus 2 primos numeros non esse principium numerorum, sed unitatem ipsam, quæ & contracta est & sola. quare & in numeris hoc seruatur, principium non esse infinitum, sed determinatum.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XXI.

Si pares numeri quotcumque componantur, totus par erit.

Componantur enim pares numeri quotcumque AB BC CD DE. Dico totum AE $A \dots F \dots G \dots H \dots K \dots E$ parem esse. Quoniam enim vnusquisque ipforum AB BC CD DE par est, habet par tem dimidiam. quare & totus AE partem dimidiam habebit. par autem numerus est, qui bifariam diuiditur. ergo AE par est. quod demonstrare oportebat.

6. diffi.

F. C. COMMENTARIUS.

* Quare & totus AE partem dimidiam habebit.]

Quoniam enim vnusquisque eorum habet dimidiam, sit ipsius AB dimidia AF, & ipsius BC dimidia BG, & ipsius CD dimidia CH, denique ipsius DE dimidia DK. ut igitur AB ad eius dimidiam AF, ita & vnusquisque reliquorum ad eius dimidiam. quare ut AB ad AF, ita & omnes AE ad omnes AF BG CH DK. sed AF dimidia est ipsius AE. ergo & AF BG CH DK sunt dimidia totius AE. cum igitur AE dimidiam habeat bifariam diuidetur. ideoq; etiam par erit.

12. septimi.

THEOREMA XX. PROPOSITIO XXII.

Si impares numeri quotcumque componantur, multitudo autem ipforum sit par; totus par erit.

Componantur enim impares numeri quotcumque multitudo pares AB BC CD DE. Dico totum AE parem esse. Quoniam enim vnusquisque ipforum AB BC CD DE impar est, detracta ab vno quoque vnitate, erit vnusquisque reliquorum par. quare & compositus ex ipsis par erit. est autem par & vnitatum multitudo. & totus igitur AE par est. quod oportebat demonstrare.

Ex antecedente.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO. XXIII.

Si impares numeri quotcumque componantur, & multitudo ipforum sit impar, & totus impar erit.

Componantur enim impares numeri quotcumque, quorum multitudo sit impar AB BC CD. Dico & totum AD imparem esse. auferatur ab ipso CD vnitas DE. reliquis igitur AE par est. est autem & AC par. ergo & totus AE par erit. atque est DE vnitas. impar igitur AD. quod oportebat demonstrare.

21. huius.

F. C. COMMENTARIUS.

7. diffi.

Atque est DE vnitas. impar igitur est AD] impar enim numerus est, qui a pari vnitate differt.

THEO-

THEOREMA XXII. PROPOSITIO. XXIII.

Si à pari numero par auferatur, & reliquus par erit.

A pari enim numero AB par auferatur BC. Dico & reliquum CA parem esse. Quoniam enim AB par est, habet partem dimidiam. Eadem ratione & B C. quare & reliquus AC partem habet dimidiam. par igitur est AC. quod oportebat demonstrare. $A \dots C \dots B$ *

F. C. COMMENTARIUS.

Quare & reliquus AC partem habet dimidiam] Sit ipsius ab dimidia BD, & ipsius CB dimidia BE, erit AB ad BD, ut CB ad BE. & permutando AB ad B C, ut DB ad BE. & diuidendo AC ad C B, ut DE ad EB. rursusq; permutando AC ad DE, ut CB ad BE. sed BE est dimidia ipsius CB. ergo & D E ipsius AC dimidia erit. cum igitur AC partē habeat dimidiam bifariā diuiditur, ac propterea par est. quod demonstrandū proponebatur. $A \dots D \dots C \dots E \dots B$ *

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXV.

Si pari numero impar auferatur, & reliquus impar erit.

A pari enim numero AB impar BC auferatur. Dico & reliquum CA imparem esse. auferatur ab ipso BC vnitas CD. ergo DB par est. est autem par & AB. & reliquus igitur AD $A \dots C \dots D \dots B$ Ex antecedente.

THEOREMA. XXIII. PROPOSITIO XXVI.

Si ab impari numero impar auferatur, & reliquus par erit.

Ab impari enim numero AB impar BC auferatur. Dico reliquum CA parem esse. Quoniam enim AB impar est, auferatur vnitas BD. reliquus igitur AD est par. Eadem ratione & C $A \dots C \dots D \dots B$ 24. huius.

THEOREMA XXV. PROPOSITIO. XXVII.

Si ab impari numero par auferatur, reliquus impar erit.

Ab impari enim numero AB par auferatur BC. Dico reliquum CA imparem esse. auferatur enim vnitas AD. ergo DB par est. est autem par & BC. & reliquus igitur CD est par. atque est D A vnitas. ergo C A impar est. quod oportebat demonstrare. $A \dots D \dots C \dots B$ 24. huius.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO. XXVIII.

Si impar numerus parem multiplicans faciat aliquem, factus par erit.

Impar enim numerus A parem numerum B multiplicans faciat C. Dico C parem esse. Quoniam enim A multiplicans B ipsum C fecit, componitur C ex tot numeris æqualibus ipsi B, quot vnitates sunt in A. atque est B par. ergo C ex paribus numeris componitur. si autem pares numeri quocumque componentur totus par erit. ergo C est par. quod demonstrare oportebat. $A \dots B \dots C$ 21. huius.

THEO-

E V C L I D . E L E M E N T .
THEOREMA XXVII. PROPOSITIO XXIX.

Si impar numerus imparem numerum multiplicans faciat aliquem, factus impar erit.

Impar enim numerus A numerum imparem B multiplicans faciat C. Dico C imparem esse. Quoniam enim A multiplicans B ipsum C fecit, componitur C ex tot numeris æqualibus ipsi B, quot sunt in A unitates, atque est uterque ipsorum A B impar. ergo C ex imparibus numeris componitur, quorum multitudo est impar. qui autem componitur ex imparibus numeris, quorum multitudo impar, & ipse impar erit. ergo C est impar. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO. XXX

Si impar numerus parem numerum metiatur, & dimidium eius metietur.

Impar enim numerus A parem numerum B metiatur. Dico & dimidium eius metiri. Quoniam enim A metitur B, metiatur ipsum per C. Dico C non esse imparem, nam si fieri potest, sit impar. & quoniam A ipsum B metitur per C, A multiplicans ipsum C fecit B. ergo B componitur ex imparibus numeris, quorum multitudo est impar; ac propterea impar est. quod est absurdum. par enim ponitur. non igitur C est impar. ergo par, quare A ipsum B pariter metitur. & ob id eius quoque dimidium metitur. quod oportebat demonstrare.

S C H O L I V M .

Et ob id eius quoque dimidium metitur] quoniam enim A ipsum B metitur per C, & C ipsum B per A metitur. habet autem uterque ipsorum CB partem dimidiam. quare ut C ad B, ita erit dimidium ad dimidium. sed C metitur ipsum B per A. ergo & ipsius C dimidium dimidium ipsum B per A metietur; ideoq. A multiplicans ipsum C dimidium, dimidium ipsum B fecit. quare A ipsum B dimidium per dimidium ipsum C metitur.

THEOREMA XXIX. PROPOSITIO. XXXI.

Si impar numerus ad aliquem numerum sit primus, & ad ipsum duplus primus erit.

Impar enim numerus A ad aliquem numerum B sit primus, & sit C ipsius B duplus. Dico A etiam ad C primum esse. si enim non sint A C primi, eos aliquis numerus metietur. metiatur, sitq. D; & est A impar. impar igitur est & D. & quoniam D impar existens metitur ipsum C, atque est C par; & D ipsius C dimidium metietur. sed ipsius C dimidium est B. ergo D ipsum B metitur, metitur autem & ipsum A. quare D ipsos AB metitur, primos inter se existentes. quod fieri non potest. non igitur A ad C primus non est. ergo AC inter se primi sunt. quod oportebat demonstrare.

S C H O L I V M .

E est A impar. impar igitur est & D] quoniam cum A impar est, metitur autem ipsum numerus D, ut posuit est & D seipsum metitur, erit D impar. numeros enim impares impar numerus metitur.

THEO.

THEOREMA XXX. PROPOSITIO XXXII.

Numerorum à binario duplatorum vnusquisque pariter par est tantum.

A binario enim A duplentur quotlibet numeri BCD. Dico BCD pariter pares esse tantum. at vero vnumquem ipforum BCD pariter parem esse, manifesto constat. à binario namque duplatus est. Dico & tantum. exponatur enim vnitas E. Quoniã igitur ab vnitate quotlibet numeri deinceps proportionales sunt, & post vnitatem A primus est; maximum ipforum numerorum ABCD, videlicet D, nullus alius metietur præter ipsos ABC. atque est vnusquisque ipforum ABC par. ergo D pariter par est tantum. similiter demonstrabimus & vnumquemque ipforum ABC pariter parẽ esse tantum. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO XXXIII.

Si numerus dimidium habeat imparem, pariter impar est tantum.

Numerus enim A dimidium imparem habeat. Dico A pariter imparem esse tantum. at vero pariter imparem esse perspicuum est. dimidium enim ipsius impar existens ipsum pariter metitur. Dico & tantum. nam si A sit etiam pariter par, dimidium ipsius par erit; atque cum par numerus per parẽ numerũ metietur. ergo dimidium ipsius par tantum. impar existens. quod est absurdum. quare A pariter impar est tantum.

THEOREMA XXXII. PROPOSITIO XXXIII.

Si par numerus neque sit à binario duplatus, neque dimidium imparem habeat; pariter par est, & pariter impar.

Numerus enim A neque sit A binario duplatus, neque dimidium imparem habeat. Dico A & pariter parem, & pariter imparem esse. at vero A pariter esse parem, manifestum est; dimidium enim imparem non habet. Dico etiam pariter imparem esse. nam si A bifariã fecimus, & dimidium ipsius bifariam, & hoc semper faciamus, tandem incidemus in aliquem imparem, qui ipsum A per numerum parem metietur. si enim non, incidemus in binarium, atque erit A à binario duplatus. quod non ponitur. quare A & pariter impar est. ostensum autem est & pariter esse parem. est igitur A & pariter par, & pariter impar. quod demonstrare oportebat.

A 24

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XXXV.

Si sint quotcumque numeri deinceps proportionales: auferantur autem à secundo, & ultimo æquales primo; erit vt secundi excessus ad primum, ita ultimi excessus ad omnes ipsum antecedens.

Sint

 

• 11110.5.3

Y nitas

multitudine super, antiquis ceterisq[ue] illis, quibus regna regum?

1. The first step is to identify the problem or question that needs to be answered. This involves understanding the context and the specific requirements of the task.

india the south indian and the north indian

124

248

468 426

1. The first step is to identify the problem or question that needs to be answered. This involves understanding the context and the specific requirements of the task.

 

CD multitudine, tot fumantur ab ipso E in dupla analogia, qui sint E. HK L M. ergo ex equali ut A ad D, ita erit E ad M: ac propterea qui fit ex E D est equalis ei, qui ex A M. est autem qui ex E D ipse FG. quare FG est, qui fit ex A M. multiplicans igitur A ipsum M fecit FG. ergo M metitur FG per unitates, quæ sunt in A. atque est A binarius. duplus igitur est FG ipsius M. sunt autem & M L HK E deinceps dupli inter se. ergo E HK L M FG deinceps proportionales sunt in dupla analogia. auferatur à secundo HK, & ab ultimo FG ipsi primo E equalis uterque HN, FX. est igitur ut secundi numeri excessus ad primum, ita excessus ultimi ad omnes ipsum antecedentes. quare ut NK ad E, ita XG ad M L HK E. atque est NK ipsi E equalis. ergo & XG est equalis ipsis M L HK E. est aut & FX equalis ipsi E; atque E ipsis A B C D, & unitati equalis: totus igitur FG equalis est & ipsis E HK L M, & ipsis A B C D, & unitati; omnesq; ipsum FG metiuntur. Dico FG nullum alium metiri præter ipsos A B C D E HK L M, & unitatem. si enim fieri potest, metiatur aliquis numerus ipsū FG, qui fit O: sitq; O nulli ipsorum A B C D E HK L M idē. & quoties O ipsum FG metitur, tot unitates sint in P. ergo P ipsum O multiplicans fecit FG. sed & E multiplicans D ipsum FG fecit. est igitur ut E ad P, ita O ad D. & quoniam ab unitate deinceps proportionales sunt A B C D, et post unitatem A primus est, non metietur D aliquis alius numerus, præter ipsos A B C: & ponitur O nulli ipsorum A B C idem, non igitur O ipsum D metietur. ut autem O ad D, ita E ad P. ergo neque E metietur ipsum P. atque est E primus. omnis autem primus numerus ad omnem numerum, quem non metitur, primus est. quare E P primi inter se sunt. sed primi & minimi; minimi vero eos, qui eandem, quam ipsi, proportionem habent, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem, & consequens consequentē. atque est ut E ad P, ita O ad D. ergo E æqualiter metitur ipsum O, atque P ipsum D. sed D nullus alius metitur præter ipsos A B C. quare P idē est, qui vnus ipsorum A B C. fit idē, qui B. & quot sunt B C D multitudine, tot ab ipso E fumantur E HK L: suntq; E HK L in eadem proportionē, in qua B C D. ex equali igitur ut B ad D, ita est E ad L. ergo qui fit ex B L est equalis ei, qui ex D E. sed qui fit ex D E est equalis ei, qui ex P O. qui igitur fit ex P O ei, qui ex B L equalis erit. quare ut P ad B, ita est L ad O. estq; P idem qui B. ergo & L idem erit, qui O. quod fieri non potest. etenim O nulli ipsorum expositorum idem ponitur. non igitur ipsum FG metitur aliquis numerus præter ipsos A B C D E HK L M, & unitatē. atque ostensus est FG equalis ipsis A B C D E HK L M, et unitati. perfectus autem numerus est, qui suis ipsius partibus est equalis. ergo FG perfectus erit. quod oportebat demonstrare.

19. septimi.

10. com. not.

9. cōis. not.

19. septimi.

13. huius.

31. septimi.

23. septimi.

21. septimi.

19. septimi.

19. septimi.

NONI LIBRI FINIS.

Propositum est Euclidi in decimo libro tractare de commensurabilibus & incommensurabilibus magnitudinibus, & de irrationalibus, & irrationalibus. non enim eadem sunt incommensurabilia, & irrationalia: quoniam illa quidem natura sunt; irrationalia vero & rationalia positione. si enim quadrati diametrum natura incommensurabilem facit, ut eius latus, hoc non facit temere, sed ex illius rationibus, quæ in ipsa sunt. quare neque irrationale est eorum, quæ natura sunt incommensurabilia, sed incommensurabile. etenim natura ipsa hoc facit iuxta omnem mensuram, quæ cum aliquo nihil commune habet. Primum igitur de commensurabilibus, & incommensurabilibus tractat, eorum naturam exquirens: postea vero de rationalibus, & irrationalibus, non tamen omnibus: quidam enim, velut obstrictes ipsa reprehendunt: sed de maxime simplicibus speciebus, quibus compositis infinita irrationales gignuntur. Earum nonnullas etiam Apollonius litteris mandavit. Ad scientiam autem attinet, causas, principia, & simplicia considerare, non singularia, & infinita. Itaque exponit irrationalium simplices species tredecim, quæ tribus modis inveniuntur sunt, his enim aliæ simplices non inveniuntur. Horum modorum unus est iuxta analogiam, per quem Euclides invenit unam speciem eorum. alius iuxta compositionem, per quem sex species; tertius iuxta divisionem, per quem reliquas sex invenit. Venerunt autem in initio ad inquisitionem symmetriae, hoc est commensurabilitatis Pythagoræi primi, ipsam ex numerorum cognitione inveniunt, cum unitas sit omnium numerorum communis mensura, & in magnitudinibus communis mensura inveniri non possit. Huius causa est, quod omnis numerus, iuxta quolibet sectiones divisus relinquit particulam aliquam minimam, & quæ sectionem non admittit. Omnis autem magnitudo in infinitum divisa non relinquit particulam, quæ propterea quod minima sit, secari non possit. sed & illa in infinitum secta infinitas efficit particulas, quarum singule in infinitum secabuntur. & simpliciter magnitudo quatenus quidem dividitur particeps est principij infiniti, quatenus vero ad totum attinet, termini est particeps. At numerus contra quatenus dividitur termini, quatenus vero ad totum attinet, particeps est infiniti. Itaque quoniam oportet mensuras minores esse istis, quæ mensurantur; mensuratur autem omnis numerus, necesse est omnium minimam esse mensuram. quare & magnitudinum, si omnes mensura communi mensurantur, necesse est eam minimam esse. Sed in numeris quidem est communis mensura, terminatur enim, quemadmodum dictum est: in magnitudinibus vero

non item. non igitur communis quædam mensura est omnium magnitudinum. Cum hoc intelligerent pythagoræi, ut fieri potuit, in magnitudinibus mensuram inuenerunt. omnes enim, quas eadem mensura metitur, commensurabiles appellantur; eas uero, quas non metitur eadem mensura, incommensurabiles. & harum rursus, quas cumque alia quæpiam communis mensura metitur inter se commensurabiles; quas cumque vero non metitur illis incommensurabiles. & ita sumptis mensuris, omnes possunt esse commensurabiles: rationales aut omnes, & omnes irrationales esse possunt, ut ad aliquid; propterea quod commensurabile quidem & incommensurabile natura illis inest: rationale autem, & irrationale positione. Inveniuntur autem commensurabiles & incommensurabiles tripliciter iuxta tres dimensiones, nimirum lineæ, superficies, & solida, ut Theon demonstravit & alij non nulli. At vero magnitudinem in infinitum diuidi posse, hoc theoremate ostenderunt.

Sumentes enim triangulum æquilaterum, basim bifariam secant: & uni portioni æqualem abscondentes in altero latere, per punctum diuisionis ad basim partes parallelam ducunt: & rursus æquilaterum constitutum est triangulum. cuius basim eodem modo secantes similiter faciunt, & nunquam desinunt ad trianguli uerticem. si enim desinerent, sequeretur æquilateri trianguli duo latera re liquo equalia esse, quod est absurdum.

Quod autem horum utilis, nec superuacanea sit cognitio, vel ex veteri pythagoræorum sermone colligi potest, fabulantur enim eum, qui primus hanc irrationalium contemplationem in apertum tamquam ex adyto proferre est ausus, naufragio perisse. idque ea factum de causa, quod omne irrationale, atque informe ubique occultari uelit. Aiunt præterea, si quis forte alicui horum occurrerit, atque illud publicarit, fore statim, ut in generationis, hoc est profundi locum deferatur. perpetuisque illic obruatur fluctibus, tanta ueneratione hi uiri irrationalium hanc cognitionem sunt prosecuti.

E V C L I D I S E L E M E N T O R V M L I B E R D E C I M V S .

C V M S C H O L I I S A N T I Q V I S
E T C O M M E N T A R I I S .

Federici Commandini Vrbinatis.

D I F F I N I T I O N E S

I.

COMMENSVRABILES magnitudines dicuntur, quas eadem mensura metitur.

II.

Incommensurabiles autem, quarum nullam esse communem mensuram contingit.

III.

Rectę lineę potentia commensurabiles sunt, cum ea, quę ab ipsis fiunt, quadrata idem spacium metitur.

F. C. C O M M E N T A R I V S .

Rectas lineas longitudine commensurabiles seorsum non diffiniuit, quod in prima diffinitione magnitudinum commensurabilium comprehendantur; sunt enim rectę lineę longitudine commensurabiles, quas eadem mensura metitur.

IIII.

Incommensurabiles autem, cum quadratis, quę ab ipsis fiunt, nullum commune spacium esse contingit.

V.

His positis ostenditur, cuicumque rectę lineę propositę rectas lineas multitudine infinitas, & commensurabiles esse, & incommensurabiles: alias quidem longitudine & potentia; alias vero potentia solum. vocetur autem proposita recta linea, rationalis.

Et

V I.

Et huic commensurabiles siue longitudine & potentia, siue potentia solum,rationales.

V I I.

Incommensurabiles vero irrationales vocentur.

V I I I.

Et quadratū, quod à recta linea proposita fit, dicatur rationale.

I X.

Et huic commensurabilia quidem, rationalia.

X.

Incommensurabilia vero, irrationalia dicantur.

X I.

Et rectæ lineæ, quæ incommensurabilia possunt, vocentur irrationales : si quidem ea quadrata sint, ipsorum latera ; si vero alia quæpiam rectilinea, quæ ipsis æqualia quadrata describunt.

F. C. C O M M E N T A R I V S.

Sunt etiam quædam communes notiones, quibus Euclides in hoc libro utitur, nempe hæc.

C O M M U N E S N O T I O N E S.

- 1 *Qualibet magnitudo multiplicata potest omnem propositam magnitudinem eiusdem generis superare.*
- 2 *Quæcumque magnitudo metitur aliquam, metitur quoque eam, quæ illa ipsa metitur.*
- 3 *Quæcumque magnitudo metitur totam, & ablatam; etiam reliquam metietur.*
- 4 *Quæcumque magnitudo metitur duas, vel plures magnitudines, metitur quoque eam, quæ ex ipsis componitur.*

T H E O R E M A I. P R O P O S I T I O. I.

Duabus magnitudinibus inæqualibus expositis, si à maiori auferatur maius, quàm dimidium; & ab eò, quod reliquum est rursus auferatur maius, quàm dimidium; & hoc semper fiat : relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ minori magnitudine exposita minor erit.

Sint

E V C L I D . E L E M E N T .

1.com. not.

Sint duæ magnitudines inæquales AB C , quarum maior AB . Dico si ab ipsa AB auferatur maius, quàm dimidium, & ab eo, quod reliquum est, rursus auferatur maius, quàm dimidium, atque hoc semper fiat, relinqui tandem magnitudinem quandam, quæ magnitudine C minor erit. etenim C multiplicata fiet aliquando maior magnitudine AB . multiplicetur, & fit DE ipsius quidem C multiplex, maior autem, quàm AB , dividaturq; DE in partes ipsi C æquales DF FG GE . & ab ipsa AB auferatur maius, quàm dimidium BH ; ab ipsa vero AH rursus maius, quàm dimidium auferatur HK , atque hoc semper fiat, quoad diuisiones, quæ sunt in AB , multitudine æquales fiant diuisionibus, quæ in DE : sint igitur diuisiones AK KH HB diuisionibus DF FG GE multitudine æquales. & quoniam maior est DE , quàm AB , & ablatum est ab ipsa quidem DE minus, quàm dimidium EG ; ab ipsa vero AB maius, quàm dimidium BH ; erit reliquum GD reliquo HA maius. rursus quoniam maior est GD , quàm HA , & ablatum est ab ipsa quidem GD dimidium GF ; ab ipsa vero HA maius, quàm dimidium HK ; reliquum FD reliquo AK maius erit. estq; FD æqualis ipsi C . ergo C quàm AK est maior. minor igitur est AK , quàm C . Ergo ex magnitudine AB relicta est magnitudo AK exposita minori magnitudine C minor. quod demonstrare oportebat.

ALITER. Exponatur duæ magnitudines inæquales AB C , sitq; C minor, & quoniam minor est C multiplicata erit aliquando magnitudine AB maior. fiat ut FM , diuidaturq; in partes ipsi C æquales MH HG GF : & ab ipsa AB auferatur maius, quàm dimidium BE , & ab E A maius, quàm dimidium ED : atque hoc semper fiat, quoad diuisiones, quæ sunt in FM , æquales fiant diuisionibus, quæ in AB . fiant igitur ut BE ED DA . & ipsi DA vnaquæque ipsarum KL LX NX sit æqualis, atque hoc fiat, quoad diuisiones KX æquales sint diuisionibus ipsius FM . & quoniam BE maior est, quàm dimidium ipsius AB , erit BE maior, quàm EA . multo igitur maior est BE , quàm DA . sed ipsi DA æqualis est XN . ergo BE maior est, quàm XN . rursus quoniam ED maior est quàm dimidium EA , erit ED maior, quàm DA . sed ipsi DA est æqualis NL . quare ED , quàm NL est maior. tota igitur DB maior est, quàm XL . ipsi vero DA æqualis est LK . quare tota AB , quàm tota XX maior erit. sed & MF maior est, quàm BA . multo igitur MF , quàm XK est maior. & quoniam XN NL LK inter se æquales sunt; sunt autem & MH HG GF inter se æquales: atque est multitudo earum, quæ sunt in MF æqualis multitudini ipsarum, quæ in XK : erit ut KL ad FG , ita KX ad FM . maior autem est FM , quàm XK . ergo & GF quàm LK est maior. atque est FG ipsi C æqualis; & KL æqualis ipsi AD . ergo C quàm AD maior erit. quod oportebat demonstrare.

12. quinti.
14. quinti.

S C H O L I V M.

In magnitudinibus asymmetiam inesse.

Ex hoc theoremate perspicuum fit in magnitudinibus asymmetiam, hoc est incommensurabilitatem inesse. si enim exposita magnitudine minorem assumere licet, & rursus hac minorem, & semper minorem, magnitu-

magnitudines in infinitum secantur; & non in minimam mensuram determinatam, ut in numeris est unitas. si igitur non est determinata magnitudo minima, erunt quedam magnitudines incommensurabiles, quas communis aliqua magnitudo, cum indeterminata sit, non metietur.

10 H 9 2

F. C. COMMENTARIUS.

Similiter autem demonstrabitur, etiam si dimidia ablata fuerint; auferatur enim ab ipsa AB dimidium BH; & ab ipsa AH dimidium HK; idq; semper fiat, quo ad divisiones AB equales sint divisionibus ipsius D E; & quoniam DE maior est quam AB, & ab ipsa quidem D E ablatum est minus quam dimidium; ab ipsa vero AB ablatum est dimidium; erit reliquum GD maius reliquo HA, rursus quoniam GD maior est quam HA; & ab ipsa GD ablatum est dimidium GF; ab ipsa vero HA dimidium HK, reliquum FD reliquum K A maius erit, quae deinceps sunt similiter demonstrabuntur.

Sed in alia demonstratione auferatur ab ipsa AE dimidium BE, & ab EA dimidium ED; atque hoc fiat, quoad divisiones, quae sint in FM aequales sint divisionibus, quae in AB; sint autem BE ED, D A, & ipsi D A aequalis sit unaquaeque ipsarum KL LN NX; & quoniam BE est aequalis ipsi EA, & EA maior quam AD, erit BE quam D A maior, sed ipsi D A est aequalis XN, ergo BE maior est quam XN, rursus quoniam ED D A sunt aequales ipsis NL LK, tota AB quae tota XK maior erit, reliqua vero similiter demonstrabuntur.

THEOREMA II. PROPOSITIO II.

Si duabus magnitudinibus inequalibus expositis detracta semper minore de maiore, reliqua minime precedentem metiatur magnitudines incommensurabiles erunt.

Duabus enim magnitudinibus, inequalibus, expositis AB C D, quarum minor sit AB, & detracta semper minore de maiore, reliqua minime metiatur precedentem. Dico magnitudines A B C D incommensurabiles esse. si enim commensurabiles sint, eas magnitudo quaedam metietur, metiatur, si fieri potest, sitq; E; & AB quidem metiens DF relinquat se ipsa minorem CF; C F vero metiens BG relinquat se ipsa minorem AG; & hoc semper fiat, quoad relinquatur quaedam magnitudo, quae sit minor ipsa E. itaque fiat, & relinquatur AG ipsa E minor. Quoniam igitur E metitur AB, & AB vero metitur DF; & E ipsam DF metitur, sed & metitur tota CD, ergo & reliquam CF metietur, at CF metitur BG, quare & E ipsam BG metitur, metitur autem

& totam

EVCLID. ELEMENT.

& totam AB. & reliquam igitur AG metietur, maior minorem, quod fieri non pōt. non igitur magnitudines AB CD aliqua magnitudo metietur. ergo incommensurabiles erunt AB CD magnitudines. Si igitur duabus magnitudinibus inæqualibus expositis, detracta semper minore de maiore, reliqua minime præcedentem metiatur, incommensurabiles magnitudines erunt. quod oportebat demonstrare.

SCHOLIUM.

Magnitudines quasdam longitudine esse incommensurabiles ex hoc theoremate docemur. etenim aliquas commensurabiles esse perspicue apparet. magnitudinum autem commensurabilium maximam communem mensuram inuenire, non cuius vis est, sed hominis eruditi: cuius quidem maxima communis mensuræ inuentionem in sequenti theoremate tradit.

ALIUD SCHOLIUM.

Cum in antecedenti theoremate causam explicauerit incommensurabilitatis, in hoc signum incommensurabilium magnitudinum affert, quando scilicet incommensurabiles sunt. in sextodecimo autem theoremate ipsarum proprium exponit, ita ut & causa, & signum, & proprium habeatur. At in commensurabilibus magnitudinibus causam veluti manifestam prætermisit; exponit autem & signum, & proprium.

F. C. COMMENTARIUS.

* Et hoc semper fiat, quoad relinquatur quædā magnitudo, quæ sit minor ipsa E.] quoniam enim AB quidem metiens DF relinquit se ipsa minorem CF; CF vero metiens BG relinquit se ipsa minorem AG: erit AG minor, quam BG. ergo ex AB ablatum est maius, quam dimidium ipsius, videlicet BG. & ita semper fiet. quod cum ex AB semper auferatur maius, quam dimidium, relinquetur tandem aliqua magnitudo, quæ ipsa E minor erit.

Ex antecedente.

PROBLEMA I. PROPOSITIO. III.

Duabus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum communem mensuram inuenire.

Sint datæ duæ magnitudines commensurabiles AB CD, quarum minor AB. oportet ipsarum AB CD maximam communem mensuram inuenire. vel igitur AB metitur CD, vel non metitur. & si quidem AB metitur CD, metitur autem & se ipsam; erit AB ipsarum AB CD communis mensura: & perspicuum est maximam esse; magnitudo enim maior magnitudine AB ipsam AB non metietur. si vero AB non metitur CD, detracta semper minore de maiore, relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ præcedentem metietur; propterea quod AB CD non sint incommensurabiles. & AB quidem metiens ED relinquit se ipsa minorem EC: EC vero metiens FB relinquit se ipsa minorem AF; & AF ipsam CE metiatur. Quoniam igitur AF metitur CE; sed CE metitur FB: & AF ipsam FB metitur. metitur autem & se ipsam. & totam igitur AB metietur. sed AB metitur DE. ergo AF ipsam DE metitur. metitur au-

2. com. not.
4. com. not.

tentia

tem & CE. & tota igitur CD metietur. ergo AF ipsas AB CD metitur; ac propterea ipsarum est communis mensura. Dico & maximam esse. nisi enim ita sit, erit aliqua magnitudo maior ipsa AF, quae ipsas AB CD metietur. Itaque metiatur, & sit G. & quoniam G metitur AB, AB vero metitur ED; & G ipsam ED metitur. metitur autem & totam CD. ergo & reliquam CE metietur. sed CE metitur FB. quare G ipsam FB metitur. metitur autem & totam AB. & reliquam igitur metietur AF, maior minorem, quod fieri non potest. non igitur magnitudo quaedam maior ipsa AF magnitudines AB CD metietur. ergo AF ipsarum AB CD maxima erit communis mensura. Duabus igitur magnitudinibus commensurabilibus datis AB CD maxima ipsarum communis mensura inuenta est AF. quod facere oportebat.

s. com. met.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum est, si magnitudo duas magnitudines metiatur, & maximam ipsarum communem mensuram metiri.

SCHOLIUM.

Tamquam manifestum sit, esse magnitudines commensurabiles, aggredditur hoc theorema, & non illud prius ostendit, quemadmodum in ijs, quae incommensurabiles sunt, constat enim magnitudines omnes aliqui multiplicis, si comparentur cum ea, cuius sunt multiplices, commensurabiles esse.

F. C. COMMENTARIUS.

Ex hoc manifestum est si magnitudo duas magnitudines metiatur, & maximam ipsarum communem mensuram metiri] sequitur illud ex ultima parte demonstrationis, ut ad secundam propositionem septimi libri in maneris explicauimus.

PROBLEMA. II. PROPOSITIO IIII.

Tribus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam ipsarum communem mensuram inuenire.

Sint datae tres magnitudines commensurabiles A B C. oportet ipsarum A B C maximam communem mensuram inuenire. sumatur enim duarum A B maxima eorum mensura, quae sit D. itaque D ipsam C vel metitur, vel non metitur. metiatur primum, & quoniam D ipsam C metitur, metitur autem & AB; & ipsas A B C metietur. Quare D ipsarum A B C communis est mensura: & manifestum est maximam esse. magnitudo enim maior magnitudine D ipsas A B C non metietur, nam si fieri potest, metiatur eas magnitu-

Ex antecedente.

li do maior

do maior ipsa D, quæ sit E. Quoniâ igitur E magnitudines A B C metitur, & ipsas A B metitur, & ipsarum A B maximam communem mensuram D, maior minorem, quod fieri non potest. sed non metiatur D ipsam C. Dico primum C D commensurabiles esse. Quoniâ enim commensurabiles sunt A B C, metitur eas aliqua magnitudo, quæ scilicet & ipsas A B metitur. ergo & ipsarum A B maximam communem mensuram D. metitur autem & ipsam C. quare dicta magnitudo ipsas C D metitur: ideoque C D commensurabiles sunt. sumatur ipsarum maxima communis mensura; & sit E. Quoniâ igitur E metitur D, D vero metitur A. B; & E ipsas A B metitur. metitur autem & C. ergo E ipsarum A B C communis est mensura. Dico & maximam esse. si enim fieri potest, sit aliqua magnitudo F maior ipsa E, quæ magnitudines A B C metiatur. & quoniam F metitur A B C, & ipsas A B metitur, & ipsarum A B maximam communem mensuram, quæ est D. ergo F metitur D. metitur autem & C. quare F ipsas C D metitur, & ipsarum C D maximam communem mensuram, hoc est E. ergo F ipsam E metitur, maior minorem. quod fieri non potest. non igitur magnitudo quædam maior ipsa E magnitudines A B C D metitur. ergo E ipsarum A B C maxima erit communis mensura, si D ipsam C non metiatur; si vero metiatur erit ipsa D. tribus igitur magnitudinibus commensurabilibus datis maxima ipsarum communis mensura inuenta est. quod facere oportebat.

C O R O L L A R I U M .

Ex hoc perspicue constat, si magnitudo tres metiatur magnitudines, & ipsarum maximam communem mensuram metiri. similiter & in pluribus magnitudinibus maxima communis mensura inuenietur, & corollarium procedet.

S C H O L I U M .

Quoniam incommensurabiles magnitudines consequitur proportionem non habere, quam numerus ad numerum, & eius conuersum: vult ostendere commensurabiles magnitudines consequi proportionem habere, quam numerus ad numerum, & contra. indiget autem ad hoc lemmate, quoniam modo commensurabilium magnitudinum duarum, vel trium maxima communis mensura inueniatur. sic & in primo arithmeticonum libro fecit. postquam enim ostendit quoniam nam sint incommensurabiles, quos primos appellat, propterea quod non omnino incommensurabiles sunt, ut magnitudines; ostendere volens omnem numerum ad omnem numerum proportionem habere vel multiplicem, vel superparticularem, vel superpartientem, vel multiplicem superparticularem

particularem, vel multiplicem superpartientem, quos ipse breuitatis causa ex minori nominauit, vel partem, vel partes per partem intelligens submultiplicem, vel subsuperparticularem, vel submultiplicem superparticularem. per partes vero subsuperpartientem, vel submultiplicem superpartientem. hoc igitur volens ostendere eo indigebat, quo modo commensurabilem maxima communis mensura inueniatur. quod etiam hoc loco obseruauit. Postea in quinto theoremate ostendet commensurabiles magnitudines inter se proportionem habere, quam numerus ad numerum. immo vero omnem commensurabilem magnitudinem omnis commensurabilis magnitudinis, minorem maioris, vel partem esse, vel partes. hoc enim est proportionem habere, quam numerus ad numerum, non tamen contra: latius enim patet numerus, quamobrem eo usus est. Sciendum autem & ipsas demonstrationes, quae ex arithmetiis petuntur, incommutabiles esse.

THEOREMA III. PROPOSITIO. V.

Postquam docuit, quae sint magnitudines incommensurabiles, deinceps quid ipsas consequatur ostendet, & insuper quid consequatur commensurabiles in quinto, & sexto theoremate. & quoniam indigebat communi mensura earum, quae sunt in symmetria, videlicet commensurabilem, hoc assumit in tertio, & quarto theorema e, quo pacto inueniende sint commensurabilium communes mensurae. septimum autem theorema inquit, quae consequantur incommensurabiles magnitudines non simpliciter, sed secundum speciem, ut incommensurabiles longitudine, vel potentia, nam de incommensurabilibus secundum priuationem nihil dixit, ut pote, quae non sint ipsis utiles ad tractationem de irrationalibus. In his tradit ortum earum, quae longitudine, & potentia commensurabiles sunt, & incommensurabiles: his enim indiget in nono theoremaoe, & sequentibus, in quibus iuxta analogiam, & iuxta compositionem, & diuisionem commensurabilitas, & incommensurabilitas inquiritur vsque ad tertium decimum theorema.

THEOREMA III. PROPOSITIO. V.

Commensurabiles magnitudines inter se proportionem habent, quam numerus ad numerum.

Sint commensurabiles magnitudines A B. Dico magnitudinem A ad B proportionem habere, quam numerus ad numerum. Quoniam enim A B commensurabiles sunt, metietur ipsas aliqua magnitudo. metiatur, & sit C. & quoties C ipsam A metitur, tot vnitates sint in D: quoties autem C metitur B, tot vnitates sint in E.

II 2 quoniam

quoniam igitur C ipsam A metitur per unitates, quæ sunt in D: metitur autem & unitas D per unitates, quæ in ipso sunt; unitas æqualiter metietur numerum D, atque magnitudo C ipsam A. ergo ut C ad A, ita est unitas ad D: & convertendo ut A ad C, ita D ad unitatem. Rursus quoniam C ipsam B metitur per unitates, quæ sunt in E; metitur; unitas numerum E per unitates, quæ in ipso sunt; unitas æqualiter metietur, atque C ipsam B. est igitur ut C ad B, ita unitas ad E. ostensum autem est & ut A ad C, ita D esse ad unitatem. quare ex equalitate A ad B, ita numerus D ad E. numerum commensurabiles igitur magnitudines A B inter se proportionem habent, quam D numerus ad numerum E. quod oportebat demonstrare.

S C H O L I U M .

Hoc proprium est commensurabilium magnitudinum, minor maioris vel pars est, vel partes. si quidem igitur pars, vel proportionem habebit, quam unitas ad numerum, vel quam numerus ad numerum; si vero partes proportionem habebit, quam numerus ad numerum. pars enim submultiplicem facit proportionem: partes vero unam reliquarum subproportionalium. si igitur rectæ lineæ sint, & plana, quæ ab ipsis sunt, & solida proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. si vero plana, & quæ ab ipsis solida, non item rectæ lineæ, nisi proportio numerorum sit quadrati ad quadratum. & si solida non omnino quæ ipsa præcedunt, nisi proportio sit cubi ad cubum. quod si solida non habeant proportionem, quam numerus ad numerum, neque plana, neque rectæ lineæ habebunt: non enim sunt commensurabiles. In hoc autem theoremate & sequenti de commensurabilibus, & incommensurabilibus simpliciter differit; at in septimo de incommensurabilibus longitudine. ex quo manifestum est & de potentia incommensurabilibus. In octavo denique ortum tradit commensurabilium, & in commensurabilium longitudine & potentia.

F . C . C O M M E N T A R I U S .

Ex iam demonstratis possumus illud quoque problema absolute.

Propositis duabus magnitudinibus commensurabilibus, quam inter se proportionem habeant in numeris inuenire.

Sint propositæ magnitudines commensurabiles A B. quarum oporteat proportionem in numeris inuenire. inueniatur ex 3 huius maxima earum communis mensura, quæ sit C. & quoties C metitur A, tot unitates sint in D: quoties autem metitur ipsum B, tot unitates sint in E. habebit igitur A ad B proportionem eam, quæ habet numerus D ad E numerum. itaque si A B rectæ lineæ sint, & earum quadrata erunt commensurabilia, & inter se proportionem habebunt, quam

numerus

numerus quadratus ad quadratum numerum. si vero sint superficies, vel numeri D E sunt quadrati, vel non quadrati; & si non sunt quadrati, vel proportionem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, vel non. & si quidem sunt quadrati, vel proportionem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, rectae lineae, quae ipsas superficies, vel superficies ipsas aequales possint, erunt longitudine commensurabiles. si vero numeri non habent proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, erunt longitudine incommensurabiles, quamquam potentia commensurabiles sint. quae omnia in nona propositione huius libri demonstrabuntur.

THEOREMA. III. PROPOSITIO. VI.

Si duae magnitudines inter se proportionem habeant, quam numerus ad numerum, commensurabiles magnitudines erunt.

Duae enim magnitudines A B inter se proportionem habeant, quam D numerus ad numerum E. Dico A B magnitudines commensurabiles esse. quot enim unitates sunt in D, in tot partes aequales dividatur magnitudo A, & uni ipsarum aequalis sit C: quot autem unitates sunt in E, ex tot magnitudinibus aequalibus ipsi C componatur magnitudo F. Quoniam igitur quot sunt in D unitates, tot magnitudines sunt in A, ipsi C aequales; quae pars est unitas ipsius D, eadem pars erit & C ipsius A, ut igitur C ad A, ita est unitas ad D. metietur autem unitas ipsum D numerum, ergo & C ipsam A metietur, & quoniam est ut C ad A, ita unitas ad D numerum, erit conuertendo ut A ad C, ita D numerus ad unitatem. rursus quoniam quot unitates sunt in E, tot sunt & in F magnitudines ipsi C aequales; ut C ad F, ita erit unitas ad E numerum. ostensum autem est & ut A ad C, ita D esse ad unitatem, ergo ex aequali ut A ad F, ita est D ad E. sed ut D ad E, ita A ad B. & ut igitur A ad B, ita A ad F. quod cum A ad utramque ipsarum B F eandem habeat proportionem, erit B ipsi F equalis, metietur autem C ipsam F. ergo & ipsam B metietur. sed & metitur A. quare C ipsas A B metietur. commensurabilis igitur est A ipsi B. Quare si duae magnitudines inter se proportionem habeant, quam numerus ad numerum, commensurabiles magnitudines erunt, quod oportebat demonstrare.

A L I T E R.

Duae enim magnitudines A B inter se proportionem habeant, quam numerus C ad numerum D. Dico magnitudines commensurabiles esse. quot enim unitates sunt in C, in tot partes aequales A dividatur, & uni ipsarum aequalis sit E. est igitur ut unitas ad C numerum, ita E ad A. est autem & ut C ad D, ita A ad B. ergo ex aequali

æquali ut unitas ad D numerum, ita E ad B. sed unitas metitur D. ergo & E ipsam B metitur. metitur autem & E ipsam A, quoniam & unitas metitur C. quare E utramque ipsarum A & B metietur; ideoque A & B commensurabiles sunt; atque est E communis ipsarum mensura.

C O R O L L A R I U M.

Ex hoc manifestum est, si sint duo numeri, ut D, E, & recta linea ut A, fieri posse, ut D numerus ad numerum E, ita rectam lineam A ad aliam rectam lineam. si autem ipsarum A & B media proportionalis sumatur, ut B, erit ut A ad B, ita quod fit ex A ad id, quod ex B, hoc est ut prima ad tertiam, ita figura, quæ fit à prima ad eam, quæ à secunda similem, & similiter descriptam. sed ut A ad B, ita D numerus ad numerum E. factum igitur est & ut D numerus ad numerum E, ita quod fit ex recta linea A ad id, quod ex recta linea B.

Col. 10. textu

S C H O L I U M.

Si quadrata vel parallelogramma, vel quæcunque spacia proportionem habeant, quam numerus ad numerum, commensurabiles erunt magnitudines: quando autem proportionem habeant, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, & ipsæ commensurabiles sunt, & rectæ lineæ, quæ ipsas possunt, longitudine sunt commensurabiles. vel quando rectæ lineæ inter se proportionem habeant, quam numerus ad numerum, & ipsæ commensurabiles sunt longitudine, & quæ ab ipsis sunt quadrata, vel spacia quadratis ipsarum equalia proportionem habere coguntur, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. ad plura igitur se extendunt potentia commensurabiles, quam commensurabiles longitudine, & continentiores sunt, ut ex sequentibus theorematibus fiet manifestum.

THEOREMA V. PROPOSITIO. VII.

Incommensurabiles magnitudines inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerum.

Sint

Sint incommensurabiles magnitudines A B. Dico A ad B proportionem non habere, quam numerus ad numerum. si enim A ad B proportionem habet, quam numerus ad numerum, commensurabilis erit A ipsi B. atqui non est commensurabilis. nõ igitur A ad B proportionem habet, quam numerus ad numerum. quare incommensurabiles magnitudines inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerum. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA VI. PROPOSITIO. VIII.

Si duæ magnitudines inter se proportionem non habeant, quâ numerus ad numerum, incommensurabiles erunt.

Duæ enim magnitudines A B inter se proportionem non habeant, quam numerus ad numerum. Dico magnitudines A B incommensurabiles esse. si enim commensurabilis est A ipsi B, proportionem habet, quam numerus ad numerum. atqui non habet. incommensurabiles igitur sunt A B magnitudines. ergo si duæ magnitudines inter se proportionem non habeant, quam numerus ad numerum, incommensurabiles erunt. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA VII. PROPOSITIO. IX.

Quæ à rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata inter se proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. & quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, & latera habebunt longitudine commensurabilia. quadrata vero, quæ à longitudine incommensurabilibus rectis lineis fiunt, inter se proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: & quadrata inter se proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque latera habebunt longitudine commensurabilia.

Sint rectæ lineæ A B longitudine commensurabiles. Dico quadratum quod fit ex A ad quadratum, quod ex B, eam proportionem habere, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Quoniam enim A ipsi B longitudine est commensurabilis, habebit A ad B proportionem, quam numerus ad numerum. habeat eam, quam numerus C ad numerum D. Quoniam igitur est ut A ad B, ita C numerus ad numerum D; & proportionis quidem, quam habet A ad B, dupla est proportio quadrati, quod fit ex A ad quadratum, quod ex B; similes enim figurae in dupla sunt proportionem homologorum laterum: proportionis vero, quâ habet numerus C ad numerum D dupla est proportio quadrati ipsius C ad ipsius D quadratum; etenim duorum numerorum quadratorum unus medius proportionalis est numerus, & quadratus ad quadratum duplam proportionem habet eius, quam latus habet ad latus: erit ut quadratum, quod fit ex A ad quadratum, quod

A

C

B

D . . .

s. huius.

Coroll. 10.
sexti.

11. octant.

quod ex B, ita quadratus numerus, qui fit ex C numero ad quadratum numerum qui ex D.

A L I T E R .

Quoniam enim cōmensurabilis est A ipsi B longitudine, proportionē hēt quā numerus ad numerū. habeat quā C ad D. & C se ipsum quidē multiplicans faciat E, multiplicans vero D faciat F: & D se ipsum multiplicans faciat G. itaque quoniam C se ipsum quidem multiplicans fecit E, multiplicans vero D fecit F; erit vt C ad D, hoc est vt A ad B, ita E ad F. sed vt A ad B, ita quadratum, quod fit ex A ad rectangulum, quod fit ex A B. est igitur vt quadratum, quod ex A ad rectangulū, quod ex A B, ita E ad F. rursus quoniam D se ipsum multiplicans fecit G, vt C ad D, hoc est vt A ad B, ita erit F ad G. vt autem A ad B, ita rectangulū, quod fit ex A B ad quadratū, quod fit ex B. ergo vt rectangulum, quod ex A B ad quadratum, quod ex B, ita F ad G. sed vt quadratum, quod fit ex A ad rectangulum, quod ex A B, ita erat E ad F. ex aequali igitur ut quadratum ex A ad quadratum ex B, ita E ad G. est autem vterque ipsorum E G quadratus. & E quidem est à numero C; G vero ab ipso D. quadratum igitur, quod fit ex A ad quadratum, quod ex B proportionem habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Sed fit vt quadratum, quod fit ex A ad quadratū, quod ex B, ita quadratus numerus, qui est à numero C ad quadratum numerum, qui à numero D. Dico A ipsi B longitudine commensurabilem esse. Quoniam enim est vt quadratum, quod fit ex A ad quadratum, quod ex B, ita quadratus numerus, qui est à numero C ad quadratum numerum, qui à numero D. sed proportio quidem quadrati, quod fit ex A ad quadratum, quod ex B, dupla est proportionis, quā hēt A ad B. proportio vero quadrati numeri, qui est à numero C ad quadratū numerū, quā à numero D. itidē dupla est proportionis, quā hēt C numerus ad numerum D. est igitur vt A ad B, ita C ad D. ergo A ad B proportionem habet, quam numerus C ad D numerum: ac propterea A ipsi B longitudine est commensurabilis. quod oportebat demonstrare.

i. sexti.

i. sexti.

Coroll. 20.
sexti.
ii. octau.

6. huius.

A L I T E R .

Sed quadratū, quod fit ex A, ad quadratum, quod ex B proportionem habeat, quam quadratus numerus E ad quadratum numerum G. Dico A ipsi B longitudinem commensurabilem esse. fit enim ipsius quidem E latus C; ipsius vero G latus D; & C ipsum D multiplicans faciat F. ergo E F G deinceps proportionales sūt in proportione, quā est C ad D. & quoniam quadratorum, quæ sunt ex A B, medium proportionale est rectangulum, quod ex A B: numerorum vero quadratorum E G medium proportionale est F, erit vt quadratum

17. septimi.

17. septimi.

dratum, quod fit ex A, ad rectangulum, quod ex A B, ita E ad F. *vt autem rectangulum ex A B ad quadratum ex B, ita F ad G: sed vt quadratum ex A ad rectangulum ex A B, ita A ad B. ergo A B commensurabiles sunt; proportionem enim habent, quam numerus E ad numerum F, hoc est quam C ad D. vt enim C ad D, ita E ad F: nam C se ipsum quidem multiplicans fecit E, multiplicans autem D ipsum F fecit.* 17. septimi.
est igitur vt C ad D, ita E ad F.

Sed incommensurabilis fit A ipsi B longitudine. Dico quadratum ex A ad quadratum ex B proportionem non habere, quā quadratus numerus ad quadratum numerum. si enim quadratum ex A ad quadratum ex B proportionem habere, quā quadratus numerus ad quadratum numerum, commensurabilis erit A ipsi B longitudine. non est autem. non igitur quadratum ex A ad quadratum ex B proportionem habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Rursus quadratum ex A ad quadratum ex B proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Dico A ipsi B longitudine incommensurabilem esse. si enim commensurabilis sit A ipsi B longitudine, habebit quadratum ex A ad quadratum ex B proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. atqui non habet. non igitur A ipsi B longitudine est commensurabilis. ergo quæ à rectis lineis longitudine commensurabilibus sunt quadrata inter se proportionem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, & quæ deinceps sunt. quod oportebat demonstrare.

C O R O L L A R I V M.

Et manifestum est ex iam demonstratis rectas lineas, quæ longitudine sunt commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles esse: quæ vero potentia commensurabiles, non omnino & longitudine. & quæ longitudine incommensurabiles sunt, non omnino & potentia incommensurabiles: quæ vero potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles esse.

Quoniam enim quadrata, quæ sunt à rectis lineis longitudine commensurabilibus proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; quæ vero proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, commensurabilia sunt: erunt rectæ lineæ commensurabiles longitudine, non solum longitudine, sed & potentia commensurabiles. 6. huius.

Rursus quoniam quæcunque quadrata inter se proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, latera habent longitudine commensurabilia, vt ostensum est, quæ etiam potentia commensurabilia sunt, cum eorum quadrata proportionem habeant, quā quadratus numerus ad quadratum numerum: quæcunque quadrata proportionem non habent, quā quadratus numerus ad quadratum numerum, sed simpliciter quā aliquis alius numerus ad alium numerum, commensurabilia sunt, hoc est rectæ lineæ à quibus ipsæ describuntur, commensurabiles sunt potentia, non autem & longitudine. ergo rectæ lineæ longitudine quidem commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles sunt: potentia vero commensurabiles non omnino & longitudine, nisi earum quadrata proportionem habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Dico & longitudine incommensurabiles non omnino & potentia incommensurabiles esse, quoniam potentia commensurabiles possunt proportionem non habere, quam numerus ad numerum, ideoque cum potentia commensurabiles sint, longitudine sunt incommensurabiles. ergo non quæ longitudine incommensurabiles sunt, omnino & potentia: sed longitudine incommensurabiles existentes possunt

¶ sunt potentia & incommensurabiles, & commensurabiles esse. potentia vero in commensurabiles omnino & longitudine incommensurabiles sunt. si enim longitudine sint commensurabiles, & potentia commensurabiles erunt. atqui ponuntur in commensurabiles, quod est absurdum. potentia igitur incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles erunt.

SCHOLIUM.

Hoc theorema Theateti est inuentum, cuius mentionem facit Plato in Theateto. sed illic quidem particulatim magis exponitur, hic autem vniuerse. namque illic quadrata, quæ à quadratis numeris mensurantur, commensurabilia etiam latera habere dicit. particularis autem est hæc propositio: neque enim omnia commensurabilia spacia, quorum latera commensurabilia sunt, comprehendit; si quidem quadratorum spaciorum commensurabilium, videlicet 18 & 8 latera, & si non secundum mensuram numerorum inueniantur, aliter tamen commensurabilia sunt. at ipsa spacia à quadratis numeris minime mensurantur, quamquam etiam mensurari possint. merito igitur hoc loco non horum modum diffiniuit, sed quæ (ut inquit) proportionem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. & non frustra quadrati numeri mentio facta est. si enim tantum dixisset, quam numerus ad numerum, redundans esset diffinitio, quoniam quadrata, quæ inter se duplam proportionem habent, commensurabilia habere latera oporteret. non habent autem, est enim maioris latus ad latus minoris, ut quadrati diameter ad eius latus. si igitur ita dixisset, quam numerus ad numerum, redundaret diffinitio, comprehendens etiam ea, quæ latera commensurabilia non habent. Si vero dixisset, quæ à quadratis numeris mensurantur, diffinitio diminuta esset, non comprehendens ea, quæ cum latera commensurabilia habeant, à quadratis numeris non mensurantur: & proportionem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Quamobrem recte appositum est, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; comprehenduntur enim omnia spacia, quæ & si à quadratis numeris non mensurantur, tamen cum sint commensurabilia, latera quoque commensurabilia habent. nam 18 & 8 commensurabilibus existentibus, propterea quod à lateribus commensurabilibus describuntur, inueniemus eorum latera, cum proportionem habeant, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ut enim 9 ad 4, ita 18 ad 8. Itaque sumentes latera ipsorum 9 & 4, æqualiter secabimus propositorum quadratorum latera: & habebimus commensurabilitatē. namque ut quadrata ad quadrata, ita sunt latera ad latera.

Quæ à rectis lineis longitudine commensurabilibus fuerint quadrata] intellige re- A
ctas lineas longitudine commensurabiles inter se se, non expositas rationales: hoc enim non solum
rationalibus contingit, sed & irrationalibus, ut deinceps apparebit.

Et quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad qua- B
dratum numerum, & latera habebunt longitudine commensurabilia] Per quadrata
inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum non solum
intelligenda sunt ea, quæ totidem quadratas mensuras continent, quot unitates sunt in nume-
ris quadratis: sed & quæ inter se proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratū
numeronum, sint enim duo numeri plani similes F G, & recta linea A. sitq; F 6, & G, 24 & fiat
ex corollario sextæ propositionis huius, ut

F ad G, ita A ad aliam lineam, quæ sit E.
& inter A E sumpta media proportio-
li B, erit ut prima ad tertiam, videlicet ut
A ad E, ita quadratum, quod ex prima ad
quadratum, quod ex secunda, hoc est ita
quadratum, quod ex A ad quadratum,
quod ex B, sed ut A ad E, ita erat mane-
rus F ad numerum G. ut igitur numerus
F ad G numerum, ita erit quadratum ex
A ad quadratum ex B. ideōq; quadratum
ex A continebit totidem mensuras qua-
dratas, ut exempli gratia totidem pedes
quadratos, quot unitates sunt in F, vide-
licet sex, & quadratum ex B totidem pe-
des quadratos continebit, quot unitates
sunt in G, hoc est 24. & quoniam numeri
plani similes F G inter se proportionem
habent, quam quadratus numerus ad nu-
merum quadratum; habebit etiam quadra-

Coroll. 20.
sexti.

26. octavi.

tum ex A ad quadratum ex B proportionem eam, quam quadratus numerus ad quadratum nu-
merum. habeat quam quadratus numerus, qui sit ex C ad quadratum numerum, qui sit ex D. sim-
liter demonstrabitur eorum quadratorum latera A B, quamquam certo numero exprimi non pos-
sint, tamen inter se longitudine commensurabilia esse. & idcirco proportionem habere, quam nu-
merus ad numerum. Iuniores eiusmodi latera radices quadratas, vel radices simpliciter appellat;
dicitur enim A radix 6, & B radix 24. atque est B 6 ad B 24, ut 1 ad 2. num cum quadratum
ex B quadruplum sit quadrati ex A, erit B ipsius A dupla. similes enim rectilineæ figuræ in du-
pla sunt proportionem homologorum laterum.

Coroll. 20.
sexti.

Quoniam enim quadrata, quæ sunt à rectis lineis longitudine commensurabili- C
bus] ostendit quomodo prima corollarij pars sequatur ex prima parte theorematis.

Rursus quoniam quæcunque quadrata inter se proportionem habent, quam qua- D
dratus numerus ad quadratum numerum] Rursus ostendit quomodo idem ex secunda par-
te theorematis sequatur.

Quæcunque quadrata proportionem non habent, quam quadratus numerus ad E
quadratum numerum, sed simpliciter quam aliquis alius numerus ad alium nume-
rum] Hoc ad secundam partē Corollarij attinet, & sequitur ex ultima parte theorematis.

Dico & longitudine incommensurabiles] Hoc pertinet ad tertiam partem corollarij, F
& ex tertia parte theorematis explicatur.

Potentia vero incommensurabiles omnino & longitudine incommensurabiles G
sunt] Hæc est ultima corollarij pars, quæ per deductionem ad id, quod fieri non potest ex prima
parte theorematis demonstratur.

EVCLID. ELEMENT.
THEOREMA VIII. PROPOSITIO. X.

Si quattuor magnitudines proportionales fuerint , prima vero secundæ fuerit commensurabilis ; & tertia quartę commensurabilis erit . & si prima secundę fuerit incommensurabilis , & tertia quartæ incommensurabilis erit.

Sint quattuor magnitudines proportionales. A B C D, sitq; vt A ad B , ita C ad D, & sit A ipsi B commensurabilis . Dico & C ipsi D commensurabilem esse. Quoniam enim A commensurabilis est ipsi B , habebit A ad B proportionem , quam numerus ad numerum : atque est vt A ad B, ita C ad D . ergo & C ad D proportionem habet , quam numerus ad numerum . commensurabilis igitur est C ipsi D . sed A ipsi B sit incommensurabilis . dico & C ipsi D incommensurabilem esse. Quoniam enim incommensurabilis est A ipsi B , non habebit A ad B proportionē , quam numerus ad numerum . est aut vt A ad B, ita C ad D . ergo neque C ad D proportionem habet , quam numerus ad numerum . si enim C ad D proportionem habeat , quā numerus ad numerum ; & A ad B eam , quā numerus ad numerū proportionē habebit ; atq; erit A ipsi B cōmēsurabilis . quod est absurdū ; in cōmēsurabilis enim ponitur . ergo C ad D proportionē nō hēt , quā numerus ad numerum ; ideoq; C ipsi D est incommensurabilis . Si igitur quattuor magnitudines proportionales fuerint ; prima vero secundæ fuerit commensurabilis , & tertia quartæ commensurabilis erit . & si prima secundæ fuerit incommensurabilis , & tertia quartæ incommensurabilis erit . quod oportebat demonstrare.

L E M M A. I.

26. octau. *Ostēsum est in arithmetiis numeros planos similes inter se proportionem habere , quam quadratus numerus ad quadratum numerum . & si duo numeri inter se proportionem habeant , quam quadratus numerus ad quadratum numerum , eos similes planos esse . & manifestum est ex his , dissimiles planos numeros , hoc est non habentes latera inter se proportionalia proportionem non habere , quam quadratus numerus ad quadratum numerum . si enim haberent , similes plani essent . quod non ponitur . ergo dissimiles plani inter se proportionem non habent , quam quadratus numerus ad quadratum numerum .*

L E M M A. II.

Duobus datis numeris , & recta linea , facere vt numerus ad numerum , ita quadratum rectę lineæ ad alterius rectę lineæ quadratum .

Sint dati quidem duo numeri A B ; & data recta linea C . oportet inuenire alteram rectam lineam , ita vt quadratum , quod fit ex C ad quadratum ex altera recta linea eam proportionem habeat , quam numerus primus ad secundum numerum . quot enim vnitates sunt in A , in tot partes æquales diuidatur C recta linea , & uni

vni ipsarum æqualis sit D. quot autem vnitates sunt in B, ex tot partibus ipsi D æqualibus cõponatur recta linea E. est igitur vt vnitates ad A, ita D ad C: & conuertendo vt A ad vnitatem, ita C ad D. est autem & vt vnitas ad B, ita D ad E. ergo ex æquali vt A ad B, ita recta linea C ad ipsam E. sumatur rectarum linearum C E media proportionalis F. est igitur vt C ad E, ita quadratum, quod fit ex C ad id, quod ex F quadratum, nãque vt prima ad tertiam, ita quadratum, quod fit ex prima ad quadratum, quod ex secunda simile, & similiter descriptum. sed vt C ad E, ita est A ad B. & vt igitur A ad B, ita quadratum ex C ad quadratum ex F. quare C F sunt rectę lineę, quas quærebarus. etenim F inuenta est.

Coroll. 19.
secũ.

L E M M A I I I.

Duos numeros planos dissimiles inuenire, hoc est vt inter se proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Exponantur quattuor numeri A B C D, ita vt non sit sicut A ad C, ita B ad D, & fiat ex A B numerus E, & C D numerus F. perspicuum est E F numeros planos esse, planos autem dissimiles, quoniam latera proportionalia non sunt. quod facere oportebat.

P R O B L E M A I I I.

PROPOSITIO. XI.

Propositę rectę lineę inuenire duas rectas lineas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram vero etiam potentia.

Sit proposita recta linea A. oportet ipsi A inuenire duas rectas lineas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram vero etiam potentia. exponantur enim duo numeri B C inter se proportionem non habentes, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, hoc est dissimiles plani: & fiat vt B ad C, ita quadratum ex A ad quadratum ex D: hoc enim ante traditum est. ergo quadratum ex A commensurabile est quadrato ex D. & quoniam B ad C proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratũ numerum, neque quadratum ex A ad quadratũ ex D proportionem habebit, quam quadratus numerus ad quadratũ numerum. incommensurabilis igitur est A ipsi D longitudine. sumatur ipsarum A D media proportionalis E. est igitur vt A ad D, ita quadratum ex A ad quadratum ex E. sed A ipsi D longitudine est incommensurabilis. ergo & quadratum ex A quadrato ex E incommensurabile erit. incommensurabilis

9. huius.
Coroll. 10.
secũ.

D

rabilis

E V C L I D . E L E M E N T .

rabilis igitur est A ipsi E potentia . ergo proposita recta linea rationali , à qua dicebamus mensuras sumi , vt ipsi A potentia quidem commensurabilis inuenta est D , hoc est rationalis potentia tantum commensurabilis , irrationalis vero E . irracionales enim vniuerse appellantur , quæ rationali & longitudine , & potentia incommensurabiles sunt .

F . C . C O M M E N T A R I V S .

- A Et si duo numeri inter se proportionem habeant , quam quadratus numerus ad quadratum numerum , eos similes planos esse] *Hoc ab Euclide non demonstratur in arithmeticiis , sed nos ad vigesimam sextam octauæ libri demonstrauimus .*
 B Exponantur enim duo numeri B C inter se proportionem non habentes , quæ quadratus numerus ad quadratum numerum , hoc est dissimiles plani] *Hoc in promptu est , sed tamen quomodo fiat in tertio Scholio antecedentium explicatur .*
 C Et fiat vt B ad C , ita quadratum ex A ad quadratum ex D , hoc enim ante traditum est] *In corollario scilicet sexti theorematiss . & quamquam hoc ex illo perspicue appareat , tamen secundum lemma , quod in grecis codicibus inuenitur hoc loco apponere non inutile iudicauimus .*
 D Ergo & quadratum ex A quadrato ex E incommensurabile erit] *ex antecedenti theoremate .*

T H E O R E M A I X . P R O P O S I T I O X I I .

Quæ eidem magnitudini sunt commensurabiles , & inter se commensurabiles sunt .

Vtraque enim ipsarum A B ipsi C sit commensurabilis . dico & A ipsi B commensurabilem esse . Quoniam enim A commensurabilis est ipsi C , habebit A ad C proportionem , quæ numerus ad numerum . habeat quam numerus D ad ipsum E . Rursus quoniam commensurabilis est B ipsi C , habebit C ad B proportionem , quam numerus ad numerum . habeat quam F ad G . & proportionibus datis quibuscunque , videlicet quam habet D ad E , & quam habet F ad G ; sumantur numeri deinceps proportionales in datis proportionibus H K L ; sitq; vt D ad E , ita H ad K ; vt autem F ad G , ita K ad L . Quoniam igitur est vt A ad C , ita D ad E ; sed vt D ad E , ita H ad K : erit & vt A ad C , ita H ad K . Rursus quoniam est vt B ad C , ita F ad G , & vt F ad G , ita K ad L ; erit & vt B ad C , ita K ad L . est autem & vt A ad C , ita H ad K . ex equali igitur vt A ad B , ita H ad L . ergo A ad B proportionem habet . quam numerus H ad L numerum : ac propterea A ipsi B est commensurabilis . Quæ igitur eidem magnitudini sunt commensurabiles , & inter se commensurabiles sunt . quod oportebat demonstrare .

S C H O L I V M .

Hoc ab identitate non conuertitur . non enim quæ inter se sunt commensurabiles , & eidem commensurabiles sunt ; quemadmodum neque æquales inter se eidem sunt æquales , sed contra . nam contingit & incōmensurabiles

inmensurabiles esse eidem, & commensurabiles; quod sequens theorema, & eius conuersum ostendet.

THEOREMA X. PROPOSITIO. XIII.

Si sint duæ magnitudines, & altera quidem eidem sit commensurabilis, altera vero incommensurabilis; magnitudines inter se incommensurabiles erunt.

Sint enim duæ magnitudines A B, alia autem sit C: & A quidem ipsi C commensurabilis sit; B vero eidem C incommensurabilis. Dico, & A ipsi B incommensurabilem esse. si enim commensurabilis esset B ipsi C, esset autem & A commensurabilis ipsi B; & A ipsi B commensurabilis erit: sed & incommensurabilis. quod fieri non potest. non igitur commensurabilis est B ipsi C. ergo est incommensurabilis. si igitur duæ magnitudines commensurabiles sint, altera autem ipsarum alicui magnitudini sit incommensurabilis; & reliqua eidem incommensurabilis erit. quod oportebat demonstrare.

Ex antecedente.

THEOREMA XI. PROPOSITIO. XIII.

Si duæ magnitudines commensurabiles sint, altera autem ipsarum alicui magnitudini sit incommensurabilis, & reliqua eidem incommensurabilis erit.

Sint duæ magnitudines commensurabiles A B; altera vero ipsarum A alicui magnitudini C sit incommensurabilis. Dico, & reliquam B ipsi C incommensurabilem esse. si enim commensurabilis esset B ipsi C, esset autem & A commensurabilis ipsi B; & A ipsi C commensurabilis erit: sed & incommensurabilis. quod fieri non potest. non igitur commensurabilis est B ipsi C. ergo est incommensurabilis. si igitur duæ magnitudines commensurabiles sint, altera autem ipsarum alicui magnitudini sit incommensurabilis; & reliqua eidem incommensurabilis erit. quod oportebat demonstrare.

si huius.

F. C. COMMENTARIUS.

Ex ijs, quæ proxime demonstrata sunt; licet illud etiam demonstrare.

Quæ incommensurabilibus sunt commensurabiles, & inter se incommensurabiles erunt.

Sint duæ magnitudines incommensurabiles A B; sitq; C ipsi A commensurabilis: & D commensurabilis ipsi B. Dico C D inter se incommensurabiles esse. Quoniam enim A C commensurabiles sunt, atque est A ipsi B incommensurabilis; & C ipsi B incommensurabilis erit. Rursum quoniam B D commensurabiles sunt, est autem B incommensurabilis ipsi C; & D ipsi C incommensurabilis erit. quod oportebat demonstrare.

Ex antecedente.

LEMMA

Duabus datis rectis lineis inæqualibus inuenire id, quo maior plus potest, quam minor.

Sint

1. quanti.
31. tertij.
47. primi.

Sint datae duae rectae lineae inaequales AB C , quarum maior sit AB . oportet inuenire id, quo AB plus possit, quam C . Describatur in recta linea AB semicirculus ADB , & in eo aptetur recta linea AD , ipsi C equalis, & D B iungatur, perspicuum est angulum ADB rectum esse, & ipsam AB plus posse, quam A D , hoc est quam C , quantum est recta linea DB quadratum.

Similiter autem & datis duabus rectis lineis, quae ipsas potest, hoc modo inuenietur.

47. primi.

Sint duae datae rectae lineae AD DB ; & oporteat inuenire rectam lineam, quae ipsas possit. exponantur enim AD DB , ita ut rectum angulum contineant ADB , & AB iungatur. rursus perspicuum est rectam lineam AB ipsas AD DB posse.

THEOREMA XII. PROPOSITIO. XV.

Si quattuor rectae lineae proportionales fuerint; prima vero tanto plus possit, quam secunda, quantum est quadratum rectae lineae sibi comensurabilis longitudine; & tertia ratio plus poterit, quam quarta, quantum est quadratum rectae lineae sibi longitudine comensurabilis. Quod si prima tanto plus possit, quam secunda, quantum est quadratum rectae lineae sibi incommensurabilis longitudine; & tertia, quam quarta tanto plus poterit, quantum est quadratum rectae lineae sibi longitudine incommensurabilis.

ad hoc 22

Sint quattuor rectae lineae proportionales A B C D , sitq; ut A ad B , ita C ad D ; & A quidem plus possit, quam B , quadrato, quod sit ex E ; C vero plus possit, quam D , quadrato ex F . Dico si A ipsi E sit comensurabilis, & C ipsi F comensurabilis esse. si uero A ipsi E sit incommensurabilis, & C ipsi F incommensurabilem esse. quoniam enim est ut A ad B , ita C ad D , erit ut quadratum ex A ad quadratum ex B , ita quadratum ex C ad id, quod ex D quadratum. sed quadrato quidem, quod sit ex A equalia sunt quadrata, quae ex ipsis E B ; quadrato autem ex C equalia sunt quadrata ex F D . ut igitur quadrata, quae ex E B ad quadratum ex B , ita quadrata, quae ex F D ad quadratum ex D ; & diuidendo ut quadratum ex B , ita quadratum ex F ad quadratum ex D . quare ut E ad B , ita est F ad D ; & conuertendo ut B ad E , ita D ad F . est autem & ut A ad B , ita C ad D . ex aequali igitur ut A ad E , ita est C ad F . ergo si A est comensurabilis ipsi E , & C ipsi F erit comensurabilis; si uero incommensurabilis est A ipsi E , & C ipsi F incommensurabilis erit. Si igitur quattuor rectae lineae proportionales sint, & reliqua, quod oportebat demonstrare.

22. sexti.

22. sexti.

10. huius.

PROBLEMA XIII. PROPOSITIO. XVI.

Si duae magnitudines comensurabiles componentur, & tota magnitudo

totus

magnitudo vtrique ipfarum cōmenfurabilis erit. quòd si tota magnitudo uni ipfarum fit commenfurabilis, & quæ à principio magnitudines commenfurabiles erunt.

Componantur enim duæ magnitudines commenfurabiles AB BC . Dico & totam magnitudinem AC vtrique ipfarum AB BC commenfurabilem esse. Quoniam enīnt commenfurabiles sunt AB BC , metietur eas aliqua magnitudo. metiatur, sitq; D . & quoniam D metitur ipsas AB BC , & totam AC metietur: metitur autem & AB BC . Ergo D magnitudines AB BC , & ipsam AC metitur. commenfurabilis igitur est AC vtrique ipfarum AB BC . Sed AC vni ipfarum AB BC fit commenfurabilis, videlicet ipsi A B . Dico & AB BC commenfurabiles esse. Quoniam enim commenfurabiles sunt CA AB , metietur eas aliqua magnitudo. metiatur, & sit D . Itaque quoniam D metitur ipsas CA AB , & reliquam BC metietur. metitur autem & AB . ergo D ipsas AB BC metitur: ac propterea AB BC commenfurabiles sunt. Si igitur duæ magnitudines commenfurabiles componantur, & tota magnitudo vtrique ipfarum commenfurabilis erit, & reliqua. quod oportebat demonstrare.

A ————— B ————— C

D

1. diff.

4. com. nos.

3. com. nos.

THEOREMA XIII. PROPOSITIO XVII

Si duæ magnitudines incommenfurabiles componantur, & tota magnitudo vtrique ipfarum incommenfurabilis erit. quòd si tota magnitudo uni ipfarum fit incōmēsurabilis, et quæ à principio magnitudines incommenfurabiles erunt.

Componantur enim duæ magnitudines incommenfurabiles AB BC . Dico & totam magnitudinem AC vtrique ipfarum AB BC incommenfurabilem esse. si enim non sunt incommenfurabiles CA AB , metietur eas aliqua magnitudo. metiatur, sitq; D , si fieri potest. Quoniam igitur D metitur ipsas CA AB , & reliquam BC metietur. metitur autem & B A . ergo D ipsas A B BC metitur: ac propterea commenfurabiles sunt AB BC . ponuntur autem & incommenfurabiles. quòd fieri non potest. non igitur ipsas CA AB metietur aliqua magnitudo. quare CA AB incommenfurabiles sunt. similiter & AC CB incommenfurabiles esse demonstrabimus. ergo AC vtrique ipfarum AB BC est incōmenfurabilis. sed AC vni ipfarum AB BC incōmenfurabilis sit; & primū ipsi A B . Dico & AB BC incōmēsurabiles esse. si enim sunt cōmenfurabiles, eas aliqua magnitudo metietur. metiatur, & sit D . quā igitur D metitur ipsas AB BC , & totā AC metietur. metitur autem & AB . ergo D ipsas CA AB metitur: ideoq; CA AB commenfurabiles sunt. ponuntur autem & incommenfurabiles. quòd fieri non potest. non igitur ipsas AB BC metietur aliqua magnitudo. quare AB BC incommenfurabiles erūt. similiter demonstrabimus A C , & reliquæ B C esse incommenfurabilem. Si igitur duæ magnitudines incommenfurabiles componantur, & reliqua. quod oportebat demonstrare.

A ————— B ————— C

D

4. com. nos.

F. C. COMMENTARIUS.

Ex iam demonstratis illud etiam constat.

Si tota magnitudo ex duabus magnitudinibus composita vni componentium fit incommenfurabilis, & reliquæ incommenfurabilis erit.

E V C L I D . E L E M E N T .

Sit enim tota magnitudo AC incommensurabilis magnitudini AB. Dico AC etiam reliquae BC incommensurabilem esse. Quoniam enim CA est incommensurabilis ipsi AB, erunt AB, BC incommensurabiles. & quoniam AB EC incommensurabiles sunt, & AC utrique ipsarum incommensurabilis erit. quod oportebat demonstrare.

Ex demon-
stratis.

L E M M A . I.

Si ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum deficiens figura quadrata, parallelogrammum applicatum aequale est ei rectangulo, quod partibus rectae lineae ex applicatione factis continetur.

Ad aliquam enim rectam AB applicetur AD parallelogrammum, deficiens figura quadrata DB. Dico parallelogrammum AD rectangulo ACB aequale esse; quod quidem per sese patet. quoniam enim quadratum est DB, erit DC ipsi CB aequalis, atque est parallelogrammum AD, quod AC CB continetur. si igitur ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum, & reliqua, quod oportebat demonstrare.

L E M M A . II.

Si duae rectae lineae inaequales sint, quarta autem pars quadrati, quod à minore fit, ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata; quod applicatum est per bipartitam sectionem non transit.

Si enim fieri potest, sint duae rectae lineae inaequales AB C: quarta autem pars quadrati, quod fit à minori C ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata; quae scilicet, fit à DB ipsius AB dimidia, erit ex praecedenti lemmate id, quod applicatum est aequale ei, quod partibus AD DB continetur, hoc est aequale quadrato ex D B. etenim AB bifariam in puncto D secatur. quod igitur quater fit à DB aequale est quadruplo eius, quod applicatum est. sed quod quater fit à D B est ipsius AB quadratum; nam longitudine duplae potentia quadruplae sunt: quadruplum vero eius, quod applicatur est quadratum ipsius C. ergo quadratum, quod fit ex A B est aequale quadrato ex C, hoc est quadratum maioris aequale quadrato minoris. quod fieri non potest. non igitur quarta pars quadrati, quod fit à C applicata ad A B per bipartitam sectionem transit.

L E M M A . III.

Duabus datis rectis lineis inaequalibus, quartam partem quadrati minoris ad maiorem applicare, ita ut deficiat figura quadrata.

Sint datae duae rectae lineae inaequales A B CD; sitque maior A B. & oporteat facere quod propositum est. secetur C D bifariam in E. manifestum est quartam partem quadrati, quod fit à C D esse quadratum ex CE. & describatur in recta linea A B semicirculus; seceturque A B bifariam in F: & à puncto F ipsi A B ad rectos angulos ducatur

ducatur FG . Quoniam igitur AB maior est, quàm CD , erit & ipsius AB dimidia maior, quàm dimidia ipsius CD , hoc est maior quàm CE . ponatur FH æqualis CE , & per H ipsi AB parallela ducatur HK , atque à puncto K ad AB perpendicularis ducta KL , iungantur AK KB . rectangulum igitur est triangulum AKB , & ab angulo recto ad basim perpendicularis ducta est KL . ergo rectangulum ALB est æquale quadrato, quod fit ex KL . producat KL , & ponatur ipsi LB æqualis LM , & figura compleatur. quadratum igitur, quod fit ex KL , hoc est quod ex FH est æquale parallelogrammo AM . sed quod fit ex FH est æquale quadrato ex CE , hoc est quartæ parti quadrati ex CD : estq; AM deficiens figura quadrata. quod ipsum facere oportebat.

§ & 17. sexu.

THEOREMA XV. PROPOSITIO. XVIII.

Si duæ rectæ lineæ inæquales sint, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidat; maior tanto plus poterit quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si maior tanto plus possit, quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata; in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidet.

Sint duæ rectæ lineæ inæquales ABC , quarum maior BC ; quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori A , hoc est ei, quod fit à dimidia ipsius A , æquale parallelogrammum ad B applicetur, deficiens figura quadrata, & fit

A

quod continetur BD DC , sitq; BD ipsi DC commensurabilis longitudine. Dico BC plus posse, quàm A , quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. scilicet enim BC bifariam in puncto E , & ipsi DE æqualis ponatur EF . reliqua igitur DC est æqualis BF . & quoniam recta linea BC secatur in partes quidem æquales ad E punctum, in partes vero inæquales ad punctum D ; erit BD DC rectangulum vnà cum quadrato ex ED æquale ei, quod fit ex E C quadrato, & eorum quadrupla quod igitur quater BD DC continetur vnà cum quadrato, quod fit ex E D quater æquale est quadrato quod quater fit ex E C . Sed ei quidem, quod quater BD DC continetur æquale est quadratum ex A : ei vero, quod quater fit ex DE æquale est quadrati, quod ex DF ; etenim DF ipsius DE est dupla: & ei quod quater fit ex EC æquale est quadratum quod ex BC ; rursus enim BC dupla est ipsius E C . ergo quadrata, quæ sunt ex A DF æqualia sunt ei, quod fit ex BC quadrato; ac propterea quadratum, quod fit ex BC maius est, quàm quadratum, quod ex A , quadrato, quod ex DF : recta igitur linea BC tanto plus potest, quàm A , quantum est ipsius DF quadratum. ostendendum est & BC ipsi DF commensurabilem esse. Quoniam enim BD commensurabilis est ipsi DC longitudine, erit & BC ipsi CD longitudine commensurabilis. sed DC ipsius CD BF est commensurabilis longitudine. æqua

§. secundi.

§. quinti.

C

EVCLID. ELEMENT.

D lis enim est CD ipsi BF .quare & BG ipfis BF CD longitudine est commensurabilis, & reliquę igitur FD longitudine commensurabilis erit . ergo BC plus potest, quàm A quadrato rectę lineę sibi longitudine commensurabilis. Sed BC plus possit quàm A , quadrato rectę lineę sibi longitudine commensurabilis, quartę autem parti quadrati, quod fit ex A æquale parallelogrammū ad B C applicetur, deficiens figura quadrata; & sit quod continetur BD DC . ostendendum est B D ipsi D C longitudine commensurabilem esse . Isdem enim constructis similiter demonstrabimus B C plus posse, quàm A , quadrato rectę lineę FD . sed B C plus potest, quàm A , quadrato rectę lineę sibi longitudine commensurabilis. ergo B C commensurabilis est ipsi FD longitudine . & reliquę igitur, utrique scilicet BF D C longitudine est commensurabilis, sed utraque BF D C ipsi D C commensurabilis est longitudine; etenim B F est æqualis D C . ergo & B C ipsi CD longitudine est commensurabilis. **H** ex quibus constat B D ipsi D C longitudine commensurabilem esse. Si igitur duę rectę lineę inęuales sint, & reliqua. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIIVS.

A Quartę autem parti quadrati, quod fit à minori A , hoc est ei, quod fit à dimidia ipsius A æquale parallelogrammum ad B C applicetur, deficiens figura quadrata] ex antecedente lemmate. Hoc autem nihil aliud est, nisi rectam lineam maiorem, ita secare, ut reſtāgulum ipsius portionibus contentum quartę parti quadrati minoris sit æquale. sed possumus illud idem vniuersalius explicare in hunc modum .
Datam rectam lineam ita secare, ut reſtāgulum, quod partibus cōtinetur, sit æquale dato reſtilineo . oportet autem datum reſtilineū minus esse quadrato, quod à dimidia describitur.

Sit data recta linea AB , diuisa bifariam in C ; datumq; reſtilineum D . & oporteat facere quod propositum est. Describatur in AB semicirculus AEB ; & à puncto C ipsi AB ad rectos angulos ducatur CE ; deinde reſtilineo D fiat æquale quadratum F G H K . erit eius latus FG minus

ipsa AC , hoc est ipsa CE . quare à recta linea CE abſcindatur CL , quę sit æqualis FG : & per L quidem ducatur LM parallela ipsi AB : per M vero ducatur MN parallela CE . Dico reſtā lineam AB ſectam eſſe in puncto N , ut oportebat, hoc eſt reſtāgulum ANB reſtilineo D æquale eſſe. æquale etenim eſt quadrato ex M N . ſed cum MN ſit æqualis ipsi CL , hoc eſt ipſi FG , erit reſtāgulum ANB quadrato $FGHK$, hoc eſt reſtilineo D æquale. quod facere oportebat.

Similiter & datum numerum in duas partes ita diuidemus, ut qui ex ipſis produſcitur dato numero ſit æqualis. oportet autem datum numerum, cui æqualis eſſe debet, quadrato dimidij minorem eſſe.

Sit datus numerus 20, quem oporteat ita diuidere, ut qui ex partibus produſcitur, ſit æqualis dato numero 75. Accipitur ipſius 20 medieta, quę eſt 10, & in ſe multiplicetur, faciet 100, à quo detrahemus datum numerum, videlicet 75, & relinquetur 25. huius igitur latus 5 additū ipſi 10 conſtituit 15; & detractum ab eodem conſtituit 5. Dico 20 in has partes ita diuiſum eſſe, ut oportebat, hoc eſt eum, qui ex ipſis produſcitur, æqualem eſſe dato numero 75. Quoniam enim 20 diuiditur in duas partes æquales, & in duas partes inęuales, numerus planus, qui ſit ex partibus inęqualibus vna cum quadrato numeri interieſti æqualis eſt ei, qui ſit à dimidio quadrato, quod demonſtratum eſt à Barlaam monacho in theoremate quinto eorum, quę nos ad 15 noni appoſuimus

apposuimus. ergo quæ sit ex 15, & 5 una cū quadrato ipsius 5 est æqualis quadrato dimidij, vide licet 100 : & detracto communi quadrato 25, erit qui producit ex 15, & 5 æqualis dato numero 75, quod facere oportebat.

Sed ei quidem, quod quater DB BC continetur æquale est quadratum ex A B
nitur enim parallelogrammum rectangulum D B C æquale quartæ parti quadrati, quod fit ex A.

Erit & BC ipsi CD longitudine cōmensurabilis C
Ex prima parte sextæ decimæ huius.

Quare BC ipsis BF CD longitudine est cōmensurabilis D
Ex 12 huius.

Et reliqua igitur F D longitudine cōmensurabilis erit E
Ex eo, quod nos ad 17. huius demonstrauimus. simantur enim BF DC simul, ac si una linea esset.

Et reliquæ igitur, utrique scilicet B F D C longitudine est cōmensurabilis F
Ex eodem theoremate, quod ad 17 huius apposuimus.

Ergo & BC ipsi DC longitudine est cōmensurabilis. G
Ex 12 huius.

Ex quibus constat BD ipsi DC longitudine cōmensurabilem esse H
Ex secunda parte sextæ decimæ huius.

THEOREMA XVI. PROPOSITIO. XIX.

Si duæ rectæ lineæ inæquales sint, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes incommensurabiles longitudine ipsam diuidat; maior tanto plus porerit, quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Quod si maior tanto plus possit, quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata; in partes longitudine incommensurabiles ipsam diuidet.

Sint duæ rectæ lineæ inæquales A B C, quarum maior B C: quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori A, æquale parallelogrammum ad ipsam BC applicetur, deficiens figura quadrata; & sit quod continetur B D

D C sitq; BD ipsi DC longitudine incommensurabilis. Dico B C plus posse, quàm A quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Iisdem enim, quæ supra, constructis, similiter ostendemus ipsam BC plus posse, quàm A, quadrato rectæ lineæ D F. ostendendum igitur est B C ipsi D F longitudine incommensurabilem esse. Quoniam enim incommensurabilis est B D ipsi D C, erit & B C ipsi C D longitudine incommensurabilis. sed DC incommensurabilis est utrisque BF DC. ergo & B C ipsis BF DC longitudine est incommensurabilis. ac propterea reliquæ F D incommensurabilis est longitudine; & B C plus potest, quàm A. quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Sed B C rursus plus possit, quàm A, quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. quartæ autem parti quadrati, quod fit ex A æquale parallelogrammum ad BC applicetur, deficiens figura quadrata; & sit quod BD DC continetur. ostendendum est BD ipsi DC longitudine incommensurabilem esse. Iisdem enim constructis, similiter demonstrabimus BC plus posse quàm A, quadrato rectæ lineæ D F. ergo ostendendum relinquitur BC plus posse, quàm A, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. incommensurabilis igitur est BC ipsi D F longitudine. quare & reliquæ, videlicet utrique BF DC est incommensurabilis. sed utraque BF DC cōmensurabilis est longitudine ipsi DC. ergo & B C ipsi CD est incommensurabilis longitudine; ac propterea diuidendo

17. huius.
14. huius.
Ex demonstratione ad 17. huius

Ex demonstratione ad 17. huius.
14. huius.
17. huius.

EVCLID. ELEMENT.

do BD ipsi DC longitudine incommensurabilis erit. Si igitur duæ rectæ lineæ inæquales sint, & reliqua, quod oportebat demonstrare.

SCHOLIUM.

Hactenus tractavit de commensurabilibus, & incommensurabilibus, nunc ad rationales & medias transit.

LEMMA. I.

Quoniam demonstratum est longitudine commensurabiles omnino & potentia commensurabiles esse. potentia vero commensurabiles non omnino & longitudine, sed posse & longitudine commensurabiles esse, & incommensurabiles: manifestum est, si exposita rationali aliqua commensurabilis fuerit longitudine, illam rationalem vocari, & ipsi commensurabilem non solum longitudine, sed etiam potentia, longitudine enim commensurabiles omnino & potentia commensurabiles sunt. Si vero expositæ rationali aliqua fuerit potentia commensurabilis, si quidem & longitudine, dicetur & sic rationalis, & commensurabilis ipsi longitudine, & potentia. Quod si exposita rationali rursus aliqua commensurabilis existens potentia, longitudine fuerit incommensurabilis, dicetur & sic rationalis potentia tantum commensurabilis.

PROCLI LEMMA. II.

Rationales vocat eas, quæ expositæ rationali vel longitudine & potentia commensurabiles sunt, vel potentia solum. sunt autem & alię rectæ lineæ, quæ longitudine quidem expositæ rationali incommensurabiles sunt, potentia autem solum commensurabiles; atque ob id rursus dicuntur rationales, & commensurabiles inter se, quatenus rationales, sed commensurabiles inter se vel longitudine, & potentia, vel potentia solum. & si quidem longitudine, dicuntur & ipsæ rationales longitudine commensurabiles, ut intelligatur etiam potentia commensurabiles esse: si vero potentia solum, inter se sunt commensurabiles, dicuntur ipsæ quoque rationales potentia solum commensurabiles.

Rationales
commensu-
rabiles sunt.
12. huius.

At vero rationales commensurabiles esse ex his constat.

Quoniam enim rationales sunt, quæ expositæ rationali sunt commensurabiles, quæ vero eidem commensurabiles etiam inter se commensurabiles sunt; sequitur rationales commensurabiles esse, quod demonstrare oportebat.

LEMMA. III.

Invenire duas rationales longitudine commensurabiles.

Exponatur

Exponatur rationalis A, & duo numeri C D vel quadrati, vel simpliciter proportionem habentes, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, & fiat vt C ad D, ita quadratum ex A ad quadratum ex E: erunt per ea, quæ demonstrata sunt A E longitudine commensurabiles.

Ex corol. 8. huius.

In 9. huius.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO. XX.

Quod rationalibus longitudine commensurabilibus rectis lineis secundum aliquem prædictorum modorum continetur rectangulum rationale est.

Rationalibus enim longitudine commensurabilibus rectis lineis A B B C contineatur rectangulum A C. Dico A C rationale esse. describatur ex A B quadratum A D. ergo A D est rationale. Et quoniam A B commensurabilis est ipsi B C longitudine, atque est A B æqualis B D; erit D B ipsi B C longitudine commensurabilis. est autem & vt D B ad B C, ita D A ad A C: & commensurabilis est D B ipsi B C. ergo & D A ipsi A C commensurabile erit. estq; rationale D A. quare & A C est rationale. quod igitur rationalibus longitudine commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum rationale est. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIUS.

Secundum aliquem prædictorum modorum Rectarum enim linearum A B B C vel A B C D sunt expositæ rationali longitudine commensurabiles, vel utrique eadem commensurabiles potentia solum, sed inter se commensurabiles longitudine. quocumque autem modo se habeat, quod ex ipsis sit rectangulum rationale est, & eadem demonstratio in omnibus congruit.

Ergo A D est rationale. Ex diffinitione 9. siue enim longitudine sint commensurabiles expositæ rationali, siue potentia solum, earum quadrata rationalia sunt, quippe quæ quadrato expositæ rationalis sint commensurabilia.

Ergo & D A ipsi A C commensurabilis erit. Ex decima huius.

Estq; rationale D A. quare & A C est rationale. rationali namque commensurabile & ipsum rationale est. quod ita demonstrabitur.

Sit expositæ rationalis quadratum A, & ipsi commensurabile sit spaciū B. erit B rationale ex 9. diffinitione. sit rursus aliud spaciū C ipsi B commensurabile. Dico & C rationale esse. Quoniam enim spaciū A C eidem spacio B sunt commensurabilia, & inter se commensurabilia sunt ex 12. huius. Quod cum C ipsi A sit commensurabile, etiam rationale erit ex 9. diffinitione. quod demonstrare oportebat.

Vt autem ea, quæ hoc loco de rationalibus dicuntur, manifestiora sint, & quasi ante oculos ponantur, libuit nonnulla theoremata adiungere, quæ ad ea etiam, quæ sequuntur, vtilia erunt.

T H E O R E M A I.

Quod duabus datis rectis lineis rationalibus continetur rectangulum datū erit. Duabus enim datis rectis lineis rationalibus A B A D contineatur rectangulum A C. Dico A C datum

datum esse. *Exposita enim rationali E, vel vtraque AB AD ipsi E longitudine est commensurabilis, vel vtraque commensurabilis est potentia solum, vel altera quidem longitudine, altera potentia solum commensurabilis. & si quidem vtraque est commensurabilis longitudine, rectangulum, quod ipsis continetur datam erit ex his, quæ Ioumes Regiomontanus in primo libro de triangulis propositione 16 demonstrauit; & ex his, quæ nos demonstrauimus in commentarijs in 3 propositione libri Archimedis de circuli dimensione: si vero vtraque expositæ rationali potentia solum est commensurabilis, multominus rectangulum datum erit, sicut enim ex AB AD quadrata AF CG, & quoniam AB AD potentia sunt commensurabiles, eandem quadrata commensurabilia erunt, ideoque inter se proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. sit autem quadratum AF ad quadratum CG, vt numerus H ad numerum K; & si ipsam K multiplicans faciat M, cuius radix sit N, erunt igitur tres magnitudines H N K deinceps proportionales; rectangulum enim contentum H K est æquale quadrato ex N, hoc est ipsi M, & quoniam quadratum F EC, hoc est vt AB ad BC; vt autem AB ad BG, hoc est ad EC, erunt & tres he magnitudines deinceps proportionales. ceptis proportionales fuerint, prima ad tertiam duplam habebit secundam, quadratum igitur AF ad quadratum CG duplam habebit ad rectangulum AC, sed quadratum AF ad quadratum CECum H ad K similiter quadratum habet eius, quam ad rectangulum AC, vt H ad N, sunt autem magnitudines H N portio: & datum est quadratum F A, quare & rectangulum monstrabimus rectangulum datum esse, si altera data erunt lineis, altera vero potentia solum, quod demonstrare oportebat.*

2. Jones and
Smith.
In 1911.

s. huius.

17. sextri.

x. sexti.

II. quinti.

ro. diff. qui
ri.

1. datorum
Euclid.
2. Datorum
Euclid.

O P E R A T I O .

Si datae magnitudines numerorum radices fuerint, numeros ipsos inter se multiplicabimus; si vero earum altera numerus fuerit, altera numeri radix, quadratum numeri multiplicabimus per numerum, cuius altera est radix, & eius, qui producitur radicem dicemus esse rectangulum, quod duabus datis rectis lineis continetur. atque hec nihil aliud est, nisi multiplicatio, quam dicunt, radicem quadratam inter se se. vt se. AB sit radix. 5, AD radix 3, multiplicabimus 5, per 3 fiet 15, cuius radix erit id, quod producitur ex R 5, & R 3 inter se ductis. si vero AB sit 2, AD R 5, multiplicabimus quadratum ipsius 2 videlicet 4 per 5, & fiet 20, cuius radix erit productum, quod queritur.

T H E O R E M A I I.

Si ad datam rectam lineam rationalem applicetur spacium datum, & latitudo, quam facit, data erit.

¶ Sit data recta linea rationalis AB , & spaciū datum E . Dico si ad rectam lineam AB spaciū E applicetur, latitudine, quam facit, datum esse. vel igitur recta linea AB expositae rationali commensurabilis est longitudine, vel potentia solum; vel spaciū E rationale est, vel irrationale, quod medium appellatur. & si quidem recta linea AB longitudine est commensurabilis, & spaciū E rationale, illud manifestum erit ex ijs, quae Regiomontanus demonstravit in primo libro de triangulis propositione 17. & ex ijs, quae nos eodem in loco, de quo proxime dictum est, demonstravimus. si vero AB est commensurabilis potentia solum, & spaciū E siue rationale, siue irrationale, vel AB est longitudine commensurabilis, & spaciū E irrationale, latitudo, quae facit, data erit. Sit primum recta linea AB potentia solum commensurabilis, & spaciū E rationale. Quoniam igitur AB rationalis est, & spaciū E rationale, erit quadratum ipsius AB spacio E commensurabile.

sione demonstrabitur ut quadratum ex AB ad rectangulum AC , ita esse rectangulum AC ad C quadratum. Quoniam igitur $H K N$ deinceps proportionales sunt, quadratum autem FA ad rectangulum AC est ut H ad K ; erit & rectangulum AC ad CG quadratum, ut K ad N . sed datum est quadratum AF , & rectangulum AC , cum dentur HK . ergo & quadratum CG dabitur, & eius radix BC , hoc est latitudo, quae fit spacio E ad rectam lineam AB applicato. Non aliter demonstrabitur si recta linea AB sit longitudine commensurabilis, et spacium E irrationale.

O P E R A T I O .

Si datae magnitudines radices numerorū fuerint, numerus, qui spacium notum reddit, diuidatur per alterum numerum; si vero altera fuerit numeri radix, numerus, cuius ea est radix, diuidatur per quadratum alterius numeri; vel contra quadratum numeri, per numerum, cuius est radix, diuidatur; & eius, quod exibat, radix erit latitudo, quam facit spacium ad rectā lineam applicatum. est autem hec diuisio radicum inter se se, quam dicunt, ut si R 15 diuidenda sit per R 5, diuidemus 15 per 5, & exibat 3, cuius radix est quod fit R 15 per R 5 diuisi; si vero R 20 diuidere velimus per 2, diuidemus 20 per quadratum ipsius 2, videlicet per 4, & exibat 5, cuius radix est id, quod queritur.

T H E O R E M A I I I .

Quae ex duabus rationalibus longitudine commensurabilibus rectis lineis componitur recta linea data erit.

Ex duabus enim datis rationalibus longitudine commensurabilibus rectis lineis AB BC componatur recta linea AC . Dico AC datam esse, vel igitur datae rectae lineae expositae rationali longitudine commensurabiles sunt, vel commensurabiles potentia solum, sed inter se longitudine commensurabiles. Et si quidem expositae rationales sint commensurabiles longitudine, quae ex ipsis componitur recta linea data erit, ex demonstratis à Ioanne Regiomontano in primo libro de triangulis, propositione tertia, & ex his, quae nos eodem in loco demonstrauimus. si vero expositae rationali sint commensurabilis potentia solum, sed inter se longitudine commensurabiles, earum quadrata proportionem habebunt; quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Itaque habeat recta e lineae AB quadratum ad quadratum rectae lineae BC proportionem eam, quam numerus L ad numerum M . erit numeri L M similes plani, si enim quadrati sint, rectae lineae AB AC longitudine erunt commensurabiles, quod non ponitur, ergo inter L & M cadet vnus medius proportionalis, cadat, & sit N . describaturq; ex recta linea AC quadratum $ACDE$; et iuncta AD ducatur per B quidem alterutri ipsarum AE CD parallela BG Fiper G vero ducatur HGK alterutri ipsarum AC ED parallela, similiter ut supra demonstrabitur quadratum AG ad rectangulum GC ita esse, ut rectangulum GC ad GD quadratum. sed quadratum AG ad quadratum G D est ut numerus L ad numerum M . ergo quadratum AG ad rectangulum GC est ut numerus L ad ipsum N ; & rectangulum GC ad quadratum GD , ut N ad M . est autem rectangulum EG , quod est alterum supplementorum, aequale reliquo GC . Quadratum igitur AG ad gnomonem EKB est ut L ad M vna cum duplo ipsius N ; & conuertendo gnomon EKB ad quadratum AG , ut M vna cum duplo ipsius N ad ipsum L . ergo componendo, rursumq; conuertendo quadratum AG ad totum AD quadratum, ut L ad compositum ex L & M vna cum duplo ipsius N . sed compositum hoc est datum, quippe cum dati sint numeri ipsius componentes. ergo et totum quadratum AD datum erit, et data eius radix, quae ex duabus datis rectis lineis constat. atque illud est, quod demonstrandum proponebatur.

9. huius.

12. octau.

O P E R A T I O .

Numeros respondentes quadratis datarum linearum simul coaceruabimus vna cum duplo lateris

E V C L I D . E L E M E N .

quadratum, cuius radix erit recta linea, quam querimus. atque hec est radicem quadratarum sub
tractio, quam dicunt. Vt si à radice 27 auferenda sit radix 3; imgenus 27 cum 3 fient 30, à
quo auferemus duplū numeri medij proportionalis inter 3, et 27 qui est 9, videlicet 18, & re-
linquentur 12, cuius radix est ea, quam querimus. eodem modo & spaciū mediorum in qua
lum, quae commensurabilia sint, differentia inuenietur. si uero ab aliqua rationali auferenda sit
alia minor, quae ipsi longitudine sit incommensurabilis. vt si à R 5 auferre velimus R 3, dice-
mus R 5 dēpt. 1 R 3, & el. utemur hac voce minus, vt nunc solent, hoc modo R. 5 minus R 3, &
R 6 minus R 4, quae Euclides appellat apotomas, Campanus et recentiores residua, seu recisa.
Si igitur recta linea AB sit R 3, & recta BC R 12, erit ex ante demonstratis in primo ante-
cedentium theorematum, rectangulum AC R 36, hoc est 6. & rursus si AB sit R 8, & BC R
18, erit AC rectangulum R 144, hoc est 12.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XXI.

Si rationale ad rationalem applicetur, latitudinem efficit ratio
nalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine cōmensurabilē.

45. primi.

Ex lēma; 2.
ad 10. huius
10. huius.

6. diffi.

Rationale enim AC ad rationalem fecū-
dum aliquem rursus dictorum modorū ap-
plicetur, latitudinem faciens BC. Dico BC
rationalem esse, & ipsi ab longitudine com-
mensurabilē. Describatur enim ex AB qua-
dratum AD. ergo AD rationale est: sed &
rationale est AC. ergo AD ipsi AC est com-
mensurabile. atque est vt DA ad AC, ita DB ad
BC. commensurabilis igitur est DB ipsi BC. est
autem DB æqualis BA. quare AB ipsi BC com-
mensurabilis est. sed AB est rationalis. rationalis
igitur est & BC, & ipsi BA longitudine cōmen-
surabilis. si igitur rationale ad rationalem applicetur; & reliqua. quod oportet
demonstrare.

F. C. C O M M E N T A R I V S.

Sit spaciū AC 6. & recta linea AB R 3. erit ex 2. theoremate premisorum CE R 12,
quae ipsi R 3 longitudine est commensurabilis. est enim ipsius dupla. rursus sit AC 12, & re-
cta linea AB R 8, erit CB R 18. atque est R 18 ad R 8, ut 3 ad 2. nam si R 18 diuidatur
per R 8 proveniet R 2 $\frac{1}{4}$, videlicet R $\frac{9}{4}$, quae est $\frac{3}{2}$.

L E M M A . I.

Inuenire duas rationales potentia solum
commensurabiles.

Exponatur rationalis A, & duo numeri B C
non habētes proportionem, quam quadratus ad
quadratum: & fiat vt B ad C, ita quadratum ex
A ad quadratum ex D. erunt igitur ex ijs, quae
ostensa sunt A D potentia solū cōmensurabiles.

Corol. 6. hu-
ius.

B....A C.....;

L E M M A . I I.

Recta linea, quae potest irrationale spaciū, irrationalis est.

Possit

Possit enim recta linea A spacium irrationale, hoc est quadratum, quod fit ab A irrationali spacio fit aequale. Dico A irrationalem esse. si enim sit rationalis, erit quod ab ipsa fit quadratum rationale; sic enim in diffinitionibus ponitur. atqui rationale non est. ergo A irrationalis sit necesse est. quod demonstrare oportebat.

$$\frac{A}{B \cdot D = 40}$$

Diff. 8.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO. XXII.

Quod rationalibus potentia solum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum irrationale est: & recta linea ipsum potens est irrationalis. vocetur autem media.

Rationalibus enim potentia solum commensurabilibus rectis lineis AB BC contineatur rectangulum AC. Dico rectam lineam, quae ipsum potest, irrationalem esse. vocetur autem media, seu media lis. describatur enim ex A B quadratum AD. ergo AD rationale est. Et quoniam AB incommensurabilis est ipsi BC longitudine, potentia enim solum

ponuntur commensurabiles. atque est AB aequalis BD. incommensurabilis igitur est DB ipsi BC longitudine. est autem ut DB ad BC, ita DA ad AC. ergo DA ipsi A C est incommensurabile. sed DA rationale est. irrationale igitur est AC. Quare & recta linea, quae ipsum AC potest, videlicet quae potest quadratum ipsi aequale est irrationalis. vocetur autem media; propterea quod ipsius quadratum est aequale rectangulo, quod AB BC continetur, & ipsarum AB BC media fit proportionalis. quod demonstrare oportebat.

Diff. 10.

Diff. 11.

SCHOLIUM. I.

Media est irrationalis, quae potest spacium contentum rationalibus potentia solum commensurabilibus.

Rationalibus enim potentia solum commensurabilibus rectis lineis A B spacium contineatur. ostendendum est huiusmodi spacium irrationale esse. sumatur enim ipsarum A B media proportionalis C. ergo quod fit ex AB est aequale quadrato ex C; ac propterea C potest rectangulum, quod ipsi AB continetur. est igitur ut A ad B, ita quadratum ex A ad id, quod ex C quadratum. nam ut prima ad tertiam, ita quadratum, quod fit ex prima ad quadratum ex secunda, quod demonstratum est in corollario 20 sexti elementorum. incommensurabilis autem est A ipsi B longitudine. ergo & quadratum ex A quadrato ex C est incommensurabile. sed quadratum ex A rationale est. irrationale igitur est quadratum ex C, hoc est rectangulum, quod rectis lineis A B continetur. ergo C est irrationalis. media autem idcirco vocatur, quod irrationalis existens ipsarum A B media est proportionalis.

$$A \quad 2$$

$$C \quad B \cdot C = 32$$

$$B \quad D = 8$$

Diff. 11.

SCHOLIUM. II.

Ex hoc theoremate colligitur mediam, quae una est irrationalium, in geometrica considerari: media enim est proportionalis iuxta geometricam analogiam inter rationales potentia solum commensurabiles.

C

E V C L I D . E L E M E N T .

17. sexti.

*Et recta linea ipsū potēs est media. si enim quod extremis cōtinetur equa
le est quadrato, quod sit à media, tres rectę lineę proportionales sunt.*

F . C . C O M M E N T A R I V S .

*Sciendum est spaciū illud irrationale, quod potest media linea, medium appellari.
Sit recta linea AB 2; & recta BC B 8. erit rectangulum AC B 32, quod irrationale est, &
median dicitur. recta autem linea ipsū potens est B 32, quę media appellatur.*

L E M M A .

*Si sint duę rectę lineę, erit ut prima ad secundam, ita quadratum,
quod sit à prima ad rectangulum, quod duabus rectis lineis continetur.*

4. sexti.

Sint duę rectę lineę FE EG. Dico ut FE ad E
G, ita esse quadratum ex FE ad FE G rectangu-
lum. describatur ex FE quadratum DF, & GF cō-
pleatur. Quoniam igitur est ut F E ad E G, ita DF
ad F G; atque est DF quidem quadratum ex FE;
FG vero, quod DE EG continetur, hoc est re-
ctangulum FEC: erit ut F E ad E G, ita quadratum ex FE ad FE G rectangulum. si-
militer autem & ut rectangulum GEF ad quadratum ex EF, hoc est ut GF ad FD,
ita est GE ad EF.

T H E O R E M A . X X . P R O P O S I T I O . X X I I I .

*Quod sit à media ad rationalem applicatum, latitudinem ef-
ficat rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine in-
commensurabilem.*

45. primi.

Ex ante-
cedenti.

14. sexti.

21. sexti.

1. pars 10. bu-
ius.

Ex antecede-
te lemmate.

Sit media quidem A, rationalis autem CB,
& ad CB ei, quod sit ex A a quale spaciū ap-
plicetur BD, latitudinem faciens CD. Dico C
D rationalem esse, & ipsi B C longitudine in-
commensurabilem. Quoniam enim media est
A, potest spaciū contentum rationalibus po-
tentia solum commensurabilibus. possit GF:
sed potest & B D. a quale igitur est B D ipsi G
F. atque est equiangulum. equalium autem, &
aquiangulorum parallelogramorū latera, quę
sunt circum aequales angulos ex contraria par-
te sibi ipsis respondent. ergo ut B C ad E G, ita
est EF ad CD. est igitur & ut quadratum ex B C ad quadratum ex EG, ita quadra-
tum ex EF ad id, quod ex CD quadratum. sed quadratum ex B C commensurabile
est quadrato ex EG; utraque enim ipsarum est rationalis. commensurabile igitur est
& quadratum ex EF quadrato ex CD. est autem quadratum ex EF ad FE G rectanguli:
& rationale est quadratum ex CD; ac propterea recta linea CD est rationalis. itaq;
quoniam FE incommensurabilis est ipsi EG longitudine; potentia enim solum cō-
mensurabiles sunt; ut autem F E ad E G, ita quadratum ex E F ad FE G rectanguli:
erit quadratum ex E F incommensurabile rectangulo FE G. sed quadrato quidem
ex EF commensurabile est quadratum ex CD; rationales enim sunt potentia, ut ostē-
sum est. ergo quadratum ex CD rectangulo FEG est incommensurabile. rectangu-
lo autem FEG commensurabile est, quod DC CB continetur; sunt enim quadrato
ex A

A
B 2 40

ex A æqualia. incommensurable igitur est, & quadratum ex CD rectangulo DCB. sed ut quadratum ex CD ad DCB rectangulum, ita est DC ad CB, ergo DC ipsi CB incommensurable est longitudine. & ob id DC est rationalis, & ipsi CB longitudine incommensurable. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIUS.

Rationales enim sunt potentia hoc est potentia commensurabiles: rationales enim commensurabiles sunt, ut in Scholio ante vigesimam huius demonstratur. & quamquam he voces longitudine, & potentia magna ex parte referantur ad commensurabilitatem, & incommensurabilitatem, tamen aliquando etiam ad rationalitatem referri ex hoc loco perspicuum est. quod nonnulli negarunt.

Sit quadratum ex A sit 40, CB vero sit 2. si igitur ad CB applicetur B 40, latitudinem faciet B 10. rursus si CB sit B 5. & ad ipsam applicetur B 40, erit latitudo, quam facit B 8 ex 2. theoremate premissorum.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXIII.

Mediæ commensurabilis, media est.

Sit media A, & ipsi A commensurabilis sit B. Dico & B median esse. Expo natur enim rationalis CD, & quadrato quidem ex A æquale ad CD applicetur spaciū rectangulum CE, latitudinem efficiens ED. rationalis igitur est ED, & ipsi CD longitudine incommensurabilis. quadrato autem ex B æquale ad CD applicetur spaciū rectangulum CF, latitudinem efficiens DF. Quoniam igitur A commensurabilis est ipsi B, erit quadratum ex A quadrato ex B commensurable. sed quadrato quidem ex A æquale est rectangulum EC; quadrato autem ex B æquale CF. commensurable igitur est rectangulum EC rectangulo CF. atque est ut EC ad CF, ita ED ad DF. ergo ED ipsi DF longitudine est commensurabilis. est autem ED rationalis, & incommensurabilis ipsi DC longitudine. Ergo & DF rationalis est, & ipsi DC longitudine incommensurabilis. rationales igitur sunt CD DF potentia soli commensurabiles. quod autem rationalibus potentia solum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum irrationale est; & recta linea ipsum potens est irrationalis: vocetur autem media. ergo recta linea, quæ potest rectangulum CDF est media. sed B potest rectangulum CDF. quare B media erit.

45. primi.
Ex antecedente.

cor. 9. huius

13. huius.

22. huius.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum est spaciū medio spacio commensurabile, medium esse. possunt enim ipsa rectæ lineæ, quæ sunt potentia commensurabiles, quarum altera media est. ergo & reliqua media erit. quemadmodum autem & in rationalibus dictum est, ita & in medijs dicemus, rectam lineam mediæ longitudine commensurabilem dici median, & ipsi commensurabilem non solum longitudine, sed & potentia; vniuersæ enim quæ longitudine commensurabiles sunt, etiam potentia sunt commensurabiles. si vero mediæ commensurabilis quædam recta linea fuerit potentia, siquidem

quidem etiam longitudine, dicuntur & sic mediæ & longitudine, & potentia commensurabiles. si autem potentia solum, dicuntur mediæ potentia solum commensurabiles.

F. C. COMMENTARIUS.

Ex hoc manifestum est spacium medio spacio commensurabile medium esse.

Sit spacium medium *A*, & ipsi commensurabile sit alterum spacium *B*. Dico *B* medium esse. Exponatur enim rationalis *CD*, & ad ipsam applicetur spacium rectangulum *CE* spacio *A* æquale, quod latitudinem faciat *ED*. erit *ED* rationalis, & ipsi *CD* longitudine incommensurabilis. Rursus ad eadem *CD* applicetur aliud spacium rectangulum *CF*, æquale spacio *B*, latitudinemq; faciens *DF*. Quoniam igitur spacium *A* est cõmensurabile spacio *B*; estq; spacio quidem *A* æquale rectangulum *CE*; spacio autem *B* æquale rectangulũ *CF*: rectangulum *CE* rectangulo *CF* commensurabile erit. It' autem *EC* ad *CF*, ita est *ED* ad *DF*. ergo & *E* *D* ipsi *DF* longitudine est commensurabilis, sed *ED* rationalis est, & ipsi *CD* incommensurabilis longitudine. ergo & *DF* rationalis, & ipsi *CD* longitudine est incommensurabilis. sunt igitur *CD* *DF* rationales, & potentia solum commensurabiles. ergo rectangulum *CF*, quod ipsis continetur, irrationale est, & medium: ac propterea spacium *B* ipsi æquale, medium sit necesse est, quod oportebat demonstrare.

23. huius.

ex. huius.

SCHOLIUM.

Media duplex est, videlicet potens quod rationalibus potentia solum commensurabilibus continetur, & qua media est commensurabilis. postquam autem ostendisset mediam esse, quæ potest id quod rationalibus potentia solum commensurabilibus continetur, indigebat hoc theoremate ad ea, quæ sequuntur. oportet enim primum ostendere aliquas esse commensurabiles medias, deinde inquirere quale spacium illud sit, quod ipsis comprehenditur.

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXV.

Quod medijs longitudine commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulũ medium est.

Medijs enim longitudine commensurabilibus rectis lineis *AB* *BC* contineatur rectangulum *AC*. Dico *A* *C* medium esse. describatur enim ex *AB* quadratum *A* *D*. ergo *AD* medium est. & quoniam commensurabilis est *AB* ipsi *BC* longitudine, æqualis autem *AB* ipsi *B* *D*; erit *DB* ipsi *BC* longitudine commensurabilis. quare & *DA* commensurabile est ipsi *AC*. sed *AD* est medium. ergo & *AC* medium erit. quod demonstrare oportebat.

Ex antecedente coroll.

F. C.

P. C. COMMENTARIUS,

Quae de rationalibus supra demonstrata sunt, eadem & de medijs demonstrabimus.

THEOREMA I.

Quod datis duabus medijs, vel media & rationali continetur rectangulum datum erit.

Datis enim duabus medijs, vel data media, & rationali AB AD continetur rectangulum AC. Dico AC datum esse. Sint primus AB AD mediae, & sint ex ipsis quadrata AF CG. erunt & irrationalia, quae media appellantur. habeant autem inter se proportionem, quam H ad K. & H quidem se ipsam multiplicans faciat L, K vero se ipsam multiplicans faciat M, & L multiplicans M ipsam N faciat, cuius N radix sit O; & rursus ipsius O sit radix P. Quoniam igitur res magnitudines LOM deinceps sunt proportionales, suntque earum radices HPK, & HPK deinceps proportionales erunt. Sed quadratum FA ad rectangulum AC est ut rectangulum AC ad CG quadratum, quod superius demonstratum est. quadratum autem FA ad quadratum CG est, ut H ad K. ergo & quadratum FA ad rectangulum AC erit, ut H ad P. et sunt HP datae, et datum FA quadratum, rectangulum igitur AC datum sit necesse est. sed sit AB media, et AD rationalis, vel contra AB rationalis, & AD media; et ex ipsis rursus sint quadrata AF CG, quorum alterum medium erit, alterum rationale. et ipsidem constructis similiter demonstrabitur rectangulum AC datum esse. quod demonstrare oportebat.

a. Datorum
Euclid.

OPERATIO.

Numeros ad quadratos quadratorum redactos inter se multiplicabimus, & eius qui producitur radix radice erit rectangulum, quod datis rectis lineis continetur: ut quae hoc est multiplicatio radicum radicum inter se, quam dicunt. Ut si AB sit B 5 AD sit B 3, multiplicabimus 5 per 3, fient 15, & B 15 erit id, quod ex datis rectis lineis inter se ductis producitur. si vero AB sit B 5, AD 2, quadratum quadratum ipsius 2, videlicet 16 per 5 multiplicabimus, fient 80, & B 80 erit ea, quae ex eorum multiplicatione oritur. denique si AB sit B 2, & AD B 5, multiplicabimus quadratum ipsius 2, hoc est 4 per 5, & producti accipiemus radicem radice, erit B 10 ea, quam inquirimus.

A B 5 B

L 5 M 6 N 12

M B 5. K B 6. O B 12

THEOREMA II.

Si ad datum mediam applicetur spatium datum, latitudo, quam facit, data erit.

Sit data media AB, et spatium datum E, quod ad ipsam AB applicatum latitudinem faciat EC. Dico EC datum esse. vel igitur spatium E rationale est, vel irrationale, quod

N n medium

medium appellatur. sit primum irrationale, ac medium, habeatq. quadratum ipsius AB ad spaciū E proportionem eam, quā habet H ad K ; et H quidem se ipsum multiplicans faciat L : K vero se ipsum multiplicans faciat M , habebit L ad M duplam proportionem eius, quam habet latus ad latus, hoc est H ad K . Itaque fiat ut L ad M , ita recta linea AB ad aliam rectam P : et inter AB , et P sumpta media proportionalis Q , habebit AB ad P duplam proportionem eius, quam habet ad Q . ergo AB ad Q ita erit, ut H ad K . rursum inter AB et Q sumatur media proportionalis R . quare ut AB ad Q , ita erit quadratum ex AB ad quadratum ex R . quadratum igitur ex AB ad quadratum ex R est ut H ad K . sed ut H ad K , ita erat quadratum ex AB ad spaciū E . ergo quadratum ex R spaciū E est æquale. applicetur ad rectam lineam AB parallelogrammum rectangulum AC , æquale quadrato ex R , quod et spaciū E æquale erit. et ex AB AD fiant AF , CG quadrata; numerorum autem LM invenitur tertius proportionalis N , cuius radix sit O . Quoniam igitur numeri LMN deinceps sunt proportionales, et H K O deinceps proportionales erunt. atque est ut quadratum F ad rectangulum AC , ita rectangulum AC ad CG quadratum. quare similiter ac superius demonstrabitur rectangulum AC ad quadratum CG ita esse, ut K ad O . ergo et quadratum CG , et eius radix BC data erit, videlicet latitudo, quam querimus. non alia ratione demonstrabimus, si spaciū E rationale fuerit, latitudinem BC datam esse. quod oportebat demonstrare.

9. quinti.

quadratum ex R

$A B 3 \cdot B$

$L 5 \cdot M 6 \cdot N 12$

$H B 3 \cdot K B 6 \cdot O B 12$

OPERATIO.

Numeris ad quadratos quadratorum redactis, numerum a quo spaciū denominatur, dividemus per alterum numerum; et eius, qui exibit, radix radicis erit latitudo, quam facit spaciū ad rectam lineam applicatum; et hæc est radicum inter se divisio, quam dicunt, ut si dividenda sit $B 6$ per $B 3$, multiplicabimus 6 in se ipsum, sicut 36 , et dividemus 36 per 3 , exhibunt 12 , et $B 12$ erit, quæ ex eorum divisione oritur. si vero dividere oporteat 3 per $B 3$, reducemus 3 ad quadratum quadrati, et sicut 81 , divisissq. 81 per 3 exhibunt 27 , cuius radicis radix est ea, quam querimus.

THEOREMA III.

Quæ ex duabus datis medijs longitudine commensurabilibus componitur recta linea, data erit.

Ex duabus enim datis medijs longitudine commensurabilibus AB BC componatur recta linea AC . Dico AC datam esse, sit quadratum rectæ lineæ AB ad quadratum ipsius BC , ut L ad M , et L quidem se ipsum multiplicans faciat N ; M vero se ipsum multiplicans faciat Q , et quoniam AB BC longitudine commensurabiles

fiat,

sunt, earum quadrata LM , & rursus quadratorum quadrata NO inter se proportionem habebunt, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. ergo inter ipsos N O cadet unus medius proportionalis numerus, cadat, sitq; P , cuius radix Q , & ex AC descripto quadrato ACD E , & reliquis figura completa, quemadmodum superius, similiter demonstrabitur quadratum AG ad rectangulum GC esse, vt L ad Q , & rectangulum GE ad quadratum GD , vt Q ad M ; & denique quadratum AG ad totum AD quadratum, vt L ad compositum ex L , & M vna cum duplo ipsius Q , quod cum dati sint LQM , & compositum ex ipsis dabitur, ergo & AD quadratum, & eius radix AC data erit, quod oportebat demonstrare.

O P E R A T I O.

Magnitudines respondentes quadratis rectarum linearum simul coaceruabimus vna cum duplo mediae proportionalis, & huius compositi radix erit recta linea, quae ex duabus datis constat; atque haec est R R inter se additio, quam vocant, vt si R R 5 addenda sit R R 80 , iungemus ex ante demonstratis R 5 cum R 80 , & cum duplo R 20 , quae faciunt R 405 , cuius radix, videlicet R 205 est recta linea, quae ex earum additione producitur. Quod si duae, vel plures mediae longitudine incommensurabiles sibi ipsis addendae sint, vel etiam rationales, & mediae vitemur eadem voce plus, vt in rationalibus dictum est, hoc modo R 5 plus R 3 , vel R 3 plus R 5 , plus R 5 , vel R 2 plus R 6 , vel 3 plus R 5 plus R 6 , & sic in alijs.

T H E O R E M A I I I I.

Duarum datarum mediarum, quae inaequales sint, & longitudine commensurabiles, differentia data erit.

Sint duae datae mediae inaequales, & longitudine commensurabiles AB AC , quarum differentia sit BC . Dico BC datam esse. sit quadratum rectae lineae AB ad quadratum ipsius AC , vt L ad M . & sit rursus ipsius L quadratum N , & ipsius M quadratum sit O . habebunt NO inter se proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. quare inter eos cadet unus medius proportionalis, cadat, & sit P , cuius radix Q , & ex AB AC descriptis quadratis RH AD , & figura completa, quemadmodum superius, similiter demonstrabimus quadratum RH ad rectangulum HC esse, vt L ad Q ; & rectangulum HC ad quadratum CE , vt Q ad M . & praeterea duo quadrata RH AD aequalia esse duplo rectanguli HC & quadrato FK , ergo si ab ipsis LN auferatur duplum ipsius Q , reliquum erit id, quod quadrato FK respondet. datae autem sint L Q M magnitudines, ergo & quadratum FK , atque eius radix BC dabitur. quod demonstrare oportebat.

O P E R A T I O.

Magnitudines respondentes quadratis rectarum linearum simul iungemus, et ab ea, quae facta est, auferemus duplum mediae proportionalis, quae inter ipsas interijcitur, relinquetur enim quadratum, cuius radix erit differentia, quam querimus; atque haec est R R subtractio, quam appellant, vt si R R 405 auferenda sit R 5 , iungemus ex ante demonstratis R 5 cum R 405 , sicut R 500 , à qua auferemus duplum R 45 , hoc est R 180 , relinquetur R 80 , ergo BC erit R 80 . At si ab aliqua media auferenda sit alia minor, quae longitudine sit ipsi incommensurabilis, vel à media rationalis, vel contra à rationali media, vitemur eadem voce minus, vt in ration-

libris diffū est hoc modo R R 5 minus R R 3, vel R R 12 minus R R 3, vel R R 20 minus 2, vel R R 6 minus R R 3, vel 3 minus R R 40. et ita in reliquis.

Itaque si medius lōgitudine cōmēsurabilis sint AB EC videlicet R R 32, et R R 2. erit ex prioribus antecedentium rectangulum quod ipsis continetur R R 64, hoc est R R 8; sunt enim R R 32 et R R 2 longitudine commensurabiles, videlicet ut 2 ad 1. nam si R R 32 dividatur per R R 2 provenit R R 16 hoc est 2.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO. XXVI.

Quod medijs potentia solum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, vel rationale est, vel medium.

Medijs enim potentia solum commensurabilibus rectis lineis A B BC contineatur rectangulū A C. Dico AC vel rationale esse, vel medium. describantur enim ex AB BC quadrata AD BE, utrumque igitur ipsorum A D BE medium est. exponatur rationalis FG, & ipsi quidem AD æquale ad FG applicetur parallelogrammum rectangulum GH, latitudinem faciens FH, ipsi vero AC æquale ad HM applicetur rectangulum MK, latitudinem faciens HK; & insuper ipsi BE æquale similiter ad KN applicetur NL, latitudinē faciens KL. In recta igitur linea sunt FH HK KL. Quoniam igitur medium est utrumque ipsorum AD BE; atque est AD quidem æquale ipsi GH, BE vero ipsi NL, erit & utrumque ipsorum G H NL medium, & ad rationālē FG applicata sunt. ergo & utraque ipsarū FH KL est rationalis, & ipsi FG longitudine incommensurabilis. & quoniam cōmensurable est AD ipsi BE, erit & GH ipsi NL commensurable. est igitur & ut GH ad NL, ita FH ad K L. ergo FH ipsi KL est commensurabilis longitudine; ac propterea FH KL rationales sunt longitudine commensurabiles. rationale igitur est rectangulum, quod FH KL continetur. et quoniam BD quidem ipsi BA est æqualis; XB uero ipsi BC, erit ut DB ad BC, ita A B ad BX: sed ut DB ad BC, ita DA quadratum ad rectangulum A C: ut autem A B ad BX, ita AC rectangulum ad quadratum CX: est igitur ut XC ad CA, ita CA ad A D: æquale autem est AD ipsi GH, & AC ipsi MK, & CX ipsi NL. quare ut GH ad M K, ita MK ad NL: & ut igitur FH ad HK, ita HK ad KL: ideoque quod FH KL continetur est æquale quadrato, quod fit ex HK. est autem quod continetur FH KL rationale. ergo & rationale est quadratum ex HK; ac propterea recta linea HK rationalis. & si quidem HK commensurabilis est ipsi HM, hoc est ipsi FG longitudine, erit rectangulū NH rationale; si vero HK est incōmensurable ipsi FG longitudine, KH HM rationales erunt potentia solum commensurabiles: & ob id rectangulum HN medium erit. ergo HN vel rationale est, vel medium. sed HN est æquale ipsi A C. quare AC vel rationale, vel medium est. quod igitur medijs potentia solum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum vel rationale est, vel mediū. quod oportebat demonstrare.

S C H O L I U M.

Admiratio dignum est triadis vel ternarij vim, ac facultatem ita potentem esse, ut etiam irrationalium potestatem definiat, & ad illorum usque extrema permeet. præterea & illud mirum est. unamquāque irrationalitatis

irrationalitatis speciem ab aliqua madietate omnino determinari vel Geometrica, vel Arithmetica, vel Musica. porro anima ipsa proxime accedens ad magnitudinum contemplationem pro ea, quam in se habet, rationis facultate videtur & omnia determinare, quæ in magnitudinibus determinata non sunt, & ipsam analogia infinitatem his tribus vinculis cohercere. Sciendum & illud est, nomen commune medie in ea, quæ magis est particularis, natura positum esse. nam & quæ potest spatium contentum rationalibus longitudine commensurabilibus, media omnino est rationalium illarum; & quæ potest spatium rationali, & irrationali contentum. attamen neutram harum appellat mediam, sed quæ potest ante dictum spatium. Illud quoque animadvertendum est, Euclidem ubique potentias denominatiue à potentibus appellare; rationales quidem à rationali, medium autem à media, & contemplationem, quæ circa medias versatur, similem facere rationalibus. etenim has vel longitudine, vel potentia solum commensurabiles, quemadmodum illas esse dicit. & spatium quidem, quod medijs longitudine commensurabilibus continetur, medium esse, quemadmodum illic spatium rationalibus contentum rationale. spatium vero contentum medijs potentia solum commensurabilibus quandoque rationale, quandoque medium; & quod rationalibus potentia solum commensurabilibus continetur, medium esse. quare medium quidem tripliciter, rationale vero dupliciter contingit, & videtur ea, quæ inter medias longitudine commensurabiles proportionalis interijcitur, & quæ inter rationales potentia solum commensurabiles omnino media esse; quæ vero inter medias potentia solum commensurabiles interdum quidem rationalis, interdum vero media. ideoq; & incommensurabilis potentia interdum rationalis, interdum media est. due enim mediæ potentia commensurabiles esse possunt, quemadmodum & due rationales potentia commensurabiles. existimandum igitur est analogiam causam esse ortus contentorum spaciolorum: ut pote quæ inter extrema; hoc est vel inter duas rationales mediam, vel inter duas medias rationalem constituit, & totum nexum quandoque similem facit extremis, quandoque ipsis dissimilem interijcit.

Media.

Potentias denominatiue a potentibus appellat Euclides. Contemplatio quæ circa medias similis est ei, quæ circa rationales versatur.

Medium tripliciter, rationale vero dupliciter contingit.

F. C. COMMENTARIUS.

Sint mediæ potentia solum commensurabiles AB BC, & sit AB R R 54, & BC R R 24, erit rectangulum ipsis contentum R R 1296, videlicet 6, quod est rationale. Rursus sint mediæ potentia solum commensurabiles R R 128, & R R 22, rectangulum, quod ipsis continetur, erit R R 9216, videlicet R R 96, quod est medium. At vero R R 54, & R R 24: itemq; R R 128, & R R 72 esse potentia solum commensurabiles patet tunc ex 28, & 29, hinc, tunc ex eo, quod si R R 54 per R R 24 diuidatur, proueniet R R $\frac{9}{4}$, hoc est R R $\frac{9}{4}$. erit igitur R R 54 ad R R

EVCLID. ELEMENT.

24. ut R 3 ad R 2. Rursus si B R 128 dividatur per R R 72, proueniet R R $\frac{4}{3}$. quare R R 128 ad R R 72 erit ut R 4 ad R 3.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXVII.

Medium non superat medium rationali.

Si enim fieri potest, medium A B superet medium A C rationali D B. & exponatur rationalis E F, atque ipsi quidem A B æquale ad E F applicetur parallelogrammum rectangulum F H, latitudinem faciens E H: ipsi vero A C æquale auferatur F G. reliquum igitur B D reliquo K H est æquale. rationale autem est B D. ergo & K H rationale. quoniam igitur medium est utrumque ipsorum A B, A C; estq; A B æquale F H, & A C æquale F G: erit & utrumque ipsorum F H F G medium: & ad rationalem E F applicata sunt. rationalis igitur est utraque earum H E E G, & ipsi E F longitudine incommensurabilis. & quoniam rationale est D B, et ipsi K H æquale; & K H rationale erit. est autem ad E F applicatum. rationalis igitur est G H, & ipsi E F incommensurabilis longitudine. sed & E G est rationalis, & ipsi E F longitudine incommensurabilis. ergo E G incommensurabilis est ipsi G H longi-

93. huius.

ex. huius.

Coro. 23. huius.

10. huius.

6. huius.

14. huius.

4. secundi.
17. huius.

tudine. atque est ut E G ad G H, ita quadratum ex E G ad rectangulum, quod E G, G H continetur. incommensurable igitur est quadratum ex E G rectangulo E G H. sed quadrato quidem ex E G commensurable sunt ex E G, G H quadrata. utraque enim sunt rationalia. rectangulo autem E G H commensurable est quod bis E G G H continetur; est enim ipsius duplum. ergo quadrata ex E G, G H incommensurable sunt ei, quod bis E G, G H continetur. & utraque igitur, videlicet quadrata ex E G G H, & quod bis continetur E G G H, hoc est quadratum ex E H, incommensurable sunt quadratis ex E G G H. sunt autem rationalia, quæ ex E G G H quadrata. irrationalis igitur est quadratum ex E H: ac propterea E H est irrationalis. sed & rationalis. quod fieri non potest. non igitur medium superat medium rationali. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIUS.

Rationale autem non superare rationale nisi rationali, hoc modo demonstrabitur.

Sint parallelogramma rectangula A B A C rationalia. Dico D B, quo parallelogrammum A B ipsum A C superat, rationale esse. quoniam enim A B A C sunt rationalia, & inter se commensurable sunt. atque est tota magnitudo A B ex magnitudinibus A C D B composita vni ipsarum A C commensurabilis. ergo & reliquæ D B commensurabilis erit. sed A B est rationalis. quare & D B rationale sit necesse est. quod nos ad 25 huius demonstramus.

15. huius.

PROBLEMA III. PROPOSITIO. XXV III.

Medias inuenire potentia solum commensurabiles, quæ rationale contineant.

Exponentur

Exponatur duæ rationales potentia solum commensurabiles AB ; & sumatur ipsarum AB media proportionalis C : fiatq; ut A ad B , ita C ad D . quonia igitur AB rationales sunt, potentia solum commensurabiles, erit quod ipsis $A B$ continetur rectangulum, hoc est quadratum ex C medium. ergo recta linea C media est. & quoniam ut A ad B , ita est C ad D ; suntq; AB potentia solum commensurabiles: & CD potentia solum commensurabiles erunt. est autem recta linea C media. media igitur est & D . quare CD mediæ sunt potentia solum commensurabiles. Dico etiam ipsas rationales continere. quoniam enim est ut A ad B , ita C ad D , erit permutando ut A ad C , ita B ad D . sed ut A ad C , ita C ad B . ergo & ut C ad B , ita B ad D . quod igitur ipsis $C D$ continetur quadrato ex B est æquale. rationale autem est quadratum ex B . ergo & quod continetur $C D$ rationale erit. Invenit igitur sunt mediæ potentia solum commensurabiles, quæ rationale continent. atque illud est. quod facere oportebat.

12. sexti.
22. huius.

10. huius,
24. huius.

17. sexti.

F. C. COMMENTARIUS.

Fiatq; ut A ad B , ita C ad D Sit A 3, & B 6, erit rectangulum, quod ipsis continetur B 54, & recta linea C inter ipsas AB media proportionalis, quæ ipsam potest B 54, itaque fiat ut A ad B , hoc est ut B 81 ad B 36, ita C videlicet B 54 ad aliam, quæ sit D , hoc modo. multiplicetur 54 per 36, fiet 1944. ergo B 1944 est rectangulum, quod continetur B 36, & B 54 ex primo antecedentium, quod quidem applicatum ad B 81 latitudinem faciet B 24 ex secundo eorundem. quare rectangulum contentum B 81, & B 24 est æquale ei, quod continetur B 36, & B 54. est igitur ut B 81 ad B 36, ita B 54 ad B 24.

PROBLEMA V. PROPOSITIO. XXIX.

Medias invenire potentia solum commensurabiles, quæ medium contineant.

Exponantur tres rationales potentia solum commensurabiles $A B C$, sumaturq; ipsarum $A B$ media proportionalis D : & fiat ut B ad C , ita D ad E . Quoniam igitur $A B$ rationales sunt, potentia solum commensurabiles, erit quod $A B$ continetur rectangulum, hoc est quadratum ex D medium. ergo D media est. & quoniam $B C$ sunt rationales potentia solum commensurabiles, atque est ut B ad C , ita D ad E ; rectæ lineæ $D E$ potentia solum commensurabiles erunt. est autem D media. ergo & E media est; ac propterea $D E$ mediæ sunt potentia solum commensurabiles. Dico ipsas etiam medium continere. Quoniam enim est ut B ad C , ita D ad E , erit permutando ut B ad D , ita C ad E . ut autem B ad D , ita est D ad A . ergo & ut D ad A , ita C ad E . quod igitur $A C$ continetur rectangulum est æquale contento $D E$. est autem quod continetur $A C$ medium. ergo & quod continetur $D E$ medium erit. Invenit igitur sunt mediæ potentia solum commensurabiles, quæ medium continent, ut facere oportebat.

*

22. huius.

10. huius.

24. huius.

16. sexti.
22. huius.

F. C. COMMENTARIUS.

Et fiat ut B ad C , ita D ad E Sit A 4, B 8, et C 6, erit rectangulum, quod $A B$ continetur

EVLID. ELEMENT.

venietur 128 , & recta linea D inter ipsas A B media proportionalis 128 fiat igitur 128 ad C , hoc est 128 ad 128 64 ad 128 36 , ita D videlicet 128 ad aliam, quae sit E . eodem modo, quo supra, multiplicetur 128 per 36 , fit 4608 , & 4608 dividatur per 64 , exeat 72 . ergo 128 72 erit quarta proportionalis A , quam querebamus.

L E M M A. I.

Invenire duos numeros quadratos, ita ut qui ex ipsis componitur etiam quadratus sit.

- Exponantur duo numeri AB BC , qui vel pares sint, vel impares. & quoniam siue a par par auferatur, siue ab impari impar, reliquus par est; erit AC numerus par. secetur AC bifariam in D . sint autem AB BC vel similes plani, vel quadrati, qui & ipsi similes plani sunt. ergo qui fit ex AB BC una cum quadrato ex CD est equalis ei, qui fit ex BD quadrato. atque est quadratus, qui fit ex AB BC ; ostensum enim est si duo similes plani se se multiplicantes aliquem faciant, factum quadratum esse. Inuenti igitur sunt duo quadrati numeri, videlicet qui fit ex AB BC , & qui fit ex CD , qui quidem inter se compositi quadratum numerum faciunt, nempe cum, qui fit ex BD . quod ipsum facere oportebat.

C O R O L L A R I U M.

Et manifestum est rursus inuentos esse duos numeros quadratos, & qui fit ex B D , & qui ex CD , ita ut ipsorum excessus, videlicet qui fit ex AB BC , sit quadratus, quando AB BC similes plani sint. Quando autem non sint similes plani, inuenti sunt duo quadrati & qui fit ex B D , & qui ex CD , quorum excessus, qui ex AB BC non est quadratus.

F. C. C O M M E N T A R I V S.

- A Et quoniam siue a pari par auferatur, siue ab impari impar reliquus par est] ex 24, & 26 noni libri.
 B Ergo qui fit ex AB BC una cum quadrato ex CD est equalis ei, qui fit ex BD quadrato] Hoc demonstratur a Barlaam Monacho in theoremate 6 eorum, quae nos ad 15 noni libri apposuimus.
 C Ostensum est enim si duo similes plani se se multiplicantes aliquem faciant, factum planum esse] in prima propositione noni libri.
 D Quando autem non sint similes plani, inuenti sunt] Sint enim duo numeri AB BC , qui non sint similes plani, & AC bifariam secetur in D . rursus qui fit ex AB BC una cum quadrato ex CD est equalis ei, qui ex BD ex 6 Barlaam Monachi iam dicto. sed qui fit ex AB BD non est quadratus. si enim quadratus sit, erunt numeri AB BD similes plani. quod non ponitur. quadrati igitur numeri sunt, qui sunt ex BD , & DC , quorum excessus, qui fit ex AB BC non est quadratus.

L E M M A. I I.

Invenire duos quadratos numeros, ita ut qui ex ipsis componitur non sit quadratus.

Sit

Sit enim qui ex A

BC quadratus, ut dictum est, & par numerus C A; fac-

turq; CA bifariam in D. perspicuū est quadratum ex AB BC unā cum quadrato ex CD æquale esse ei, qui fit ex BD quadrato. auferatur unitas DE. ergo quadratus ex AB BC unā cum quadrato ex CE minor est quadrato ex BD. Dico igitur quadratum ex AB BC unā cum quadrato ex CF, quadratum non esse. si enim est quadratus vel æqualis est quadrato ex BE, vel eo minor, nō autem maior, ut ne unitas secetur; neque qui ex AB BC unā cum quadrato ex CD, qui est æqualis quadrato ex BD æqualis sit quadrato ex AB BC unā cum quadrato ex CE. sit primum; si fieri potest, qui ex AB BC unā cum quadrato ex CE æqualis quadrato ex BE; & sit GA duplus ipsius DE unitatis. Quoniam igitur totus AC totius CD est duplus, quorum AG est duplus DE; erit & reliquus CG ipsius GE duplus. ergo GC in puncto E bifariam secatur; ac propterea qui ex GB BC unā cum quadrato ex CE æqualis est ei, qui fit ex BE quadrato. sed & qui ex AB BC unā cum quadrato ex CE æqualis ponitur quadrato ex BE; ergo qui ex GB BC unā cum quadrato ex CE est æqualis ei, qui ex AB BC unā cum quadrato ex CE; & communi detracto quadrato ex CE concludetur AB ipsi GB æqualis. quod est absurdum. non igitur qui ex AB BC unā cum quadrato ex CE æqualis est quadrato ex BE. Dico neque quadrato ex BE minorem esse. si enim fieri potest, sit quadrato ex BF æqualis, & ipsius DF duplus ponatur HA. concludetur rursus HC duplus CF, ita ut & HC in F bifariam dividatur; ac propterea qui ex HB BC unā cum quadrato ex CF æqualis sit quadrato ex BF; ponitur autem & qui ex AB BC unā cum quadrato ex CE æqualis quadrato ex BF; ergo sequitur qui ex AB BC unā cum quadrato ex CE æqualem esse ei, qui ex HB BC unā cum quadrato ex CF. quod est absurdum. non igitur qui ex AB BC unā cum quadrato ex CE est æqualis minori, quā sit quadratus ex BE. ostensum est autem neque ipsi quadrato ex BE, neque maiori eo æqualem esse. ergo qui fit ex AB BC unā cum quadrato ex CE non est quadratus. & cum fieri possit, ut idem pluribus modis ostendatur, unus qui proxime dictus est nobis sufficiat, ne longam tractationem longius producamus.

F. C. COMMENTARIUS.

Perspicuum est quadratum ex A B C unā cum quadrato ex CD æqualem esse ei, qui fit ex BD quadrato. Ex 6. Barlaam Monachi.

Non autem maior ut ne unitas secetur. si enim fieri potest sit maior, vel igitur eius latus est BD, vel minus quā BD. & si quidem BD, erit totum parti æquale. quod fieri non potest. si vero minus quā BD, cum sit maius quā BE, unitas secabitur. quod idem fieri non potest.

Erit & reliquus CG ipsius GE duplus. Ex 7 vel 11 septimi libri.

Et communi detracto quadrato ex CE concludetur AB ipsi C B æqualis. Relinquetur enim qui ex AB BC æqualis ei, qui ex GB BC. sed qui ex AB BC ad eum, qui ex GB BC est ut AB ad BG, ex 17 septimi. ergo AB ipsi BG est æqualis. quod est absurdum.

Concludetur rursus HC duplus CF. Quoniam enim AC ipsius CD est duplus, quorum AH ponitur duplus ipsius DF, erit & reliquus HC reliqui CF duplus.

Quod est absurdum. Est enim qui ex AB BC maior eo, qui ex HB BC, quod AB sit maior quā BH. & similiter quadratus ex CE maior quadrato ex CF; quoniam AC quā CF est maior.

PROBLEMA VI. PROPOSITIO XXX.

Inuenire duas rationales potentia solum commensurabiles, ita ut maior plus possit, quā minor quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

Exponatur

EVCLID. ELEMENT.

Ex coroll.
primi lem.
antecedentium.
Pet. Corol.
6. huius.

Exponatur enim quædam rationalis AB, & duo quadrati numeri CD DE, ita ut ipsorum excessus CE non sit quadratus. Describatur autem in recta linea AB semicirculus AFB: fiatque ut DC ad CE, ita ex AB quadratum ad quadratum ex AF; & FB iungatur. Quoniam igitur est, ut quadratum ex BA ad quadratum ex AF, ita DC ad CE; habebit quadratum ex BA ad quadratum ex AF proportionem eam, quam

6. huius.

diffi. 9. huius

9. huius:

Ex 47. primi, uel ex coroll. ante 15. huius.

9. huius.

47. primi.

numerus DC ad CE numerum. ergo quadratum ex BA quadrato ex AF est commensurabile, sed rationale est quadratum ex A B. ergo & quadratum ex AF rationale erit; ac propterea recta linea AF est rationalis. & quoniam DC ad CE proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque quadratum ex B A ad quadratum ex A F proportionem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. incommensurabilis igitur est recta linea BA ipsi AF longitudine. ergo AB AF rationales sunt potentia solum commensurabiles. Quod cum sit ut DC ad CE, ita quadratum ex BA ad quadratum ex AF, erit per conversionem rationis ut CD ad DE, ita quadratum ex AB ad quadratum ex BF. sed CD ad DE proportionem habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. ergo & quadratum ex AB ad quadratum ex BF proportionem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & ob id recta linea AB ipsi BF longitudine est commensurabilis. atque est quadratum ex AB æquale quadratis ex AF FB. ergo AB plus potest, quam A F quadrato rectæ lineæ B F sibi commensurabilis longitudine. Inuentæ igitur sunt duæ rationales potentia solum commensurabiles BA AF, ita ut maior BA plus possit, quam minor AF, quadrato ipsius FB, sibi longitudine commensurabilis. quod facere oportebat.

SCHOLIUM.

Ex hoc loco inuentionem aggreditur reliquarum irrationalium, ac primum earum, quæ per compositionem sunt; præmittit autem theorematâ hæc, utpote ex quibus eiusmodi irrationalium natura appareat.

PROBLEMA VII. PROPOSITIO XXXI.

Inuenire duas rationales potentia solum commensurabiles. ita ut maior plus possit, quam minor quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

Exponatur rationalis AB, & duo numeri quadrati CE ED, ita ut qui ex ipsis componitur non sit quadratus. atque in recta linea AB semicirculus AFB describatur: & fiat ut DC ad CE, ita quadratum ex AB ad quadratum ex AF; & iuncta FB, similiter ostendemus, ut in antecedente, BA AF rationales esse potentia solum commensurabiles. Et quoniam est ut DC ad CE, ita quadratum ex B A ad id quod ex AF quadratum; erit per conversionem rationis ut CD ad DE, ita quadratum ex AB ad quadratum ex BF. sed CD ad DE proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. non igitur quadratum ex AB ad quadratum ex BF proportionem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum

numera

merum. ergo AB ipsi BF longitudine est incommensurabilis. & B A plus potest, quàm AF quadrato rectæ lineæ BF sibi incommensurabilis longitudine. quare AB BF rationales sunt potentia solum commensurabiles, & AB plus potest, quàm AF quadrato rectæ lineæ BF sibi longitudine incommensurabilis.

L E M M A.

Si sint duę rectę lineę in proportionē aliqua, erit vt recta linea ad rectam lineam, ita rectangulum duabus rectis lineis contentum ad quadratum minoris.

Sint duę rectę lineę AB BC in proportionē aliqua. Dico vt AB ad B C, ita esse rectangulum ex AB BC ad quadratū ex B C. describatur enim ex BC quadratum BDEC, & compleatur AD parallelogrammū. manifestum est ut AB ad B C, ita esse AD parallelogrammum ad parallelogrammum BE. atque est A D quidem, quod AB B C continetur; est enim B C ipsi B D æqualis. B E vero est quadratum ex B C. vt igitur A B ad B C, ita rectangulum ex AB BC ad id, quod ex BC quadratum. quod demonstrare oportebat.

2. sexib.

PROBLEMA VIII. PROPOSITIO. XXXII.

Inuenire duas medias potentia solum commensurabiles, quæ rationale contineant, ita ut maior plus possit, quàm minor quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

Exponantur enim duę rationales potentia solum commensurabiles A B, ita vt A maior plus possit, quàm B minor, quadrato rectę lineę sibi longitudine commensurabilis. & sit rectangulo ex AB æquale quadratum, quod sit à recta linea C. medium autem est quod ex AB. ergo & quadratum ex C medium erit, & ipsa C media.

30. huius.

82. huius.

at quadrato quod fit ex B æquale sit rectangulum ex CD. rationale autem quod ex B. ergo & rectangulum ex CD est rationale. & quoniam est vt A ad B, ita rectangulum ex AB ad id, quod ex B quadratum; sed rectangulo quidem ex A B æquale est quadratum ex C; quadrato autem ex B æquale rectangulum ex CD: erit vt A ad B, ita quadratum ex C ad id, quod ex CD rectangulum. Sed vt quadratum ex C ad rectangulum ex CD, ita recta linea C ad ipsam D. vt igitur A ad B, ita C ad D. commensurabilis autem est A ipsi B potentia solum. ergo & C ipsi D potentia solum est commensurabilis. atque est C media. media igitur & D. & quoniam est vt A ad B, ita C ad D, & A plus potest, quàm B quadrato rectæ lineę sibi commensurabilis longitudine; & C plus poterit, quàm D quadrato rectæ lineę sibi longitudine commensurabilis. Inuenit igitur sunt duę medię potentia solum commensurabiles C D, quæ rationale continent, & C plus potest quàm D quadrato rectæ lineę sibi commensurabilis longitudine. similiter autem ostendetur inueniri posse duas medias potentia solum commensurabiles, & continentes rationale, ita ut maior plus possit, quàm minor quadrato rectę lineę sibi incommensurabilis longitudine, quādo A plus possit, quàm B quadrato rectæ lineę sibi longitudine incommensurabilis.

Ex antecede
ti lemmate.

1. forti.

10. huius.

24. huius.

15. huius:

✱

EVCLID. ELEMENT.

F. C. COMMENTARIUS.

Similiter autem ostendetur inueniri posse duas medias potentia solum commensurabiles] Maneant eadem quae supra, & A plus posset, quàm B quadrato rectae lineae sibi longitudine incommensurabilis, similiter ut ante demonstrabitur, rectam lineam D median esse. Et quoniam ut A ad B, ita C ad D, & A plus potest, quàm B quadrato rectae lineae sibi incommensurabilis longitudine, & C plus poterit, quàm D quadrato rectae lineae sibi incommensurabilis longitudine, ergo rursus inuentae sunt duae mediae potentia solum commensurabiles C D, rationale continentes, & C plus potest quàm D quadrato rectae lineae sibi longitudine incommensurabilis.

Sit A 8, B R 28. erit rectangulum, quod ipsis continetur R 1792, & recta linea C R R 1792, quae media est. fiat ut 8 ad R 28, ita R R 1792 ad aliam, quae sit D. erit ea R R 343. ergo R R 1792 & R R 343 duae mediae sunt, potentia solum commensurabiles, quae rationale continent, videlicet 28. & maior plus potest, quàm minor quadrato rectae lineae sibi longitudine commensurabilis. nam si à quadrato maioris auferatur quadratum minoris, hoc est si à R 1792 auferatur R 343, relinquetur R 567. & sunt duae mediae R R 1792 R R 567 inter se longitudine commensurabiles, videlicet ut 4 ad 3. si enim R R 1792 diuidatur per R R 567, prouenit R R 3 $\frac{1}{87}$, quae est $1 \frac{1}{3}$, hoc est $\frac{4}{3}$. Rursus sit A 8. B R 20, erit rectangulum ipsis contentum R 1280, & recta linea C R R 1280. fiat ut 8 ad R 20, ita R R 1280 ad aliam, quae sit D. erit ea R R 125. sunt igitur R R 1280, & R R 125 duae mediae, quae rationale continent, videlicet 20, & maior plus potest, quàm minor quadrato rectae lineae sibi longitudine incommensurabilis. sed sit A 3 B R 6, rectangulum ipsis contentum erit R 54, & recta linea C R R 54. Rursus fiat ut 3 ad R 6, ita R R 54 ad aliam, erit ea R R 24. quare R R 54, & R R 24 sunt duae mediae potentia solum commensurabiles, quae rationale continent, videlicet 6; & maior plus potest, quàm minor quadrato rectae lineae sibi longitudine incommensurabilis.

L E M M A

Si fuerint tres rectae lineae in proportionem aliquam, erit ut prima ad tertiam, ita rectangulum contentum prima, & media ad id, quod media, & tertia continentur.

Sint tres rectae lineae in proportionem aliquam AB BC CD. Dico ut A B ad C D, ita esse rectangulum contentum AB BC ad id quod B C CD continentur. Ducatur enim à puncto A ipsi AB ad rectos angulos AE; ponaturq; AE ipsi BC aequalis; & per E quidem ipsi AD parallela ducatur EG; per BCD vero ducantur BF CH DG parallelae ipsi A E. quoniam igitur est ut AB ad BC, ita AF parallelogrammum ad parallelogrammum B H; ut autem BC ad CD, ita parallelogrammum B H ad ipsum C G : erit ex equali ut AB ad CD, ita AF parallelogrammum ad parallelogrammum C G. & est parallelogrammum quidem A F, quod AB BC continentur; namque AE est aequalis BC; parallelogrammum vero C G est, quod continentur BC CD; etenim BC ipsi CH est aequalis. Si igitur fuerint tres rectae lineae in proportionem aliquam, erit ut prima ad tertiam, ita rectangulum, quod continentur prima & media ad rectangulum media & tertia contentum, quod oportebat demonstrare.

PROBLEMA IX. PROPOSITIO. XXXIII.

Inuenire duas medias potentia solum commensurabiles, quae medium contineant, ita ut maior plus posset, quàm minor, quadrato rectae lineae sibi longitudine commensurabilis.

Exponantur

Exponentur tres rationales A B C, potentia solum commensurabiles, ita vt A plus possit, quàm C quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine: & sit rectangulo ex ipsis A B æquale quadratum, quod fit ex D. medium autem est rectangulum ex A B. ergo & quadratū ex D medium erit; & recta linea D media. rect angulo autem ex B C æquale sit rectangulum ex D E. Quoniam igitur est vt rectangulum ex A B ad rectangulum ex B C, ita recta linea A ad ipsam C; sed rectangulo qui-

25

22. huius.

dem ex A B æquale est quod fit ex D quadratum; rectangulo autem ex B C æquale rectangulum ex D E: erit vt A ad C, ita quadratum ex D ad id, quod ex D E, rectangulum. sed ut quadratum ex D ad rectangulum ex D E, ita D ad E, & ut igitur A ad C, ita D ad E. commensurabilis autem est A ipsi C potentia solum. ergo & D ipsi E potentia solum est cōmensurabilis. arque est D media. media igitur & E. itaque qm̄ est vt A ad C, ita D ad E; & A plus potest, quàm C quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis: & D plus poterit, quàm E quadrato rectæ lineæ sibi cōmensurabilis longitudine. Dico præterea rectangulum ex D E medium esse. Quoniam enim rectangulo ex B C æquale est, quod ex D E rectangulum; medium autem est quod ex B C. ergo & quod ex D E medium erit. Inuenit igitur sunt duæ mediæ potentia solum commensurabiles D E, quæ medium continēt, ita vt maior plus possit, quàm minor quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Rursus similiter inuenientur duæ mediæ potentia solum commensurabiles. & medium continentes, ita vt maior plus possit, quàm minor quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine; quando scilicet A plus possit, quàm C quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. quod facere oportebat.

Ex anteced. lem̄ate.

Lem. 23. huius.

24. huius.

15. huius.

22. huius;

F. C. COMMENTARIUS.

Sit A B E R 48, C R 28, rectanguli. quod ipsis A B cōtinetur, erit R 3072. & recta linea D R 3072, quæ est media. fiat vt A ad C, ita D ad aliā, quæ sit E. erit E R 588. ergo R R 3072, & R R 588 duæ mediæ sunt potentia solū commensurabiles, quæ medium continent, & maior plus potest, quàm minor quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. si enim à quadrato maioris auferatur quadratum minoris, hoc est si à R 3072 auferatur R 588, reliqua erit R 972. suntq; R R 3072, & R R 972 duæ mediæ longitudine inter se commensurabiles, vt 4 ad 3. nā si R R 3072 diuidatur per R R 972, exibat R R 3, $\frac{13}{81}$ quæ est 1. $\frac{1}{3}$ hoc est $\frac{4}{3}$. rursus sit A 8, B R 48, C R 20, erit D eadē, quæ supra, videlicet R R 3072. fiat vt A ad C, ita D ad aliā, quæ sit E. erit E R R 300. sunt igitur R R 3072, & R R 300 duæ mediæ potentia solum commensurabiles, quæ medium continent, & maior plus potest, quàm minor quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. sed sit A R 6, B R 3, C R 2, erit D R R 18. fiatq; vt A ad C, ita R R 18 ad aliā, quæ sit E, erit E R R 2. ergo R R 18, & R R 2 sunt duæ mediæ potentia solum commensurabiles, & medium continentes, quarum maior plus potest, quàm minor, quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine.

L E M M A I.

Sit triangulum orthogonium ABC, rectum habens angulum B A C, & ducatur AD perpendicularis. Dico rectangulum quidem contentum CB BD æquale esse quadrato, quod fit ex B A; cōtentum vero B C C D æquale quadrato ex C A; & contentum B D D C æquale quadrato ex

D A

DA: & denique contentum BC AD rectangulo, quod BA, A C continetur, æquale esse.

Quoniam enim in triangulo orthogonio ab angulo recto ad basim perpendicularis ducta est AD, triagula ABD ADC similia sunt, & toti triangulo ABC, & inter se se. et quoniam simile est ABC triangulum triangulo ABD, erit vt C B ad BA, ita AB ad BD. ergo rectangulū, quod CB BD continetur quadrato ex AB est æquale. Eadem ratione et rectangulum contentum BC CD æquale est quadrato ex AC. rursus quoniā in triangulo orthogonio ab angulo recto ad basim perpendicularis ducitur, ducta basis partiū media proportionalis est. quare ut BD ad DA, ita AD ad DC; ac propterea rectangulum, quod BD DC continetur est æquale quadrato ex AD. Dico & rectangulum contentum BC AD ei, quod BA AC continetur, æquale esse. Quoniam enim, vt diximus, triangulum ABC triangulo ACD est simile, vt BC ad CA, ita erit BA ad AD. si autem quattuor rectę lineę proportionales fuerint, rectangulum extremis contentum est æquale ei, quod medijs continetur. ergo rectangulum contentum BC AD contento BA AC æquale erit. Dico præterea si describamus parallelogrammum rectangulum EC, & ipsum AF compleamus, rectangulum E C ipsi AF æquale esse. vtrūque enim ipsorum duplum est triaguli ABC. atque est rectangulū quidem EC id, quod BC AD continetur; rectangulum vero AF quod continetur BA AC. At rectangulum, quod cōtinetur BC AD rectangulo BA AC contento est æquale.

L E M M A II.

Si recta linea in partes inæquales secetur, erit vt maior pars ad minorem, ita rectangulum contentum tota, et maiori parte ad rectangulū, quod tota, & minori continetur.

Recta enim quædam linea AB secetur in partes inæquales ad E. Dico vt AE ad EB, ita esse rectangulum contentum BA AC ad id, quod AB BE continetur. describatur enim ex AB quadratum ACDB; & per E qui dem alterutri ipsarum AC DB parallela ducatur EF. perspicuum est vt AE ad EB, ita esse AF parallelogrammum ad parallelogrammum FB. atque est AF quidē parallelogrammum quod B A AE continetur; etenim CA ipsi AB est æqualis; parallelogrammum vero FB est quod continetur AB BE; æqualis enim est DB ipsi BA. vt igitur AE ad EB, ita rectangulum contentum BA AE ad id, quod AB BE cōtinetur. quod oportebat demonstrare.

L E M M A . I I I .

Si sint duæ rectæ lineæ inæquales, minor autem ipsarum in partes æquales secetur, rectangulum contentum duabus rectis lineis duplum est eius, quod maiori, & dimidia minoris continetur.

Sint

Sint duæ rectæ lineæ inæquales AB BC, quarum maior AB: & secetur BC bifariam in puncto D. Dico rectangulum contentum AB BC duplum esse eius, quod AB BD continetur. ducatur enim à puncto B ipsi BC ad rectos angulos BE; ponaturq; BE ipsi BA æqualis, & figura describatur. Quoniam igitur est vt BD ad DC, ita parallelogrammum BF ad DC parallelogrammum; erit componendo vt BC ad CD, ita parallelogrammum BG ad ipsum GD. est autem BC dupla ipsius CD. ergo & parallelogrammum BG parallelogrammi GD est duplum: atque est BG quidem, quod AB BC continetur; etenim AB est æqualis BE: DG vero est quod continetur AB BD: nam BD ipsi DC, & AB ipsi DE est æqualis. quod oportebat demonstrare.

1. sexti.

PROBLEMA X. PROPOSITIO. XXXIII.

Inuenire duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale; rectangulum vero, quod i ipsis continetur, medium.

Exponantur duæ rationales potentia solum commensurabiles AB BC, ita vt maior AB plus possit, quàm minor BC quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. & secetur BC, bifariam in D, quadrato, quod fit ab alterutra ipsarum BD DC æquale parallelogrammum ad rectam lineam AB applicetur, deficiens figura quadrata: & sit quod continetur AE EB. describatur in recta linea AB semicirculus AFB; ducaturq; ipsi AB ad rectos angulos EF, & AF FB iungantur. Quoniam igitur duæ rectæ lineæ AB BC inæquales sunt, & AB plus potest, quàm BC quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis; quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori BC, hoc est quadrato dimidiæ ipsius æquale parallelogrammum applicatum est ad AB, deficiens figura quadrata, quod quidem AE EB continetur: erit AE ipsi EB incommensurabilis. atque est vt AE ad EB, ita BAE rectangulum ad rectangulum ABE. rectangulum autem BAE quadrato ex AF est æquale; & rectangulum ABE æquale quadrato ex BF. quadratū igitur ex AF incommensurabile est quadrato ex FB: ideoq; rectæ lineæ AF FB potentia sunt incommensurabiles. & quoniam AB rationalis est, & quadratum, quod fit ex AB erit rationale. ergo & rationale compositum ex quadratis ipsarum AF FB. rursus quoniam rectangulum AEB est æquale quadrato ex EF: ponitur autem rectangulum AEB quadrato etiam ex BD æquale. ergo FE est æqualis BD; ac propterea BC ipsius EF est dupla. rectangulū igitur ABC duplum est rectanguli, quod AB EF continetur. sed rectangulum ABC est medium. ergo & medium quod continetur AB EF. est autem quod AB EF continetur æquale contento AF FB. contentum igitur AF FB medium est, sed & ostensum est rationale, quod componitur ex ipsarum AF FB quadratis. Inuenit igitur sunt duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles AF FB, quæ faciunt compositū quidem ex ipsarum quadratis rationale; rectangulum vero, quod i ipsis continetur, medium. quod facere oportebat.

19. huius.

Per lemma ante 19. huius uel per 18. sexti.

19. huius.
Per 2. lemma ex antecedentibus.
Per 1. lemma
Per 9. diffi.

Per 3. lemma
22. huius.
Cor. 24. huius.
Per 1. lemma

SCHOLIUM.

At vero ex duobus spacijs irrationalibus inter se compositis totum fieri rationale, ex hoc cognoscemus.

Exponatur

E V C L I D I S E L E M E N T.

Ceol. 10. huius.

9. huius.
Ex demon-
stratis. ad 17
huius.
1. secuti.

Exponatur rationalis AB, & duo numeri CD non habentes proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: fiatq; vt C ad D, ita quadratum ex A B ad id quod ex BE quadratum: & descripto quadrato ex AB per E ducatur alterutri laterum parallela EF. Quoniam igitur est vt C ad D, ita quadratum ex A B ad quadratum ex BE; & C ad D proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: erit AB ipsi BE longitudine incommensurabilis. ergo & BA reliquæ AE incommensurabilis est longitudine. vt autē AB est ad utramque ipsarum AE EB, ita quadratum ex AB ad utrumque parallelogrammorum. quadratum igitur ipsis parallelogrammis incommensurable erit. sed quadratum est rationale. irrationalia igitur sunt parallelogramma, quæ rationales sunt partes, & ipsum rationale cōplet.

C . . . D . . .

F. C. C O M M E N T A R I V S.

Sit recta linea AE 8, BC 20. erit BD, vel DC 5: & quadrato ipsius BD, quod est 25 æquale parallelogrammum ad AB applicetur, deficiens figure quadrata. illud autem facile assequemur, si que tradita sunt in lemmate ante 18.

huius repetantur. Itaque in recta linea AB descripto semicirculo AFE; & secta AB bifariam in G, ipsi ad rectos angulos ducatur GH; ponaturq; GK equalis BD. est enim GH maior, quam BD. nam cum AB sit maior, quam BC, erit etiam ipsius AB dimidia maior, quam dimidia BC. deinde per K ipsi AB parallela ducatur KF: atque à puncto F agatur FE ad AB perpendicularis, quæ protendatur in L, ita vt EL sit æqualis EB; & parallelogrammum AL compleatur. erit igitur parallelogrammum AL illud, quod AE EB continetur, & æquale quadrato ipsius FE, hoc est quadrato BD. quare ad rectam lineam AB applicatum est parallelogrammum AL quadrato ipsius BD æquale, & deficiens figura quadrata. & quoniam recta linea AB secatur in partes æquales ad G, & in partes inæquales ad E, erit rectangulum contentum AE EB vnā cum quadrato ipsius GE æquale quadrato dimidiæ AB, hoc est ipsius AG: quadratum autem AG est 16, & rectangulum AEB 5; est enim FE 5, & eius quadratum 25, quod quidem rectangulo AEB est æquale. reliquum igitur quadratum ipsius GE est 11, & recta linea GE 11. ergo AE constans ex AG GE est 4 vnā cum 11, vel 4 plus 11. & EB 4 dempta 11, vel 4 minus 11. vt autē sciamus, quæ sint AF FB, necesse erit prius inuenire quadrata ipsarum AE EB. quare non inutile visum est theorematum nonnulla hic apponere, attinentia ad eas, quæ ex binis, vel pluribus nominibus constant, & ad apotomas.

g. secundi.

T H E O R E M A. I.

Data recta linea, quæ sit ex binis, vel pluribus nominibus, & quadratum eius datum erit.

Sit AB ex binis nominibus AC CB: sitq; AC 4, CB 11. Di- co quadratum eius datum esse. Quoniam enim AB utcumque secatur in puncto C, erit ex quarta propositione secundi libri, quadratum totius æquale quadratis partium; & rectangulo, quod his dictis partibus continetur. itaque quadratum AC est 16, & quadratum CB 11. rectangulum vero contentum AC CB est 44, cuius duplum 88, cuius duplum 176, cuius duplum 704. ergo quadratum AB est 27 plus 704.

A 4 C 11 B

Sit AD ex tribus nominibus AB BC CD ; sitq; AB 6, BC 10, & CD 3. Dico et quadratum ipsius dari. nā cum AD secetur in duobus punctis BC , erit quadratum totius aequale rectangulis, quae singulis partibus ad singulas applicatis continentur, ex ijs, quae à nobis demonstrata sunt ad secundā propositionē secūdi li. tri. quadratum igitur AB est 36, & rectangulū contentū AB BC est R 360; contentum vero AB CD est R 108, & rursus contentum AB BC est R 360, & quadratum BC est 100. pretereā rectangulum, quod continetur BC CD est R 30, & quod rursus continetur AB CD R 108; & quod continetur BC CD R 30. & denique quadratū CD est 3. sed duplum R 360 est R 1440, & duplum R 108 est R 432; duplum vero R 30 est R 120. quare summa totius erit 49 plus R 1440 plus R 432 plus R 120, quod est ipsius AD quadratum. Et eodem modo in alijs faciemus quotcumque nomina habeant.

THEOREMA II.

Datis duabus rectis lineis, quae ex binis, vel pluribus nominibus constent, & rectangulum ipsis contentum datum erit.

Sit rectae lineae AB CD ; constetq; AB ex binis nominibus AE EB ; & sit AE 5, EB 12; CD vero constet ex CF FD , & sit CF 4 FD 7. Dico rectangulum, quod ipsis continetur, datum esse. Quoniam enim duae rectae lineae AB CD vicinque secantur in punctis E F , rectangulum ipsis cōtētū est aequale rectangulis, quae vnaquaq; partem vnius ad vnaquāq; partē alterius applicata, continentur, ex ijs quae nos demonstrauimus ad primā propositionē secūdi libri theoremate primo. rectangulū igitur contentū 4 & 5 est 20, & cōtētū 4, & R 12 est R 192. quod autē cōtinetur R 7, & 5 est R 175, & quod continetur R 7, & R 12 est R 84. totius ergo summa est 20 plus R 292 plus R 175 plus R 84. quod est rectangulum ipsis AB CD contentum. non aliter inuenietur rectangulum contentum duabus rectis lineis, quae ex pluribus nominibus constent.

THEOREMA III.

Datę apotomes quadratum datum erit.

Sit apotome AC , & recta linea ipsi congruens sit CB ; sitq; tota AB 4, BC R 11. erit AC 4 minus R 11. Dico & quadratum ipsius datum esse. ut autem hoc inueniamus, non vtemur quarta propositione secūdi libri, ut ante, sed septima eiusdem. non enim 4, & R 11 sunt partes dictae lineae, sed 4 est tota linea, et R 11 est pars, quae ab ea aufertur. Itaque quoniam AB secatur utcumque in puncto C , erit quadratum totius AB vna cum quadrato vnius partis BC aequale ei, quod bis continetur tota AB , et BC vna cum alterius partis AC quadrato. est igitur quadratum ipsius AB 16, et quadratum BC 11; rectangulum autem, quod tota AB , et BC continetur est R 176, cuius duplum R 704. ergo R 704 vna cum quadrato ex AC est aequale 27; ac propterea quadratum ex AC est 27 minus R 704. qui vero ex quarta propositione secūdi id quadratum sibi inueniendum proponunt, coguntur dicere si minus per minus multiplicetur produci plus. quod verum non esse primus animaduertit Hieronymus Cardanus non solum mathematicus, sed et Philo sophus, ac medicus prestantissimus, ut apparet in libro de regula alizā, quem nuper edidit. Verū quoniam ex eorum operatione error non sequitur, hoc ipsis condonandum est.

THEOREMA IIII.

Datis duabus rectis lineis earum, quas apotomas appellamus, & rectangulum, quod ipsis continetur, datum erit.

Sint duae apotomae datae AC DF ; et ipsi quidem AC cōgruat CB ; ipsi vero DF congruat FE ; sitq; tota AB 8, BC R 12; et sit DE 4, EF R 3. erit AC 8 minus R 12, et DF 4 minus R 3. Dico

Tp &

et rectángulum, quod ipsis continetur, datum esse. Quoniam enim duę rectę lineę AB DE vicinque secantur in punctis C F, erit restan-
guli, quod continetur totis AB DE vna cum rectángulo contento par-
tibus CB FE aequale rectángulo contento tota AB, et parte FE vna
cum contento tota DE, et parte CB, et eo, quod reliquis partibus A
C DF continetur, ex ijs, quae demonstrata sunt a nobis ad primam propositionem secundi libri theo-
remate secundo. itaque rectángulum contentum AB DE est 32, & contentum CB FE est R 36,
hoc est 6; rectángulum vero, quod continetur AB FE est R 192, et quod continetur DE CB est R
192, quae duae radices inter se iunctae faciunt R 768. quare 38 est aequalis R 768 vna cum
eo, quod AC DF continetur. ex quibus sequitur rectángulum contentum AC DF esse 38 minus
R 768. at recentiores ad hoc inveniendum vtuntur 1 theoremate ; et ob id asserunt si minus per
minus multiplicetur producti plus, sed non recte, cum vt endum sit theoremate secundo; neque enim
8, et R 12 sunt partes vnus rectę lineę; immo vero 8 est tota linea, et eius pars R 12, et simi-
liter dicendū de 4 minus R 3. ex ipsorum tamen operatione nullus sequitur error.

T H E O R E M A . V .

Data recta linea, quę sit ex binis, vel pluribus nominibus, & data apotoma, recta-
gulum, quod ipsis continetur, datum erit.

Sit data quidem recta linea AB, quae constet ex bi-
nis nominibus AC CB, vt sit AC 6, CB R 20. data
autem apotome sit DF, et ipsi congruens FE, vt tota
DE sit 4, et EF R 12. erit DF 4 minus R 12. Dico re-
ctánguli, quod ipsis AB DF continetur datum esse. Quo-
niam enim duae rectę lineę AB DE vicinque secantur in punctis CF, erit ex secundo theore-
mate iam dicto rectángulum, quod ipsis AB DE continetur, aequale rectángulis, quae sunt vna-
quaque parte vnus ad vnāquamque partem alterius applicata; videlicet rectángulo contento
DF AC, et contento DF CB; et praeterea rectángulo, quod continetur FE AC, et quod continetur
FE CB. rectángulum autem contentum DE AC vna cum contento DE CB est aequale rectángulo
contento totis AB DE continetur. ex prima secundi libri. Itaque rectángulum contentum DE AC est
24, et contentum DE CB est R 320. rectánguli vero, quod continetur FE AC est R 432, et quod
continetur FE CB R 240. ergo rectángula, quae continentur DF AC, et DF CB, hoc est rectángu-
lum contentum DF AB est 24 plus R 320, minus R 432, et minus R 240. Eodem modo proce-
demus, si rectę lineę AB DE ex pluribus nominibus constent.

Ex quibus apparet si plus per minus, vel minus per plus multiplicetur, producti
minus.

His ita demonstratis constat, quadratum ipsius AE esse 27 plus R 704, et quadratum EB ef-
se 27 minus R 704. quare addito vtrique communi quadrato ex EF, quod est 5, erit quadratum
ex AF 32 plus R 704, et quadratum ex FB 32 minus R 704, rectaq; linea AF radix huius
summae 32 plus R 704, quam radicem vniuersalem appellant, et ita notant, videlicet R V. 32
plus R 704; et similiter BF R V. 32 minus R 704, quarum quidem quadrata inter se iuncta vi-
delicet 32 plus R 704, et 32 minus R 704 faciunt 64, quod est ipsius AB quadratum. prete-
rea quoniam rectángulum, quod continetur rectis lineis AF FB est aequale contento ipsi AB EF,
vt demonstratum iam fuit in primo lemmate; contentum autem AB EF est R 320: erit etiam re-
ctángulum, quod his lineis R V. 32 plus R 704, et R V. 32 minus R 704 continetur R 320.
Hoc autem ita esse ex earum quoque inter se multiplicatione manifestum apparere potest. dispositis
enim his radicibus videlicet R V. 32 plus R 704, et R V. 32 minus R 704, ut quid ex earum
multiplicatione proueniat cognoscamus, operandum est, quemadmodum in simplicibus radicibus;
nimirū multiplicatio earū quadrata inter se, et eius, quod producitur radix erit id, quod queritur.
cū aut quadrata vtriusq; cōstet ex duabus partibus, erit rectánguli, quod totis cōtinetur, ac si lineę
essent, aequale rectángulis, quę sūt singulis partibus minus ad singulas alterius applicatis, ut demon-
stratū est. si igitur 32 in se multiplicentur sunt 1024; rursus si 32, hoc est R 1024 multiplicet R
704 fit R 720896. et ita si 32 multiplicet minus R 704 fit minus R 720896. postremo simul
multiplicetur R 704 per minus R 704 sunt minus 704. totū igitur ex his compositū est 1024 plus
R 720896

PROBLEMA XI. PROPOSITIO. XXXV.

42. អាយុ

Lemma 24

19. huius.

Lemma 2.

Lemma. I.

Lemma 8.

Lemma 1. ad
cc. 34. huius.

Pr 2 quae

EVCLID. ELEMENT.

quæ est 3. sunt igitur hæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles, & faciunt compositum ex eorum quadratis medium; rectangulum vero, quod ipsis continetur, rationale, ut oportebat.

PROBLEMA XII. PROPOSITIO. XXXVI.

Inuenire duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis medium, & rectangulum, quod ipsis continetur, medium, incommensurableque composito ex ipsarum quadratis.

¶ huius:

Exponentur duæ medię potentia solū commensurabiles AB BC, quæ medium contineant, ita ut AB plus possit, quàm B C quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. & in AB semicirculus ADB describatur, & reliqua fiant, quæ ad-

modū in ijs, quæ superius dicta sunt. Quoniam igitur AF incommensurabilis est ipsi FB longitudine, erit & AD ipsi DB potentia incommensurabilis. & quoniam medium est quod fit ex A B, & compositum ex quadratis AD DB est medium. Quod cum rectangulū AFB æquale sit quadrato alterutrius ipsarū BE DF, erit DF æqualis BE; ac propterea BC ipsius FD dupla. rectangulum igitur ABC duplū est eius, quod AB FD continetur. medium autem est rectangulum ABC. ergo & quod continetur AB FD est mediū, atque est æquale contento AD DB. quare & ipsum medium erit. & quoniam incommensurabilis est AB ipsi BC longitudine; commensurabilis autem CB ipsi BE: erit & AB ipsi BE lō gitudine incommensurabilis. ergo & quadratum ex AB incommensurable est rectangulo ABE. sed quadrato quidem ex AB æqualia sunt quæ ex AD DB quadrata: rectangulo autem ABE est æquale rectangulum contentum AB FD, hoc est rectangulum ADB. compositum igitur ex quadratis ipsarum AD DB rectangulo ADB est incommensurable. ergo inuentæ sunt duę rectæ lineæ potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum ex ipsarum quadratis medium: & rectangulum, quod ipsis continetur, medium, & adhuc composito ex ipsarum quadratis incommensurable.

Corol. 14
huius.
1. lemma ad
34. huius.
23. huius.

F. C. COMMENTARIUS.

Sit recta linea AB R R 18, & BC R R 2. diuidaturq; BC bisariam in E, erit BE R R $\frac{1}{2}$. et si ad AB applicetur parallelogrammum æquale quadrato ipsius BE, hoc est R R $\frac{1}{4}$, deficiens figura quadrata, erit recta linea AF R R $1\frac{1}{2}$ plus R R $\frac{1}{2}$ & FB R R $1\frac{1}{2}$ minus R R $\frac{1}{2}$: quadratum autem ipsius AF R R $3\frac{1}{4}$ plus R R 3, & quadratum FB R R $3\frac{1}{4}$ minus R R 3. & addito utriusque quadrato ipsius BE, erit quadratum ex AD R R $4\frac{1}{2}$ plus R R 3. & quadratum ex DB R R $4\frac{1}{2}$ minus R R 3, ergo recta linea AD est R V. R R $4\frac{1}{2}$ plus R R 3, & DB R V R R $4\frac{1}{2}$ minus R R 3, quarū quadrata simul iuncta faciunt R R 18, quantum est quadratum ex AB. rectangulum vero ipsis contentum est R R $1\frac{1}{2}$. quod est medium, & incommensurable composito ex ipsarum quadratis.

THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXXVII.

Si duæ rationales potentia solum commensurabiles componentur, tota irrationalis erit, vocetur autem ex binis nominibus,

Componentur enim duæ rationales potentia solum commensurabiles A B BC. Dico AC irrationalis esse. Quoniam enim incommensurabilis est AB ipsi BC longi tudine, potetia enim solū

commensu-

commensurabiles sunt; & ut AB ad BC, ita rectangulum ABC ad id, quod fit ex BC quadratum: erit rectangulum ABC quadrato ex BC incommensurabile. Sed rectangulo quidem ABC commensurabile est id, quod bis AB BC continetur: quadrato autem ex BC commensurabilia sunt quadrata ex AB BC. quod igitur bis AB BC continetur incommensurabile est quadratis ex AB BC. & componendo quod bis AB BC continetur vnà cum quadratis ex AB BC, hoc est quadratum ex AC incommensurabile est composito ex ipsarum AB BC quadratis. rationale autem est compositum ex quadratis AB BC. ergo quadratum ex AC irrationale est: & ob id recta linea AC est irrationalis, vocetur autem ex binis nominibus.

1. sexti:
10. huius.
6. huius.
13. huius.
4. secundi.
10. diffi.
11. diffi.

S C H O L I U M.

Quæ inter has rationales media est proportionalis, ea media est, neutra autem harum, neque vtraque est media, sed quæ ex ipsis constat ex binis nominibus appellatur. Vtrarumque igitur irrationalium sunt procreatrices, iuxta tamen differentes procreationis modos.

F. C. COMMENTARIUS.

Sit recta linea AB 2, & BC R 3. erit AC 2 plus R 3. & eius quadratum 7 plus R 48. est enim quadratum ipsius AC 4, & quadratum BC 3. rectangulum vero, quod AB BC continetur R 12, cuius duplum est R 48.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO. XXXVIII.

Si duæ mediæ potentia solum commensurabiles componantur quæ rationale contineant, tota irrationalis erit. vocetur autem ex binis medijs prima.

Componantur enim duæ mediæ potentia solum commensurabiles AB BC, quæ rationale contineat. dico totam AC irrationalem esse. Quoniam enim in commensurabilis est AB ipsi BC longitudine, & quadrata ex AB BC incommensurabilia erunt rectangulo, quod bis AB BC continetur. ergo componendo quadrata ex AB BC vnà cum eo, quod bis AB BC continetur, quod est ipsius AC quadratum incommensurabile est rectangulo ABC. sed ABC rectangulum rationale ponitur. ergo quadratum ex AC irrationale est, & recta linea AC irrationalis. vocetur autem ex binis medijs prima.

$$\begin{array}{c} A \quad B R 54 \quad B \quad B R 24 C \\ \hline \end{array}$$

A

B

C

F. C. COMMENTARIUS.

Componantur enim duæ mediæ potentia solum commensurabiles AB BC, quæ rationale contineant. Quomodo he inueniantur docuit in 28 huius. sit autem AB R R 54, BC R R 24, erit tota AC R R 54 plus R R 24.

Et quadrata ex AB BC incommensurabilia erunt rectangulo, quod bis AB BC continetur. Hoc eodem modo, quo supra, sequitur ex 13 huius bis repetita.

Quod est ipsius AC quadratum. Ex 4 secundi.

Ergo quadratum ex AC irrationale est, & recta linea AC irrationalis. Ex 10 & 11 diffinitione huius.

C

D

THEOREMA XXVII. PROPOSITIO XXXIX.

Si duæ mediæ potentia solum commensurabiles componantur. quæ medium

quæ medium contineant, tota irrationalis erit. vocetur autem ex binis medijs secunda.

A Componantur enim duæ mediæ potentia solum commensurabiles, AB BC, quæ medium contineant. Dico AC irrationalem esse. exponatur rationalis DE: & quadrato ex AC æquale parallelogrammum rectangulum DF ad ipsam DE applicetur, quod latitudinē faciat DG. C itaque quoniam quadratum ex AC æquale est quadratis ex AB BC, & rectangulo, quod bis 4. secundi D AB BC continetur. applicetur ad ipsam DE quadratis ex AB BC æquale parallelogrammū E rectangulum EH. reliquum igitur FH æquale est ei, quod bis AB BC continetur. & quoniam media est utraque ipsarum AB BC, erūt & quadrata ex AB BC media. medium autem ponitur & quod bis continetur AB BC. atque est quadratis quidem ex AB BC æquale parallelogrammum EH. rectangulo autem bis AB BC contento æquale est ipsum HF. medium igitur est utrumque ipsorum EH HF: & ad rationale applicatur. ergo utraque recta linea DH HG est rationalis, & ipsi DE longitudine incommensurabilis. H & quoniam incommensurabilis est AB ipsi BC longitudine; atque est ut AB ad BC, ita quadratum ex AB ad AB BC rectangulum: erit quadrato ex AB BC rectangulum ABC incommensurabile. sed quadrato quidem ex AB commensurabile est compositum ex quadratis ipsarum AB BC: rectangulo autem ABC est commensurabile, quod bis AB BC continetur. ergo compositum ex quadratis AB BC incommensurabile erit ei, quod bis continetur AB BC: sed quadratis ex AB BC æquale est parallelogrammum EH: & rectangulo, quod bis AB BC continetur æquale HF par parallelogrammum. quare EH ipsi HF est incommensurabile; & ob id recta linea DH ipsi HG incommensurabilis longitudine. ostensa autem sunt rationales. ergo DH HG rationales sunt potentia solum commensurabiles; ac propterea DG est irrationalis; rationalis autem DE; & quod rationali, & irrationali continetur rectangulum irrationale est. spaciū igitur DF est irrationale, & quæ ipsum potest irrationalis, potest autem ipsum DF recta linea AC. ergo AC irrationalis erit. vocetur autem ex binis medijs secunda.

S C H O L I U M.

Vocavit illam ex binis medijs secundam, quoniam medium est non rationale, quod ipsi AB BC continetur; medium enim rationali posterius est. At vero quod rationali, & irrationali continetur irrationale esse perspicue constat.

et huius.

Nam si rationale sit, & ad rationalem applicetur, erit latitudo, quam facit, rationalis; sed & irrationalis. quod est absurdum. illud igitur quod rationali, & irrationali continetur est irrationale. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIUS.

A Componantur enim duæ mediæ potentia solum commensurabiles AB BC, quæ medium contineant. Quomodo autem hoc inveniatur docet in 29 huius. sit AB RR 18, et BC RR 8, erit AC RR 18 plus RR 8, cuius quadratum R 50 plus R 48. B Exponatur rationalis DE, & quadrato ex AC æquale parallelogrammum rectangulum

gulum DF ad ipsam DE applicetur, quod latitudinem faciat DG] *Sit rationalis DE*
4. ad quam si applicetur illud medium R 50, latitudinem faciet R 3 $\frac{1}{2}$, quae sit DH: et si ad eā-
dem applicetur R 48, faciet latitudinem R 3, quae sit HG. ergo tota latitudo DG erit R 3 $\frac{1}{2}$
plus R 3.

Itaque quoniam quadratum ex AC æquale est quadratis] *Ex quarta secundi, vel 4. C*
Barlaam monachi.

Applicetur ad ipsum DE quadratis ex AB BC æquale parallelogrammum re- D
 ctangulum EH] *Quadratum ipsius AB est R 18, et quadratum BC R 8, quae inter se iuncte*
faciunt R 50. ergo parallelogrammum EH est R 50, et recta linea DH R 3 $\frac{1}{2}$.

Reliquum igitur FH est æquale ei, quod bis AB BC continetur] *Hoc est R 48, et E*
recta linea HG R 3, ut dictum est.

Medium autem ponitur & quod bis AB BC continetur] *Medium ponitur, quod A F*
E BC continetur. et quoniam illud, quod bis AB BC continetur est ei commensurabile, videlicet du-
plum ex 6. huius, et ipsum medium erit, ex corollario 24. huius.

Ergo utraque recta linea DH HG est rationalis, & ipsi DE longitudine incom G
 mensurabilis] *Ex 23. huius.*

Atque est ut AB ad BC, ita quadratum ex AB ad ABC rectangulum] *Ex lemma- H*
te ad 23 huius appositio, vel ex 1. sexti.

Erit quadrato ex AB rectangulum ABC incommensurabile] *Ex 10. huius. K*

Sed quadrato quidem ex AB commensurabile est compositum ex quadratis ip- L
 sarum AB BC] *Ponuntur enim AB BC potentia commensurabiles. ergo & earum quadrata*
commensurabilia erunt, et compositum ex ipsis commensurabile utriusque quadrato ex 16. huius.

Ergo compositum ex quadratis AB BC incommensurabile erit ei, quod bis con M
 tinetur AB BC] *Ex 14. huius.*

Et ob id recta linea DH ipsi HG incommensurabilis longitudine] *Ex 1. sexti, et N*
10. huius.

Ac propterea DG est irrationalis] *Ex 37. huius. O*

Et quod rationali, & irrationali continetur rectangulum irrationale est] *Quomo- P*
do hoc sequatur in antecedenti scholio dictum fuit.

Et quæ ipsum potest irrationalis] *Ex 11. diffinitione. Q*

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO. XL.

Si duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur,
 quæ faciāt compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale;
 quod autem ipsis continetur medium: tota recta linea irrationalis
 erit. vocetur autem maior.

Componantur enim duæ rectæ lineæ po A
 tentia incommensurabiles AB BC, facien-
 tes ea, quæ proposita sunt. Dico AC irra-
 tionalem esse. Quoniam enim id, quod AB
 BC continetur, medium est; & quod bis continetur AB BC medium erit. composi- B
 tum autem ex ipsarum AB BC quadratis est rationale. ergo quod bis AB BC conti-
 netur incommensurabile est composito ex quadratis ipsarum AB BC. & ob id qua C
 drata ex AB BC vnā cum eo, quod bis AB BC continetur, quod est quadratum ex
 AC, incommensurabile est quadratis ex AB BC. rationale autem est compositum
 ex quadratis AB BC, ergo & quadratum ex AC irrationale erit; ac propterea recta
 linea AC est irrationalis. vocetur autem maior.

SCHOLIUM.

Vocauit autem ipsam maiorem, propterea quod rationalia ex AB
 BC maiora

EVCLID. ELEMENT.

BC maiora sint medio, quod bis *AB BC* continetur: oporteatque à rationalium proprietate nomen imponere. At vero quæ fiunt ex *AB BC* maiora esse eo, quod bis *AB BC* continetur, sic ostendemus.

Manifestum igitur est *AB BC* inter se in-
 7. secundi. quales esse. si enim sint æquales, & quæ fiunt
 ex *AB BC* æqualia erunt ei, quod bis *AB BC*
 continetur, & rectangulum *ABC* rationale
 erit, quod nō ponitur. Inæquales igitur sunt *AB BC*. ponatur maior *AB*, & ipsi *BC*
 equalis *BD*. ergo quadrata ex *AB BD* æqualia sunt ei, quod bis *AB BD* continetur
 vñ cum quadrato ex *DA*. equalis autem est *DB* ipsi *BC*. quadrata igitur ex *AB BC*
 equalia sunt ei, quod bis *AB BC* continetur, vñ cum quadrato ex *AD*. ideoq; qua-
 drata ex *AB BC* maiora sunt, quàm id, quod bis *AB BC* continetur, quadrato ip-
 sus *DA*.

F. C. COMMENTARIUS.

- A** Componantur enim duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles *AB BC*, facien-
 tes ea, quæ propoſita ſunt. *Inveniuntur autē hæ ex 34. huius. ſit AB RV. 34. plus R 704; et*
B *BC RV. 32 minus R 704. erit tota AC RV. 32 plus R 704 plus RV. 32 minus R 704.*
C Et quod bis *AB BC* continetur medium erit. *Ex corollario 24. huius.*
 Et ob id quadrata ex *AB BC* vñ cum eo, quod bis *AB BC* continetur, quod est
 quadratum ex *AC* incommensurable est quadratis ex *AB BC*. *Ex 17. huius.*

THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XLI.

Si duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componan-
 tur, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis me-
 dium, quod autem ipsis continetur, rationale; tota recta linea ir-
 rationalis erit. vocetur autem rationale, ac medium potens.

- A** Componantur enim duæ rectæ lineæ
 potentia incommensurabiles *AB BC*, fa-
 cientes ea, quæ propoſita ſunt. Dico *A*
B Irrationalem esse. Quoniam enim cō-
 positum ex ipsarum *AB BC* quadratis medium est; quod autem bis *AB BC* cōtine-
 tur rationale; erit compositum ex ipsarum *AB BC* quadratis incommensurable ei;
 quod bis *AB BC* continetur. quare componēdo quadratum ex *AC* est incommen-
A surabile ei, quod bis continetur *AB BC*. est autem rationale, quod bis *AB BC* conti-
 netur. quadratum igitur ex *AC* irrationale est; ideoq; recta lineā *AC* est irrationa-
 lis. vocetur autem rationale, ac medium potens.

SICHO L I U M.

*Rationale autem, ac medium potentem ipsam idcirco appellavit,
 quod possit bina spacia, vñ quidem rationale, alterum vero medium.
 Et quoniam rationale præcedit irrationale, ipſus rationalis prius mentio-
 nem fecit.*

F. C. COMMENTARIUS.

Componantur enim duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles *AB BC*, facien-
 tes ea quæ propoſita ſunt. *Hæ autem inveniuntur ex 35. huius ſit AB RV. R 13 1/2 plus*
R 4

$\text{Re } 4 \frac{1}{2}$, $\text{BC Re } 7$. $\text{Re } 13 \frac{1}{2}$ minus $\text{Re } 4 \frac{1}{2}$, ut tota AC sit $\text{Re } 7$. $\text{Re } 13 \frac{1}{2}$ plus $\text{Re } 4 \frac{1}{2}$ plus $\text{Re } 7$. $\text{Re } 13 \frac{1}{2}$ minus $\text{Re } 4 \frac{1}{2}$.

Quod autem bis AB BC continetur rationale] Sequitur hoc ex corollario 24 huius. B
ponitur enim eius dimidium rationale, videlicet quod AB BC continetur.

Quare componendo quadratum ex AC est incommensurabile ei, quod bis con- C
tinetur AB BC] Quoniam enim compositum ex ipsarum AB BC quadratis incommensurabi-
le est ei, quod bis AB BC continetur, erit ex 17. huius compositum ex quadratis AB BC una cum
eo, quod bis AB BC continetur, hoc est quadratum ex AC incommensurabile ei, quod bis conti- 4. secunda.
netur AB BC.

THEOREMA XXX. PROPOSITIO. XLII.

Si duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur,
quæ faciant compositum ex ipsarum quadratis medium, & quod
ipsis continetur medium, incommensurabileq; composito ex qua-
dratis ipsarum, tota recta linea irrationalis erit. vocetur autem bi-
na media potens.

Componantur enim duæ rectæ lineæ potētia incō-
mensurabiles AB BC, quæ faciant compositum quidē
ex ipsarum AB BC quadratis medium; quod autem
ipsis continetur medium, & adhuc incommensurabi-
le composito ex ipsarum quadratis. Dico AC irratio-
nalis esse. Exponatur enim rationalis DE, & ad ipsam
applicetur parallelogrammum rectangulum DF, æ-
quale quadratis ipsarum AB BC: & parallelogram-
mum GH æquale ei, quod bis AB BC continetur. to-
tum igitur DH quadrato ipsius AC est æquale. & quo-
niam medium est compositum ex quadratis ipsarum
AB BC, & æquale parallelogrammo DF; erit ipsum
quoque DF medium; & ad rationalem DE applicatū
est. rationalis igitur est DG, & ipsi DE longitudine in-
commensurabilis. ob eandem causam & GK est ratio-
nalis, & incommensurabilis longitudine ipsi FG, hoc
est ipsi DE. & quoniam compositum ex quadratis ip-
sarum AB BC incommensurabile est ei, quod bis AB BC continetur; erit & paral-
lelogrammum DF ipsi GH incommensurabile. ergo & recta linea DG incommen- D
surabilis est ipsi GK; & sunt rationales. quare DG GK rationales sunt potentia so-
lum commensurabiles; ac propterea DK est irrationalis, quæ ex binis nominibus E
appellatur. rationalis autem DE. ergo parallelogrammum DH irrationale est, & ip-
sum potens irrationalis. sed ipsum DH potest recta linea AC. quare AC irrationa- F
lis est. vocetur autem bina media potens. G

SCHOL IUM.

Vocavit ipsam bina media potētem, propterea quod potest bina spacia
media, videlicet compositum ex ipsarum AB BC quadratis; & illud,
quod bis AB BC continetur.

F. C. COMMENTARIUS.

Componantur. n. duæ rectæ lineæ potentia incōmensurabiles AB BC, quæ faciāt A
Qq compo-

E V C L I D. E L E M E N T.

compositum quidem ex ipsarum AB BC quadratis medium, quod autem ipsis continetur medium] *Qua vero ratione hae inueniri possint, tradit in 36. huius. Sit AB R V. R 4 $\frac{1}{2}$ plus R 3, & EC R V. R 4 $\frac{1}{2}$ minus R 3. erunt earum quadrata simul iuncta R 18, & rectangulum ipsis contentum R 1 $\frac{1}{2}$, cuius duplum est R 6.*

B Exponatur enim rationalis DE, & ad ipsam applicetur parallelogrammum rectangulum DF æquale quadratis ipsarum AB BC: & parallelogrammum GH æquale ei, quod bis AB BC continetur] *Sit rationalis DE 3, ad quam si applicetur parallelogrammum DF, æquale composito ex ipsarum AB BC quadratis, videlicet R 18, latitudinem faciet R 2, quæ sit DG: & si ad eandem applicetur parallelogrammum GH æquale ei, quod bis AB BC continetur, videlicet R 6, latitudinē faciet R $\frac{2}{3}$, quæ sit GK. tota igitur latitudo DK erit R 2 plus R $\frac{2}{3}$, quæ est irrationalis ex binis nominibus appellata: & totum parallelogrammum DH erit æquale quadrato ipsius AC, ex 4. secundi.*

C Rationalis igitur est DG ipsi DE longitudine incommensurabilis] *Ex 23 huius.*

D Ergo & recta linea DG incommensurabilis est ipsi GK] *Ex 10 huius, est enim vt D F ad GH, ita DG ad GK, ex 1. sexti.*

E Ac propterea DK est irrationalis, quæ ex binis nominibus appellatur.] *Ex 37 huius.*

F Ergo parallelogrammum DH irrationale est] *Nam quod rationali, & irrationali continetur est irrationale, vt in scholio 39. huius demonstratum fuit.*

G Et ipsum potens irrationalis] *Ex 11. diffinitione.*

S C H O L I U M.

At vero dictas irrationales uno tantum modo diuidi in rectas lineas, ex quibus componuntur, & quæ propositas species constituunt, mox demonstrabimus, si prius lemma quoddam exposuerimus, quod huiusmodi est.

L E M M A.

Exponatur recta linea AB, & secetur tota in partes inæquales ad vtrumque punctorum CD: ponatur autem AC quàm DB maior. Dico quadrata ipsarum AC CB quadratis AD DB maiora esse.

Secetur enim AB bifariam in E. & quoniam maior est AC, quàm DB, communis auferatur DC. reliqua igitur AD maior erit, quàm reliqua CB est autem AE ipsi EB æqualis. ergo D E. quàm EC est minor: & puncta CD non æqualiter distant à bipartita sectione. & quoniam rectangulum ACB vnà cum quadrato rectę lineę CE est æquale quadrato ipsius EB; sed & rectangulum ADB vnà cum quadrato rectę lineę DE est æquale ipsius EB quadrato: erit rectangulum ACB vnà cum quadrato ipsius EC æquale rectangulo ADB vnà cum quadrato ipsius DE. Quorum quadratum ipsius DE est minus quadrato EC. & reliquum igitur rectangulum ACB minus est rectangulo ADB. quare & quod bis AC CB continetur minus est eo, quod bis continetur AD DB. sed compositum ex quadratis rectarum linearum AC CB vnà cum eo, quod bis AC CB continetur, est æquale composito ex quadratis ipsarum AD DB vnà cum eo, quod bis continetur AD DB. est enim vtrumque eorum quadrato ipsius AB æquale. & reliquum igitur compositum ex quadratis ACCB maius erit composito ex quadratis AD DB. quod demonstrare oportebat.

4. secundi.

4. secundi

ALITER

ALITER.

Exponatur quædam recta linea AB, diuisa in partes quidem æquales ad punctum D, in partes vero inæquales ad C. Dico quadrata ex AC CB maiora esse quadratis ex AB DB.

Quoniam enim quadrata ex AC CB dupla sunt quadratorum ex AD DC, quod demonstratum est in nono theoremate secundi libri elementorum; & sunt quadrata quidem ex AD DB dupla quadrati ex AD; propterea quod AB in D bifariam secatur; quod autem bis fit ex DC duplum est quadrati ex DC: erunt quadrata ex AC CB equalia quadratis ex AD DB una cum eo, quod bis fit ex DC. quadrata igitur ex AC CB maiora sunt quam quadrata ex AD DB, eo, quod bis fit ex DC. Nō secetur autem AB bifariam, sed utcumque in punctis CD, ita ut AD sit maior, quam CB. similiter demonstrabitur quadrata ex AC CB quadratis ex AD DB maiora esse. Quoniam enim in recta linea AB utcumque secatur in C, quadratum ex AB est æquale quadratis ex AC CB una cum eo, quod bis continetur AC CB. Eadem ratione & quadratum ex AB est æquale quadratis ex AD DB una cum eo, quod bis AD DB continetur. quorum quod bis continetur AD DB maius est eo quod bis AC CB continetur. est enim rectangulum ADB rectangulo ACB maius. ergo quæ relinquuntur quadrata ex AD DB quadratis ex AC CB minora sunt, quod demonstrare oportebat.

4 secundus.

Ex proxime demonstratis.

F. C. COMMENTARIUS.

Ex iam dictis perspicue apparet excessum, quo compositum ex quadratis rectarum linearum AC CB superat compositum ex quadratis ipsarum AD DB, equalē, vel potius eundem esse excessui, quo rectangulum bis contentum AD DB superat rectangulum, quod bis AC CB continetur.

Fiat enim ex AB quadratum AFGB; & ad ipsam AF applicetur parallelogrammum FH equalē composito ex quadratis AC CB. erit reliquum parallelogrammum HG æquale rectangulo bis contento AC CB. Rursus ad eandem AF applicetur parallelogrammum FK æquale composito ex quadratis AD DB. reliquum igitur parallelogrammum KG est æquale ei, quod bis AD DB continetur. Itaque quoniam parallelogrammum quidem FH est æquale composito ex quadratis AC CB; parallelogrammum vero FK est æquale composito ex quadratis AD DB: erit parallelogrammum LH excessus, quo alterum alterum superat. Sed idem LH est excessus, quo rectangulum bis contentum AD DB superat id, quod bis AC CB continetur. constat igitur verum esse, quod nos demonstrandum proposuimus.

4 secundus.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO XLIII.

Quæ ex binis nominibus ad unum dumtaxat punctum diuiditur in nomina.

Sit ex binis nominibus A B diuisa in nomina ad punctum C. ergo AC CB rationales sunt potentia solum commensurabiles. Dico AB ad aliud punctum non diuidi in duas rationales potentia solum commensurabiles. si enim fieri potest, diuidatur in D, ita ut AD DB rationales sint potentia solum commensurabiles. Itaq; manifestum est A B C non esse eandem, quæ D B. si enim fieri potest, sit eadem. erit igitur & AD eadem

29 2 dem

dem, quæ CB : atque erit vt AC ad CB, ita BD ad D A : & A B in D similiter diuifa erit, atque in puncto C. quod non ponitur. ergo AC non est eadē, quæ DB. simili ratione & puncta CD non equaliter distant à bipartita sectione. quo igitur differunt quadrata rectorum linearum AC CB ab ipsarum AD DB quadratis, hoc differt & quod bis AD DB continetur ab eo, quod bis continetur AC CB: quoniam & quadrata rectorum linearum AC CB vnà cum eo, quod bis continetur AC CB; & quadrata ipsarum AD DB vnà cū eo, quod bis AD DB continetur, æqualia sunt quadrato ipsius A B. sed quadrata AC CB à quadratis AD DB differunt rationali; etenim rationalia vtraque sunt. ergo & quod bis AD DB continetur à contento bis AC CB rationali differt, cum ipsa media sint. atqui medium non superat medium rationali. nō igitur quæ ex binis nominibus ad aliud, atque aliud punctum diuiditur. quare ad vnum dumtaxat diuiditur in nomina. quod oportebat demonstrare.

F . C . C O M M E N T A R I V S .

- A Ergo AC CB rationales sunt potentia solum commensurabiles] *Ex 37 huius.*
 B Itaque manifestum est AC non esse eandem, quæ DB] *Hoc est AC non esse æqualem ipsi DB; sumitur enim hoc loco idem pro æquali.*
 C Erit igitur & AD eadem, quæ CB] *Si enim AC sit æqualis ipsi DB, dempta BC vtrique communis, erit reliqua AD reliquæ CB æqualis.*
 D Quod non ponitur] *Ponitur enim recta linea AB in puncto D aliter diuisa, atque in ipso C. Simili ratione & puncta CD non æqualiter distant à bipartita sectione] Nā si AD CB inter se æquales non sint, neque puncta CD æqualiter distabunt ab eo puncto, quod rectam lineam AD bisariam diuidit.*
 F Quo igitur differunt quadrata rectorum linearum AC CB ab ipsarum AD DB quadratis, hoc differt & quod bis AD DB continetur ab eo, quod bis continetur AC CB] *Quomodo hoc sequatur in antecedenti scholio dictum est.*
 G Sed quadrata AC CB à quadratis AD DB differunt rationali, etenim rationalia vtraque sunt] *Nam rationale non superat rationale, nisi rationali. quod nos demonstrauimus ad 27 huius.*
 H Atqui medium non superat medium rationali] *Ex 27 huius.*

T H E O R E M A X X X I I . P R O P O S I T I O . X L I I I I .

Quæ ex binis medijs prima ad vnum dumtaxat punctum diuiditur in nomina.

Sit ex binis medijs prima AB diuifa in puncto

C, ita vt AC CB mediæ sint potentia solum commensurabiles, quæ ratio nale contineat. Dico AB in alio puncto non diuidi. si enim fieri potest, diuidatur etiam in D, ita vt AD DB sint mediæ potentia solum cōmensurabiles, quæ

rationale contineant. Quoniam igitur quo differt rectorum linearum AC CB ab ipsarum AD DB quadratis, hoc differt etiam quadrata rectorum linearum AC CB ab ipsarum AD DB quadratis; rationali autem differt contentum AD DB ab eo, quod bis AC CB continetur, utraque enim sunt rationalia; sequitur vt etiam quadrata ipsarum AC CB rationali differant à quadratis AD DB, quæ vtraque media sunt. illud autem fieri non potest. non igitur quæ ex binis medijs prima in alio, atque alio puncto diuiditur in nomina. quare in vno dumtaxat diuidatur necesse est.

Ex demonstrationis ad 27 huius.

27. huius.

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO. XLV.

Quæ ex binis medijs secunda ad vnum dumtaxat punctum diuiditur in nomina.

Sit ex binis medijs secunda AB diuisa in C, ita vt AC CB mediæ sint potentia solum commensurabiles, quæ medium contineant. manifestum est punctum C non esse in bipartita sectione, quoniam non sunt longitudines commensurabiles. Dico ipsam AB in alio puncto non diuidi. si enim fieri potest, diuidatur in D, ita vt AC non sit eadem, quæ DB. sed maior AC positione. Itaque constat quadrata ex AC CB quadratis ex AD DB maiora esse, vt supra ostendimus; & AD DB medias esse potentia solum commensurabiles, quæ medium contineant. Exponatur rationalis EF; & quadrato quidem ex AB æquale parallelogrammum EK ad ipsam EF applicetur; quadratis vero ex AC CB æquale auferatur EG. reliquum igitur HK æquale est ei, quod bis AC CB continetur. rursus quadratis ex AD DB, quæ minora sunt quadratis ex AC CB, ut ostensum est, æquale parallelogrammum auferatur EL. ergo reliquum MK est æquale ei, quod bis continetur AD DB. et quoniam media sunt D quæ ex AC CB quadrata, erit EG medium, & ad rationalem EF applicatum est. quare EH rationalis est, & ipsi EF longitudine incommensurabilis. Eadem ratione & HN est rationalis, & ipsi EF incommensurabilis longitudine. Quod cum AC CB mediæ sint potentia solum commensurabiles, erit AC ipsi CB incommensurabilis longitudine. ut autem AC ad CB, ita quadratum ex AC ad id, quod AC CB continetur. quadratum igitur ex AC incommensurabile est ei, quod continetur AC CB. sed quadrato quidem ex AC commensurabilia sunt quadrata ex AC CB, etenim AC CB potentia sunt commensurabiles; ei vero, quod continetur AC CB, commensurabile est illud, quod bis AC CB continetur. ergo et quadrata ex AC CB incommensurabilia sunt ei, quod bis AC CB continetur: quadratis autem ex AC CB æquale est parallelogrammum EG, & ei, quod bis continetur AC CB est æquale HK. ergo EG ipsi HK est incommensurabile; & ob id recta linea EH ipsi HN incommensurabilis longitudine; suntque rationales. ergo EH HN rationales sunt potentia solum commensurabiles. si autem duæ rationales potentia solum commensurabiles componantur, tota irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur. quare EN ex binis nominibus est diuisa in puncto H. eadem ratione & EM MN ostenduntur rationales potentia solum commensurabiles, & erit EN ex binis nominibus ad aliud, atque aliud punctum diuisa, videlicet ad H, & ad M. & non est EH eadem, quæ MN: quoniam quadrata ex AC CB quadratis ex AD DB sunt maiora; quadrata autem ex AD DB maiora sunt eo, quod bis AD DB continetur. ergo quadrata ex AC CB, hoc est parallelogrammum EG multo maius est eo, quod bis continetur AD DB, hoc est parallelogrammo MK. quare & EH, quam MN est maior. non igitur EH eadem est, quæ MN. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIUS.

Sed maior AC positione] Hoc est ponatur nunc AC maior, quam DB. A
Vt supra ostendimus] In lemma, quod positum est ante 43. huius. B
Reliquum igitur HK æquale est ei, quod bis AC CB continetur.] Ex 4. secundi libri. C
Et quoniam media sunt, quæ ex AC CB quadrata, erit EG medium.] Rectæ enim li D
nece

medie AC CB ponuntur mediae potentia solum commensurabiles . quare & media erunt ipsarum quadrata , atque inter se commensurabiles ; & si componantur unum fiet medium , quemadmodum ex duobus rationalibus , si longitudine commensurabiles sint , una sit rationalis .

At vero spacium ex medijs compositum irrationale esse . sic demonstrabimus .]

Componantur duo media spacia AE BC . Di

co totum AD esse irrationale . sit enim rationale , si fieri potest ; ex ponaturq; rationalis quedam recta linea EF ; & ad ipsam applicetur parallelogrammum EG ipsi AD aequale , latitudinem faciens EH : à parallelogrammo autem EG auferatur EK aequale ipsi AB , quod latitudinem faciat EL reliquum igitur LG reliquo BC est equale . & quoniam medium est utrumque ipsorum AB BC ; atque est EK quidem ipsi AB aequale ; LG vero ipsi BC : erit & utrumque ipsorum EK LG medianum ; & ad rationalem EF applicata sint . rationalis igitur est utraque ipsarum EL LH , & ipsi EF incommensurabilis longitudine . Rursus quoniam AD rationale ponitur , estq; ipsi EG aequale , & applicatur ad rationalem EF ; recta linea EH rationali : erit , & ipsi EF longitudine commensurabilis . est autem EL eidem EF incommensurabilis longitudine . ergo EH ipsi EL longitudine incommensurabilis erit . sed ut EH ad EL , ita & quadratum ex EH ad rectangulum , quod HE EL continetur . quadratum autem ex EH commensurabile est quadratis ex HE EL ; utrumque enim ipsorum est rationale . & rectangulum contentum HE EL est commensurabile ei ; quod bis HE EL continetur . ergo ex his , quae ad 14 . huius demonstravimus , quadrata ex HE EL incommensurabilia sunt ei , quod bis continetur HE EL . sed quadratis ex HE EL aequale est id , quod bis HE EL continetur una cum quadrato ipsius LH , ex 7 secundi libri . si autem magnitudo ex duabus magnitudinibus composita uni componentium sit incommensurabilis , & reliquae incommensurabiles erit . quod à nobis demonstratum est ad 17 . huius . quadrata igitur ex HE EL incommensurabilia sunt quadrato ex LH . rationalia autem sunt quadrata ex HE EL . ergo quadratum ex LH irrationale est : & ob id recta linea LH est irrationalis ; sed & rationalis , ut demonstratum fuit ; quod fieri non potest . non igitur spacium AD est rationale . quare irrationale sit necesse est . quod demonstrare oportebat .

ej . huius

et . huius

q . huius .

E Quare EH rationalis est , & ipsi EF longitudine incommensurabilis .] Ex 23 huius .

F Ergo EC ipsi HK est incommensurabile] Ex demonstratis ad 14 huius .

G Tota irrationalis est , quae ex binis nominibus appellatur] Ex 37 . huius .

H Et erit EA ex binis nominibus ad aliud , atque aliud punctum diuisa , videlicet ad H , & ad M] Quod fieri non posse in 43 huius demonstratum est . non igitur quae ex binis medijs secunda ad aliud , atque aliud punctum diuiditur in nomina , ergo ad unum dumtaxat diuidi necessarium est .

K Et non est EH eadem , quae MN] ostendit EH ipsi MN non esse aequalem .

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XLVI.

Maior ad idem dumtaxat punctum diuiditur in nomina .

Sit maior A B . diuisa in C , ita ut A C

CB potentia incommensurabiles sint , fa

cientes compositum quidem ex ipsarum

AC CB quadratis rationale ; rectangu

lum vero , quod ipsis continetur , mediū . Dico AB in alio puncto non diuidi . si enim

fieri potest , diuidatur in D , ita ut AD DB potentia incommensurabiles sint , facientes

compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale ; quod autem ipsis continetur ,

medium . & quoniam quo differunt quadrata ex AC CB à quadratis ex AD DB ,

hoc differet & id , quod bis continetur AD DB ab eo , quod bis AC CB continetur .

scd

sed quadrata ex AC CB superant quadrata ex AD DB rationali; etenim utraque rationalia sunt. ergo quod bis continetur AD DB rationali superat id, quod bis AC CB continetur, cum media sint. quod est absurdum. non igitur maior ad aliud, atque aliud punctum diuiditur. ergo ad idem dumtaxat diuidatur necesse est.

Ex demonstratis. ad 27 huius.
Ex 27. huius.

THEOREMA XXXV. PROPOSITIO XLVII.

Rationale, ac medium potens ad vnum dumtaxat punctum diuiditur in nomina.

Sit rationale, ac medium potens AB, diuisa in C; ita ut AC CB potentia incommensurabiles sint; faciantque compositum quidem ex ipsarum AC CB quadratis medium; quod autem ipsis continetur, rationale. Dico AB in alio puncto non diuidi. si enim fieri potest, diuidatur in D, ita ut etiam AD DB potentia incommensurabiles sint, facientes compositum ex ipsarum quadratis medium: quod autem ipsis continetur, rationale. Quoniam igitur quo differt rectangulum bis contentum AD DB ab eo, quod bis AC CB continetur, hoc differunt & quadrata ex AC CB à quadratis ex AD DB. rectangulum autem bis contentum AD DB rationali superat id, quod bis AC CB continetur. ergo & quadrata ex AC CB superant quadrata ex AD DB rationali, cum media sint. quod est absurdum. non igitur rationale, ac medium potens diuiditur ad aliud, atque aliud punctum. quare ad vnum dumtaxat punctum diuidetur.

THEOREMA XXXVI. PROPOSITIO XLVIII.

Bina media potens ad vnum dumtaxat punctum diuiditur in nomina.

Sit bina media potens AB, diuisa in C, ita ut AC CB potentia incommensurabiles sint, facientes etiam compositum ex ipsarum AC CB quadratis medium; & quod ipsis continetur, medium, incommensurabileque; composito ex quadratis ipsarum AC CB. Dico AB ad aliud punctum non diuidi, ita ut faciat quæ propostæ sunt. Si enim fieri potest, diuidatur in D, ita ut rursus AC non sit eadem, quæ DB, sed sit AC positio maior; exponaturque rationalis EF, & ad ipsam quadratis quidam ex AC CB æquale parallelogrammum EG applicetur; rectangulo autem bis contento AC CB æquale applicetur HK. totum igitur EK est æquale ei, quod fit ex AB, quadrato. Rursus ad EF applicetur parallelogrammum EL, æquale quadratis ex AD DB. ergo reliquum, quod bis AD DB continetur, reliquo MK est æquale. & quoniam compositum ex quadratis ipsarum AC CB medium ponitur, erit & parallelogrammum EL medium; & ad rationalem EF applicatum est. rationalis igitur est HE, & ipsi EF longitudine incommensurabilis. Eadem ratione & HN est rationalis, ipsique EF incommensurabilis longitudine. & quoniam compositum ex quadratis ipsarum AC CB incommensurabile est ei, quod bis AC CB continetur, erit & parallelogrammum EG ipsi HK incommensurabile. ergo & recta linea EH est incommensurabilis rectæ HN. & sunt rationales. quare EH HN rationales sunt potentia solum commensurabiles

4. secundi.

27. huius.

EVCLID. ELEMENT.

Ex 43, huius.

biles. & ob id EN ex binis nominibus est diuisa in puncto H. similiter ostendemus ipsam EN in puncto quoque M diuidi: & non est FH eadem, quæ MN. ergo quæ ex binis nominibus ad aliud, atque aliud punctum diuiditur; quod est absurdum. non igitur bina media potens diuiditur ad aliud, atque aliud punctum. quare ad vnum dumtaxat punctum diuidetur.

DIFFINITIONES SECUNDÆ.

1. Exposita rationali, & quæ ex binis nominibus, diuisa in nomina, cuius maius nomen plus possit, quàm minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, siquidem maius nomen expositæ rationali commensurabile sit longitudine, tota dicatur ex binis nominibus prima.
2. Si vero minus nomen expositæ rationali longitudine sit commensurabile, dicatur ex binis nominibus secunda.
3. Quod si neutrum ipsorum nominum sit longitudine commensurabile expositæ rationali, vocetur ex binis nominibus tertia.
4. Rursus si maius nomen plus possit, quàm minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, siquidem maius nomen expositæ rationali sit commensurabile longitudine, dicatur ex binis nominibus quarta.
5. Si vero minus, dicatur quinta.
6. Quod si neutrum, dicatur sexta.

S C H O L I U M.

Cum igitur sex rectæ lineæ ita sumantur, primas ordine facit tres, in quibus maior plus potest, quàm minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis; secundas uero tres reliquas, in quibus maior plus potest, quàm minor, quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine; propterea quod commensurabile antecedit incommensurabile: & adhuc primam quidem, in qua maius nomen commensurabile est expositæ rationali; secundam, in qua minus nomen, quoniam rursus maius antecedit minus, cum ipsum contineat; tertiam uero, in qua neutrum expositæ rationali est commensurabile; & in reliquis tribus eodem modo, primam dicti secundi ordinis quartam appellans, secundam quintam, & tertiam sextam.

PROBLEMA XIII. PROPOSITIO. XLIX.

- Inuenire ex binis nominibus primam.
- A Exponantur duo numeri ACCB, ita ut compositus ex ipsis, uidelicet AB ad ipsum quidem BC proportionem habeat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum;

numerus; ad ipsum vero CA proportionem non habeat, quā quadratus numerus ad quadratum numerum. & exponatur quēdam rationalis D; & ipsi D longitudine commensurabilis sit EF. ergo EF est rationalis. fiat autē vt BA numerus ad numerum AC, ita ipsius EF quadratum ad quadratū FG. Sed BA ad AC proportionem habet, quam numerus ad numerum. ergo & quadratum ipsius EF ad

quadratū FG proportionē habebit, quā numerus ad numerū. cōmensurable igitur D est quadratū ex EF quadrato ex FG; atq; est EF rationalis. ergo & rationalis FG. & E quā BA ad AC proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum neque quadratum ex EF ad quadratum ex FG proportionem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. ergo EF ipsi FG incommensurabilis est longitudine. & ob id EF FG rationales sunt potentia solum cōmensurabiles. ex binis igitur nominibus est EG. Dico & primam esse. Quoniā enim est vt BA numerus ad numerum AC, ita quadratum ex EF ad id quod ex FG quadratum. maior autem est BA, quā AC. ergo & quadratum ex EF quadrato ex FG est maius. sint quadrato ex EF aequalia quadrata ex FG H. Quoniam igitur est vt BA ad AC, ita quadratum ex EF ad quadratum ex FG, erit per conuersionem rationis vt AB ad BC, ita quadratum ex EF ad quadratum ex H. sed AB ad BC proportionem habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. & quadratum igitur ex EF ad quadratum ex H proportionem habebit quam quadratus numerus ad quadratum numerum. quare EF ipsi H longitudine est cōmensurabilis. ideoq; EF plus potest, quā FG quadrato rectā lineā sibi commensurabilis longitudine. sunt autem EF FG rationales, & EF ipsi D longitudine est commensurabilis. ergo EG ex binis nominibus est prima.

F. C. COMMENTARIJS.

Exponantur duo numeri AC, CB, ita vt compositus ex ipsis videlicet AB ad ipsum quidem BC proportionem habeat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; ad ipsum vero CA proportionem non habeat] Inueniuntur autē hi ex corollario primi lemmatis ante 30 huius.

Ergo EF est rationalis] Ex 6 diffinitione.

Fiat autem vt BA numerus ad numerum AC, ita ipsius EF quadratum ad quadratum FG] Ex corollario 6 huius.

Commensurable igitur est quadratum ex EF quadrato ex FG] Ex sexta huius.

Ergo & rationalis FG] Ex 6 diffinitione.

Ergo EF ipsi FG incommensurabilis est longitudine] Ex 9 huius.

Ex binis igitur nominibus est EG] Ex 37 huius.

Sint quadrato ex EF aequalia quadrata ex FG H] Inuenietur quadratum ipsius H ex lemma ante 15 huius.

Quare EF ipsi H longitudine est commensurabilis] Ex 9 huius.

Ergo EG ex binis nominibus est prima] Ex prima secundarium diffinitionum.

Sit AC numerus 12, CB 4, & EF 6, fiatq; vt 16 ad 12, ita 36 ad 4, eris ad 27, ergo 6 plus 27 est ex binis nominibus prima.

PROBLEMA XIII. PROPOSITIO I.

Inuenire ex binis nominibus secundam.

Exponantur duo numeri AC, CB, ita vt compositus ex ipsis AB ad ipsum BC quidem proportionem habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerū; ad AC vero proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum

Rr numerum

EVLID. ELEMENT.

6. diff.
 Colol. 6. hn
 lus.
 6. huius.
 6. diff.

A. 2. . . . C. 3. B
D
E B. 4. 8 F 6 G
H
B. 12

9-huius.

9. huius.

2. diff. secundarum.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AC 9 CB 3. & FG 6. fiat autem ut 9 ad 12, ita 36 ad alii erit ad 48. quare R 48 pl^{us} 6 est ex binis nominibus secunda.

PROBLEMA XV. PROPOSITIO LI.

Inuenire ex binis nominibus tertiam.

Corol. 6. hu-
ius.
6. huius.
Diff. 6.

a huius.

6. huius.

A.....U.....C.....S.....B
.....D.....J.....
.....E.....C.....
F.....B=24.....G.....B=18.....H
.....K.....
.....B=6.....

tum ex GH proportionem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. incommensurabilis igitur est FG ipsi GH longitudine. quare FG GH rationales sunt potentia solum commensurabiles. ideoq; FH ex binis nominibus est. Dico & tertiam esse. Quoniam enim est ut D ad AB, ita quadratum ex E ad quadratum ex FG; ut autem BA ad AC, ita quod fit ex FG quadratum ad quadratum ex GH: erit ex æquali ut D ad AC, ita quadratum ex E ad quadratum ex GH. sed D ad AC proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo E ipsi GH incommensurabilis est longitudine. Et quoniam ut BA ad AC, ita quadratum ex FG ad id, quod ex GH quadratum; erit quadratum ex FG maius quadrato ex GH. sint quadrato ex FG æqualia quadrata ex GH, K. per conuersionem igitur rationis est ut AB ad BC, ita quadratum ex FG ad quadratum ex K. sed AB ad BC proportionem habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo & quadratum ex FG ad quadratum ex K proportionem habebit; quam numerus quadratus ad quadratum numerum. commensurabilis igitur est FG ipsi K longitudine: & ob id FG plus potest, quam GH, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. suntq; FG GH, rationales potentia solum commensurabiles: & neutra ipsarum commensurabilis est ipsi E longitudine. ergo FH ex binis nominibus est tertia.

F. C. COMMENTARIUS.

Sit numerus AC 15, CB 5; & D 30, rationalis autem E sit 6, fiatq; ut 30 ad 20, ita 36 ad alit. erit ad 24. rursus fiat ut 20 ad 15, ita 24 ad alium, hoc est ad 18. ergo R 24 plus R 18 est ex binis nominibus tertia.

PROBLEMA XVI. PROPOSITIO. LII.

Inuenire ex binis nominibus quartam.

Exponentur duo numeri AC CB, ita ut AB ad utrumque ipsorum proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; exponaturq; rationalis D: & ipsi D commensurabilis sit EF longitudine. ergo EF est rationalis. fiat autem ut BA numerus ad numerum AC, ita quadratum ex EF ad quadratum ex FG. commensurabile igitur est quadratum ex EF quadrato ex FG:

ideoq; recta linea FG est rationalis. Et quoniam BA ad AC proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, erit EF ipsi FG longitudine incommensurabilis. ergo EFG rationales sunt potentia solum commensurabiles: & ob id EG ex binis nominibus est. Dico eam & quartam esse. Quoniam enim est ut BA ad AC, ita quadratum ex EF ad quadratum ex FG; maior autem est BA, quam AC: erit quadratum ex EF quadrato ex FC maius. sint quadrato ex EF æqualia quadrata ex FG, H. per conuersionem igitur rationis est ut AB numerus ad numerum BC, ita quadratum ex EF ad id, quod fit ex H quadratum. sed AB ad BC proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo EF ipsi H longitudine est incommensurabilis; ac propterea EF plus potest, quam FG quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. suntq; EF FG rationales potentia solum commensurabiles: & EF ipsi D commensurabilis est longitudine. ergo EG ex binis nominibus est quarta.

F. C. COMMENTARIUS.

Sit AC numerus 10, CB 6. rationalis autem D sit 6, & EF 4; fiatq; ut 16 ad 10, ita 16 ad alium, nempe ad 10. erit 4 plus R 10 ex binis nominibus quarta.

E V C L I D. E L E M E N T.
PROBLEMA XVII. PROPOSITIO. LIIL.

Inuenire ex binis nominibus quintam.

Exponantur duo numeri AC CB, ita vt AB
ad vtrumque ipforum proportionem non ha-
beat, quam numerus quadratus ad quadratum
numerum. exponantq; recta linea quadam ra-
tionalis D; & ipsi D longitudine commen-
surabilis sit FG. ergo FG est rationalis: & fiat vt CA
ad AB, ita quadratum ex GF ad id, quod sit ex FE quadratum, rationalis igitur est
FE. Et quoniam CA numerus ad AB proportionem nō habet, quam numerus qua-
dratus ad quadratū numerum; neque quadratum ex GF ad quadratum ex FE pro-
portionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo EF
FG rationales sunt potentia solum commensurabiles: & ob id EG ex binis nominibus
est. itaque dico & quintam esse. Quoniam enim est vt CA ad AB, ita quadratū
ex GF ad quadratum ex FE; erit conuertendo vt BA ad AC, ita quadratum ex EF
ad quadratum ex FG. ergo quadratum ex EF quadrato ex FG est maius. sint qua-
drato ex EF æqualia quadrata ex FG, H. per cōuersionem igitur rationis est vt AB
numerus ad numerum BC, ita quadratum ex EF ad id, quod ex H quadratum. sed
AB ad BC proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum nu-
merum. ergo neque quadratum ex EF ad quadratum ex H proportionem habebit,
quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ac propterea EF ipsi H longi-
tudine est incommensurabilis. quare EF plus potest, quā FG, quadrato rectæ lineæ
sibi incommensurabilis longitudine. suntq; EF FG rationales potentia solum com-
mensurabiles: & FG minus nomen expositū rationali D commensurabilis est longi-
tudine. ergo EG ex binis nominibus est quinta.

F. C. C O M M E N T A R I V S.

Sit AC 16, CB 4, & FG 2; fiatq; vt 16 ad 20, ita 4 ad alium, videlicet ad 5. erit B 5 plus
2 ex binis nominibus quinta.

PROBLEMA XVIII. PROPOSITIO LIIL.

Inuenire ex binis nominibus sextam.

Exponantur duo numeri AC CB, ita vt AB
ad vtrumque ipforum proportionem non ha-
beat, quam numerus quadratus ad quadratum
numerum. sit etiam alius numerus D non qua-
dratus, qui ad vtrumque ipforum BA AC pro-
portionem non habeat, quam numerus quadra-
tus ad quadratum numerum: & exponatur ra-
tionalis quēdā recta linea E: fiatq; vt D ad AB,
ita quadratum ex E ad quadratum ex FG. com-
mensurabilis igitur est E ipsi FG potentia, atque
est E rationalis. quare & rationalis est FG. Et
quoniam D ad AB proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadra-
tum numerum; neque quadratum ex E ad quadratum ex FG proportionem habe-
bit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo E ipsi FG longi-
tudine est incommensurabilis. itaque rursus fiat ut BA ad AC, sic quadratum ex FG
ad quadratum ex GH. quadratum igitur ex FG quadrato ex GH est commensura-
bile. rationale autem est quadratum ex FG. ergo & quadratum ex GH est rationa-
le: ob idq; recta linea GH est rationalis. Et quoniam BA ad AC proportionē nō ha-
bet,

bet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex FG ad quadratum ex GH proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. incommensurabilis igitur est FG ipsi GH longitudine: & ideo FG GH rationales sunt potentia solum commensurabiles. quare ex binis nominibus est FH. ostendendum est & sexta esse. Quoniam enim ut D ad AB, ita est quadratum ex E ad quadratum ex FG; est autem & ut BA ad AC, ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH: erit ex æquali ut D ad AC, ita quadratum ex E ad quadratum ex GH. sed D ad AC proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo neque quadratum ex E ad quadratum ex GH proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. incommensurabilis igitur est E ipsi GH longitudine. ostensum autem est & ipsi FG incommensurabilem esse. quare utraque ipsarum FG GH ipsi E longitudine est incommensurabilis. & quoniam est ut BA ad AC, ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH; erit quadratum ex FG quadrato ex GH maius. sint quadrato ex FG æqualia quadrata ex GH, K. ergo per conversionem rationis ut AB ad BC, ita est quadratum ex FG ad quadratum ex K. Sed A B ad B C proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. neque igitur quadratum ex FG ad quadratum ex K proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ac propterea FG ipsi K longitudine est incommensurabilis. ergo FG plus potest, quam GH quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine: suntque FG GH rationales potentia solum commensurabiles: & neutra ipsarum longitudine commensurabilis est exponenti rationali E. quare FH ex binis nominibus est sexta.

9. huius;
37. huius.

9. huius.

6. diff. secundarum.

F. C. COMMENTARIUS.

Sit AC 10, CB 6 & D 20. rationalis autem E sit 5, & fiat ut 20 ad 16, ita 25 ad alium, nempe ad 20. rursus fiat ut 16 ad 10, ita 20 ad alium, erit ad 12 $\frac{1}{2}$. ergo 20 plus 12 $\frac{1}{2}$ est ex binis nominibus sexta.

L E M M A

Sint duo quadrata AB BC: & ponantur ita, ut DB sit in directum ipsi B E. ergo & FB ipsi B G in directum erit; & compleatur AC parallelogrammum. Dico AC quadratum esse: & quadratorum AB BC rectangulum DG medium esse proportionale; itemque ipsorum AC CB medium proportionale esse DC.

Quoniam enim DB quidem est æqualis BF, EB vero ipsi BG; erit tota DE toti FG æqualis. sed DE æqualis est utrique ipsarum AK HC. ergo & utraque AH KC utrique AK HC est æqualis. equilaterum igitur, est AC parallelogrammum, est autem & rectangulum. ergo quadratum est AC. Et quoniam est ut FB ad BG, ita DB ad BE: ut autem FB ad BG, ita AB ad DG: & ut DB ad BE, ita DG ad BC. ut igitur AB ad DG, ita est DG ad BC: ideoque ipsorum AB BC medium proportionale est DG. Dico præterea ipsorum AC CB medium proportionale esse DC. nam cum sit ut AD ad DK, ita KC ad GC: est enim utraque utrique æqualis: & componendo erit ut AK ad KB, ita KC ad CG. sed ut AK ad KB, ita AC ad CD; & ut KC ad CG, ita DC ad CB. & ut igitur AC ad CD, ita est DC ad CB. ac propterea ipsorum AC CB medium proportionale est CD. quod ostendendum proponebatur.

34. primi.

1. sexti.

THEOREMA XXXVII. PROPOSITIO LV.

Si spaciū cōtineatur rationali, & ex binis nominibus prima, recta

recta linea spacium potens irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.

Spaciū enim ABCD contineatur rationali AB, & ex binis nominibus prima AD. Dico rectam lineam, quæ potest spacium AC irrationalem esse, quæ ex binis nominibus appellatur. Quoniam enim AD est ex binis nominibus prima, diuidatur in nomina ad punctum E: & sit AE maius nomen. manifestum est AE ED rationales esse potentia solū commensurabiles, & AE plus posse, quàm ED quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine: & præterea AE expositæ rationali AB longitudine commensurabilem esse. Secetur ED bifariam in F. Quoniam igitur AE plus potest, quàm ED quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine, si quartæ parti quadrati, quod fit à minori, hoc est quadrato ex EF æquale parallelogrammū ad maiorem AE applicetur, deficiens figura quadrata, in partes commensurabiles ipsam diuidet. itaque applicetur, & sit AGE. ergo AG ipsi GE longitudine est commensurabilis. Deinde per puncta G E F alterutri ipsarum AB DC parallelæ du-

cantur GH EK FL: & parallelogrammo quidem AH æquale quadratum constituta tur SN; parallelogrammo autem GK æquale quadratum NP: & ponatur ita, vt MN sit in directum ipsi NX. ergo RN ipsi NO in directum erit: & parallelogrammum SP compleatur. quadratum igitur est SP. & quoniam rectangulum AGE est æquale quadrato ex EF, erit vt A G ad E F, ita FE ad E G. quare & vt A H ad E L, ita est EL ad KG: ac propterea parallelogrammorum A H K G mediū proportionale est EL. Sed parallelogrammo AH æquale est quadratum SN, & parallelogrammo GK æquale quadratum NP. ergo quadratorum SN NP medium proportionale est EL. sed & eorumdem SN NP medium proportionale est & MR. æquale igitur est MR ipsi EL. sed MR est æquale OX, & EL ipsi FC. ergo totū EC ipsis MR OX est æquale. sunt autem & AH GK æqualia ipsis SN NP. totū igitur AC est æquale toti SP, hoc est quadrato ex MX; ideoq; ipsa MX potest parallelogrammum AC. Dico MX ex binis nominibus esse. quoniam enim AG commensurabilis est ipsi GE, erit AE utrique ipsarum AG GE commensurabilis; ponitur autem & AE commensurabilis ipsi AB longitudine. ergo & AG GE ipsi AB commensurabiles; sunt; atque est AB rationalis. rationalis igitur & vtraque ipsarū AG GE: & ob id rationale vtrūq; ipsorum AH GK: & A H ipsi GK est commensurabile. sed A H est æquale ipsi SN, & GH ipsi NP. ergo & quadrata SN NP, videlicet quæ fiunt ex MN NX rationalia sunt, & commensurabilia. Et quoniam incommensurabilis est AE ipsi ED longitudine, & AE quidem est commensurabilis ipsi AG; DE vero ipsi EF: erit & A G ipsi EF longitudine incommensurabilis. ergo & AH est incommensurabile ipsi EL. sed AH est æquale SN, & EL ipsi MR. quare SN est incommensurabile ipsi MR: vt autem SN ad MR, ita ON ad NR. incommensurabilis igitur est ON ipsi NR: est autē ON æqualis MN, & NR ipsi NX. ergo MN ipsi NX est incommensurabilis. atque est quadratum ex MN commensurabile quadrato ex NX: & vtrumque rationale. quare MN NX rationales sunt potentia solum commensurabiles: ideoq; MX ex binis nominibus est, & potest parallelogrammum AC. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIUS.

A In partes commensurabiles ipsam diuidet] Ex 2 parte 18 huius. Itaque

Itaque applicetur, & sit AGE] Ex 3 *lemmate ante 18 huius.*

Erit vt AG ad EF, ita FE ad EG] Ex 14 *sextri.*

Erit AE vtrique ipsarum AG GE communisurabilis] Ex 16 *huius.*

Ergo & AG GE ipsi AB communisurabiles sunt] Ex 12 *huius.*

Et ob id ratione vtrumque ipsorum AH GK] Ex 20 *huius.*

Et AH ipsi GK est communisurabile] *Est enim ex 1 sexti vt AG ad GE, ita AH parallelogrammum ad parallelogrammum GK. ergo ex 10 huius parallelogrammum AH ipsi GK est communisurabile.*

Et quoniam incommensurabilis est AE ipsi ED longitudine] *Ponitur enim AD esse ex binis nominibus prima, quæ constat ex duabus rationalibus potentia solum communisurabilibus.*

Erit & AG ipsi EF longitudine incommensurabilis] *Ex ijs, quæ ad 14 huius demonstrauimus.*

Ergo & AH est incommensurabile ipsi EL] *Nam vt AG ad EF, ita & AH parallelogrammum ad ipsum EL. quare ex 10 huius propositum concluditur.*

Incommensurabilis igitur est ON ipsi NR] *Ex 10 huius, vt dictum iam est.*

Atque est quadratum ex MN communisurabile quadrato ex NX, & vtrumque rationale.] *Hoc enim supra demonstratum est.*

Sit AB 5, & AD 4 plus R 12. erit EF, vel FD R 3. & si ad rectam lineam AE applicetur parallelogrammum æquale quadrato ipsius EF, deficiens figura quadrata, erit ex demonstratis ad 18 huius AG 3, GE 1. quare parallelogrammum AH est 15, GK 5, & EL vel FC R 75: ideoq; totum AC parallelogrammum erit 20 plus R 300. Huiusmodi vero spacia iuniores etiam binomialia, seu ex binis nominibus appellant, quorum latera quadrata, vel radices ex ijs, quæ tradita sunt, facile inuenire licebit in hunc modum.

Binomialis spacij latus quadratum, vel radicem inuenire.

Sit binomialis spacium 20 plus R 300, cuius oporteat latus quadratum inuenire. diuidatur maius nomen, videlicet 20 in duas partes, ita vt quod ex ipsis producitur sit æquale quartæ parti quadrati minoris nominis, hoc est æquale 75. erit ex ijs, quæ nos tradidimus ad 18 huius, maior pars 15, & minor 5. dico R 15 plus R 5 esse latus quadratum eius spacij 20 plus R 300. Quoniam enim recta linea, quæ ex binis nominibus constat, videlicet R 15 plus R 5, diuiditur in duas partes, erit quadratum totius æquale quadratis partium vna cum reſtanguſo, quod bis dictis partibus continetur. itaque quadratum R 15 est 15; & quadratum R 5 est 5: reſtanguſum autem, quod continetur R 15 & R 5 est R 75, & eius duplum est R 300. quæ omnia si componentur facient 20 plus R 300, et idem erit quadratum, quod fit ex recta linea R 15 plus R 5. ergo R 15 plus R 5 est latus quadratum, vel radix huius spacij binomialis 20 plus R 300. Eodem modo & aliorum spaciorum binomialium radices inueniemus. quod facere oportebat.

THEOREMA XXXVIII. PROPOSITIO LVI.

Si spacium contineatur rationali, & ex binis nominibus secunda, recta linea spacium potens irrationalis est, quæ ex binis medijs prima appellatur.

Spacium enim ABCD contineatur rationali AB, & ex binis nominibus secunda AD. Dico rectam lineam, quæ spacium AC potest, ex binis medijs primam esse. Quoniam enim AD est ex binis nominibus secunda, diuidatur in nomina ad punctum E, ita vt AE sit maius nomen. ergo AE ED rationales sunt potentia solum communisurabiles: & AE plus potest quàm ED quadrato rectæ lineæ sibi longitudine communisurabilis: & minus nomen ED communisurabile est ipsi AB longitudine. secetur ED bifariam in F: & quadrato ipsius EF æquale parallelogrammum ad rectam lineam AE applicetur, deficiens figura quadrata, quod sit ACE. communisurabilis igitur est AG ipsi GE longitudine, & per puncta G E F ipsi AB DC parallele ducantur GH EK FL. parallelogrammo autem AH æquale quadratum SN constituitur, & parallelogrammo GK æquale quadratum NP: & ponatur ita, vt MN sit in directum ipsi

2. diffi. secundum.

18. huius.

ipsi NX. ergo & RN ipsi NO in directum erit; & compleatur SP quadratum. manifestum iam est ex ijs, quæ demonstrata sunt, parallelogrammum MR medium esse proportionale quadratorum SN NP: & parallelogrammo EL æquale. & præterea recta lineam MX posse spacium AC. ostendendum igitur est ipsam MX ex binis medijs primam esse. Quoniam enim incommensurabilis est AE ipsi ED longitudine, cõmensurabilis aut ED ipsi AB; erit AE ipsi AB longitudine incommensurabilis. Et quoniam AG cõmensurabilis est longitudine ipsi GE, erit AE vtrique ipsarum AG GE longitudine cõmensurabilis. atque est AE rationalis. rationalis igitur & vtrique AG GE. Quod cū AE sit incommensurabilis quidem ipsi AB longitudine, cõmensurabilis autē vtrique ipsarum AG GE, erunt AG GE ipsi AB longitudine incommensurabiles. quare BA, AG, GE rationales sunt potentia solum cõmensurabiles. medium igitur est vtrumque parallelogrammorum AH GK. & ob id vtrumque quadratorum SN NP est medium. ergo rectæ lineæ MN NX mediæ sunt. rursus quoniam cõmensurabilis est AG ipsi GE longitudine, erit parallelogrammum AH parallelogrammo GK cõmensurabile, hoc est quadratum SN ipsi NP, hoc est quadratum ex MN quadrato ex NX. ergo MN NX potentia cõmensurabiles sunt. & quoniam incommensurabilis est AE ipsi ED longitudine: & AE quidem est cõmensurabilis ipsi AG; ED vero ipsi EF: erit AG ipsi EF longitudine incommensurabilis. quare & parallelogrammum AH incommensurabile parallelogrammo EL, hoc est SN ipsi MR, hoc est ON ipsi NR, hoc est MN ipsi NX incommensurabilis est longitudine. ostensæ autem sunt MN NX & mediæ, & potentia cõmensurabiles. ergo MN NX mediæ sunt, potentia solum cõmensurabiles. Dico & rationale continere. Quoniam enim DE ponitur cõmensurabilis vtrique ipsarum AB EF. erit FE ipsi EK longitudine cõmensurabilis: atque est rationalis vtraque ipsarum, rationale igitur est & parallelogrammum EL, hoc est MR. estq; MR, quod MN NX continetur. si autem duæ mediæ potentia solum cõmensurabiles componantur, quæ rationale contineant; tota irrationalis est, quæ ex binis medijs prima appellatur. ergo MX ex binis medijs est prima, quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIUS.

Sit AB 6, AD R 12 plus 3. erit EF vel FD $1\frac{1}{2}$: & si ad AE applicetur parallelogrammum æquale quadrato ipsius EF, deficiens figura quadrata; erit AG R 6 $\frac{1}{4}$ GE R $\frac{1}{4}$. parallelogrammum igitur AH est R 243, GK R 27. & EL 9: & totum AC parallelogrammum R 432 plus 18. ut autem invenitur eius radix, dividemus R 432 in duas partes, ita ut quod ex ipsis producit fit æquale quartæ parti quadrati 18, hoc est æquale 81. erit ex iam dictis maior pars R 108 plus R 27: quæ duæ radices si inter se componantur facient R 243. minor autem pars erit R 108 minus R 27. & detracta R 27 à R 108 relinquitur R 27. maior igitur pars est R 243, & minor R 27. quare spacij binomialis R 432 plus 18 radix erit R R 243 plus R R 27.

THEOREMA XXXIX. PROPOSITIO LVII.

Si spacium contineatur rationali, & ex binis nominibus tertia, recta linea spacium potens irrationalis est, quæ appellatur ex binis medijs secunda.

Spacium

Spacium enim ABCD contineatur rationali AB, & ex binis nominibus tertia AD. diuidatur in nomina ad punctum E, quorum maius sit AE. Dico rectam lineam, quæ potest spacium AC irrationalem esse, quæ ex binis medijs secunda appellatur. construantur enim eadem, quæ supra. & quoniam AD ex binis nominibus tertia est, erunt AE ED rationales potentia solum commensurabiles, & AE plus poterit, quàm ED quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine: neutraq; ipsarum AE, ED ipsi AB longitudine erit commensurabilis. similiter ostēdemus MX eam esse, quæ spacium AC potest, & MN NX ex binis esse medijs. itaque ostendendum est & secundam esse. Quoniam enim DE incommensurabilis est longitudine ipsi AB, hoc est ipsi EK; at que est DE commensurabilis EF: erit EF ipsi EK longitudine incommensurabilis. & sunt rationales. ergo FE EK rationales sunt potentia solum commensurabiles: & ob id EL, hoc est MR medium est, quod MN NX continetur. quare MX ex binis medijs est secunda.

diff. 3. secunda.
darum.

F. C. COMMENTARIIS.

Sit AB 6, AD 18 plus 18. erit EF 2 $\frac{1}{2}$: & si ad AE applicetur parallelogrammum AGE aequale quadrato ipsius EF, deficiens figura quadrata, erit AG 12 $\frac{1}{2}$ GE $\frac{1}{2}$. quare parallelogrammum AH est 450, GK 18, & EL 90: & totum parallelogrammum AC est 648 plus 18 360. Diuidatur 648 in duas partes, ita ut quod ipsis continetur sit aequale quæque parti quadrati 360, hoc est 90. erit maior pars 450, & minor 18. spacij igitur binomialis 648 plus 360 radix est 450 plus 18.

THEOREMA XL. PROPOSITIO LVIII.

Si spacium contineatur rationali, & ex binis nominibus quarta, recta linea spacium potens. irrationalis est, quæ vocatur maior.

Spacium enim AC contineatur, rationali AB & ex binis nominibus quarta AD, diuisa in nomina ad punctum E, quorum AE sit maius. Dico rectam lineam, quæ spacium AC potest, irrationalem esse, quæ maior appellatur. Quoniam enim AD ex binis nominibus est quarta, erunt AE ED rationales potentia solum commensurabiles: & AE plus poterit, quàm ED quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis: & AE ipsi AB commensurabilis erit longitudine. diuidatur DE bifariam in F: & quadrato ipsius EF aequale parallelogrammum ad AE applicetur, deficiens figura quadrata, quod sit AGE. erit igitur AG ipsi GE longitudine incommen-

diff. 4. secunda.
darum.

sf furabilis

19. huius:

furabilis. Ducatur ipsi AB parallele GH EK FL, & eadem fiat, quæ supra. constat igitur MX posse spacium AC. itaque ostendendum est MX irrationalem esse, quæ vocatur maior. Quoniã enim AG ipsi GE incommensurabilis est longitudine, erit & AH parallelogrammum ipsi GK incommensurabile, hoc est SN ipsi NP. ergo MN NX potentia incommensurabiles sunt. & quoniam AE ipsi AB longitudine est commensurabilis, parallelogrammum AK rationale est. atque est æquale quadratis ipsarum MN NX. ergo compositum ex quadratis MN NX est rationale. quod cum D E sit incommensurabilis longitudine ipsi AB, hoc est ipsi EK; sit autem commensurabilis ipsi EF: erit EF ipsi EK incommensurabilis longitudine. quare KE EF rationales sunt potentia solũ commensurabiles: & ob id medium est parallelogrammum EL, hoc est MR, & MN NX continetur: estq; compositum ex quadratis ipsarum M N NX rationale: & MN ipsi NX potentia incommensurabiles componantur, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem ipsis continetur medium; tota irrationalis erit. vocetur autem maior. ergo MX irrationalis est, quæ maior appellatur, & potest spacium A C. quod demonstrare oportebat.

ae : huius.

40. huius.

F. C. COMMENTARIUS.

Sit AB 6, AD 6 plus R 24. erit EF R 6. si autem ad AE applicetur parallelogrammum AG E aequale quadrato ipsius EF, et deficiet figura quadrata; erit AG 3 plus R 3, & GE 3 minus R 3. ergo AH parallelogrammum est 18 plus R 108, GK 18 minus R 108, & EL vel FC R 216, totumq; parallelogrammum AC 36 plus R 864. itaque si diuidamus 36 in duas partes, ita vt productum ex ipsis sit æquale 216, erit maior pars 18 plus R 108, & minor 18 minus R 108. quare spacij binomialis 36 plus R 864 radix est RV. 18 plus R 108 plus R V. 18 minus R 108.

THEOREMA XLI. PROPOSITIO LIX.

Si spacium contineatur rationali, & ex binis nominibus quinta, quæ spacium potest recta linea irrationalis est, vocaturq; rationale, & medium potens.

Spacium. n. AC cõtineatur rationali AB, & AD ex binis nominibus quinta, quæ diuidatur in nomina ad pũctũ E, ita vt maius nomẽ sit AE. Dico rectam lineã, quæ põt spacium AC, irrationalẽ esse, quæ vocatur rationale, ac mediũ potens. construat enim eadem, quæ supra. manifestũ est MX posse spacium AC. itaque ostẽdere oportet MX irrationalem esse, quæ rationale, ac medium potest. Qm̃ enim AG ipsi GE incommensurabilis est longitudine, & parallelogrammum AH est incommensurabile

19. huius.

mensurabile

inmensurable parallelogrammo HE, hoc est quadratū ex MN quadrato ex NX. ergo MN NX potentia incommensurabiles sunt. Quod cū AD sit ex binis nominibus quinta; sit; minor ipsius portio ED; erit ED ipsi AB commensurabilis longitudine. sed AE ipsi ED est incommensurabilis. ergo & AB incommensurabilis est longitudine ipsi AE; ac propterea BA AE rationales sunt potentia solum commensurabiles. medium igitur est AK, hoc est compositum ex quadratis ipsarum MN NX. & quoniam DE commensurabilis est longitudine ipsi AB, hoc est ipsi EK; estq; DE commensurabilis ipsi EF: erit & FE ipsi EK commensurabilis. rationalis autem est EK. ergo & FE est rationalis, & parallelogrammum EL rationale, hoc est MR, hoc est quod MN NX continetur. quare MN NX potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis medium: quod autem ipsis continetur, rationale. ergo MX potens est rationale, ac medium, & potest spaciū AC. quod demonstrare oportebat.

Diff. 5. secundum
datum.

21. huius.

22. huius.
20. huius.

F. C. COMMENTARIUS.

Sit AB 6, AD R 24 plus 4, erit EF 2. applicetur ad AE parallelogrammum AGE aciale quadrato ipsius EF, deficiēs figura quadrata; erit AG R 6 plus R 2, GER 6 minus R 2; parallelogrammumq; AH R 216 plus R 72; GE R 216 minus R 72; EL 12: & totum AC parallelogrammum R 864 plus 24. si igitur diuidamus R 864 in duas partes, ut id, quod ex ipsis producitur sit eiale 144; erit maior pars R 216 plus R 72, & minor R 216 minus R 72. quare spaciū eij binomialis R 864 plus 24 radix est RV. R 216 plus R 72 plus RV. R 216 minus R 72.

THEOREMA XLII. PROPOSITIO. LX.

Si spaciū contineatur rationali, & ex binis nominibus sexta, quare spaciū potest recta linea irrationalis est: vocaturq; bina media potens.

Spaciū enim ABCD contineatur rationali AB, & ex binis nominibus sexta AD; quare diuidatur in nomina ad punctum E, ita ut AE sit maius nomen. Dico rectam lineam, quare potest spaciū AC, irrationalem esse, quare vocatur bina media potens. construatur enim eadem, quare supra, manifestū est MX posse spaciū AC: & MN ipsi NX potentia incommensurabilem esse. Et quoniam EA ipsi AB incommensurabilis est longitudine, erunt EA AB rationales potentia solum commensurabiles. medium igitur est AK, hoc est compositum ex quadratis ipsarum MN NX. Rursus quoniam incommensurabilis est ED ipsi AB longitudine, erit & FE ipsi EK longitudine incommensurabilis: ergo & FE EK rationales sunt potentia solum commensurabiles; ac propterea medium est EL, hoc est MR; hoc est quod MN NX continetur. Quod cum AE sit incommensurabilis ipsi EF, & parallelogrammum AK parallelogrammo EL incommensurable erit. Sed AK quidem est compositum ex quadratis ipsarum MN NX: EL vero est quod MN, NX continetur. incommensurable igitur est compositum ex quadratis ipsarum MN NX ei, quod MN NX continetur. atque est utrumque ipsorum medium; & MN NX potentia sunt incommensurabiles: ergo MX est bina media potens, & potest spaciū AC. quod demonstrare oportebat.

22. huius.

B

- A Rursus quoniam incommensurabilis est ED ipsi ab longitudine, erit & FE ipsi EK longitudine incommensurabilis] Quoniam enim ED ipsi AB incommensurabilis est longitudine; atque est FE commensurabilis ED; erit ex 13 huius etiam FE ipsi AB, hoc est ipsi EK longitudine incommensurabilis.
- B Quod cum AE sit incommensurabilis ipsi EF] Ex 13 huius. est enim AE ipsi ED incommensurabilis, & EF commensurabilis ipsi ED.
- C Et MN NX potentia sunt incommensurabiles] Nam cum AG sit incommensurabilis ipsi GE longitudine, erit AH parallelogrammum parallelogrammo HE, hoc est quadratum ex MN quadrato ex NX incommensurabile. ergo MN NX potentia incommensurabiles sunt.
- C Ergo MX est bina media potens] Ex 42 huius.
- D Sit AB 5, AD R 10 plus R 8. erit EF R 2. si igitur ad AE applicetur parallelogrammum AGE, aequale quadrato ipsius EF, quod deficiat figura quadrata, erit AGR 2 $\frac{1}{2}$ plus R $\frac{1}{2}$, GER 2 $\frac{1}{2}$ minus R $\frac{1}{2}$ & parallelogrammum AHR 62 $\frac{1}{2}$ plus R 12 $\frac{1}{2}$, GK R 62 $\frac{1}{2}$ minus R 12 $\frac{1}{2}$, et EL R 50: totumque AC parallelogrammum R 250 plus R 200. Dividatur R 250 in duas partes, ita ut quod ex ipsis producit sit aequale 50; erit maior pars R 62 $\frac{1}{2}$ plus R 12 $\frac{1}{2}$, & minor R 62 $\frac{1}{2}$ minus R 12 $\frac{1}{2}$. Eius igitur spacij binomialis R 250 plus R 200 radix est V. R 62 $\frac{1}{2}$ plus R 12 $\frac{1}{2}$ plus R 62 $\frac{1}{2}$ minus R 12 $\frac{1}{2}$.

L E M M A .

Si recta linea in partes inaequales secetur, ipsarum partium quadrata maiora sunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur.

Sit recta linea AB, & secetur in puncto C, ita ut AC sit maior, quam CB. Dico quadrata ex AC CB maiora esse rectangulo, quod bis AC CB continetur. secetur enim AB bifariam in D. & quoniam recta linea AB in partes quidem aequales secatur ad D; in partes vero inaequales ad C; rectangulum, quod AC CB continetur vna cum quadrato ipsius CD est aequale ei, quod fit ex AD quadrato. ergo rectangulum ACB quadrato ex AD est minus. quod igitur bis continetur AC CB minus est quam duplum quadrati ex AD. sed quadrata ex AC CB dupla sunt quadratorum ex AD DC. ergo quadrata ex AC CB maiora sunt eo, quod bis AC CB continetur. quod demonstrare oportebat.

* Ergo quadrata ex AC CB maiora sunt eo, quod bis ACCB continetur] Quoniam enim quadrata ex AC CB dupla sunt quadratorum ex AD DC, erunt quadrata ex AC CB maiora, quam dupla quadrati ex AD. sed quod bis continetur AC CB minus est, quam duplum quadrati ex AD. quadrata igitur ex AC CB multo maiora sunt eo, quod bis ACCB continetur.

T H E O R E M A . X L I I I . P R O P O S I T I O . L X I .

Quadratum eius, quae est ex binis nominibus ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus primam.

Sit ex binis nominibus AB, diuisa in nomina ad punctum C, ita ut AC sit maius nomen: exponaturque rationalis DE; & quadrato rectae lineae AB aequale ad ipsam DE applicetur parallelogrammum DEFG, latitudinem faciens DG. Dico DG ex binis nominibus primam esse. Applicetur enim ad rationalem DE quadrato quidem ipsius AC aequale parallelogrammum DH: quadrato autem ipsius BC aequale KI. reliquum

reliquum igitur, quod bis ACCB continetur est æquale parallelogrammo MF. secetur MG bifariâ in N: & alterutri ipsarum ML GF parallela ducatur NX. vtrumque igitur parallelogrammorum MX NF est æquale ei, quod semel AC CB continetur. Et quoniam ex binis nominibus est AB, diuisa in nomina ad punctum C, erunt AC CB rationales potentia solum commensurabiles. ergo quadrata ex ACCB rationalia sunt, & commensurabilia inter sese: & ob id compositum ex quadratis ipsarum ACCB commensurabile est earumdem ACCB quadratis. rationale igitur est compositum ex quadratis ACCB, atque est æquale parallelogrammo DL. ergo & DL est rationale, & ad rationalem DE applicatum est. rationalis igitur est D

37. huius.

16. huius.
6. diffi.

23. huius.

13. huius.

Ex lemma-
te ad 35. hu-
ius.
1. sexti.
17. sexti.1. sexti.
10. huius.Ex anteceden-
tium.
1. sexti.
14. quinti.

19. huius.

1. diffi. secū-
darum.

M, & ipsi DE commensurabilis longitudine. Rursus quoniam ACCB rationales sunt potentia solum commensurabiles, medium est, quod bis AC CB continetur, hoc est MF, & ad rationalem ML applicatum est. rationalis igitur est MG, & ipsi ML hoc est ipsi ED longitudine incommensurabilis. est autem & MD rationalis, & ipsi DE commensurabilis longitudine. ergo DM ipsi MG longitudine est incommensurabilis. suntq; rationales. ergo DM MG rationales sunt potentia solum commensurabiles; ac propterea DG est ex binis nominibus. ostendendum est & primam esse. Quoniam enim quadratorum ex AC CB medium proportionale est, quod AC CB continetur; erit etiam parallelogrammorum DH KL medium proportionale M X. est igitur vt DH ad MX, ita MX ad KL, hoc est vt recta linea DK ad MN, ita MN ad MK. ergo rectangulum DKM quadrato ex MN est æquale. Et quoniam quadratum ex AC commensurabile est quadrato ex CB, erit & parallelogrammum DH parallelogrammo KL commensurabile. ergo & DK ipsi KM longitudine est commensurabilis. quod cum quadrata ex AC CB maiora sint eo, quod bis AC CB continetur; erit & parallelogrammum DL maius parallelogrammo MF: id eoq; recta linea DM ipsa MG est maior. atque est rectangulum DKM æquale quadrato ex MN, hoc est quarta parti quadrati ex MG: & DK ipsi KM longitudine est commensurabilis. si autem sint duæ rectæ lineæ inæquales, & quarta parti quadrati minoris æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes commensurabiles ipsam diuidat, maior pius poterit, quàm minor quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine. suntq; rationales DM MG, & DM, quæ est maius nomen expositæ rationali DE longitudine est commensurabilis. ergo DG est ex binis nominibus prima, quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIUS.

Sit AB R 15 plus R 5, & DE 5. erit DH 15 KL 5, & MX R 75 & NF R 75. quare si ad DE applicetur DH latitudinem faciet DK 3: & si applicetur KL faciet KM 1. Quod si ad eandem applicetur MX videlicet R 75 faciet latitudinem MN R 3. ex 2. theoremate eorum, quæ ad 20 huius conscripsimus. et similiter NG erit R 3. ergo tota DG est 4 plus R 12, quæ est ex binis nominibus prima.

THEOREMA XLIIII. PROPOSITIO LXII.

Quadratum eius, quæ est ex binis medijs prima ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus secundam.

Sit ex binis medijs prima AB, diuisa in medias ad punctum C, quarum AC sit maior: exponaturq; rationalis DE, & ad ipsam applicetur parallelogrammum æquale quadrato

quadrato ipsius AB, quod sit DF, latitudinem faci-
ciens DG. Dico DG ex binis nominibus secundā
esse. Construantur enim eadem, quę supra. & quo-
niam AB ex binis medijs est prima, diuisa ad pun-
ctum C, erunt AC CB medię potentia solum cō-
mensurabiles, quę rationalem continent. quare
& quę sunt ex AC CB media sunt; ideoq; DL
est medium, quod ad rationalem applicatū est.
rationalis igitur est MD, & ipsi DE longitudine
incommensurabilis. Rursus quoniam rationale
est quod bis AC CB continetur, erit & MF ratio-
nale, & ad rationalem ML applicatum est. ergo
& MG est rationalis; & ipsi ML, hoc est ipsi DE
commensurabilis longitudine. incommensura-
bilis igitur est DM ipsi MG, & sunt rationales. quare DM MG rationales sunt potē-
tia solum commensurabiles; ac propterea DG est ex binis nominibus. ostendendum
est & secundam esse. Quoniam enim quadrata ex AC CB maiora sunt eo, quod bis
AC CB continetur, erit & DL parallelogrammum parallelogrammo MF maius. er-
go & recta linea DM maior est ipsa MG. Quod cum quadratum ex AC quadrato
ex CB sit commensurabile, & DH parallelogrammum parallelogrammo KL com-
mensurabile erit. quare & DK commensurabilis ipsi KM: atque est quod DK KM cō-
tinetur quadrato ipsius MN æquale. ergo DM plus potest, quā MG quadrato re-
cta lineę sibi longitudine commensurabilis. estq; MG commensurabilis longitudi-
ne ipsi DE. quare DG ex binis nominibus est secunda.

F. C. COMMENTARIUS.

Sit AB RR 48 plus RR 27, et DE 4; erit DHR 48, KLR 27, MX, et NF 6. ergo si ad DE
applicetur DH, faciet DK R 3 ex 2 theoremate iam dicto, et ead em ratione si ad eandem applicetur
KL, erit KM R $1\frac{1}{16}$ et si applicetur MX vel NF, erit MN, vel NG $1\frac{1}{2}$ et quoniam DK KM
hoc est R 3, R $1\frac{1}{16}$ longitudine cōmensurabiles sunt, si inter se componantur, erit ex tertio theore-
mate eorum, quę nos ad 20 huius appoſuimus, DMR 9 $\frac{1}{16}$ ergo tota DG est R 9 $\frac{1}{16}$ plus 3 vi-
delicet ex binis nominibus secunda.

THEOREMA XLV. PROPOSITIO. LXIII.

Quadratum eius, quę est ex binis medijs secunda ad rationa-
lem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

Sit ex binis medijs secunda AB, diuisa in medias
ad C, ita vt AC sit maior portio. rationalis autem
sit DE: & ad ipsam DE quadrato ex AB æquale pa-
rallelogrammum DF applicetur, latitudinem faci-
ens DG. Dico DG ex binis nominibus tertiam ef-
fe. Construantur enim eadem, quę supra. & quo-
niam AB est ex binis medijs secūda, diuisa ad punctū
C, erunt AC CB medię potentia solum commē-
surabiles, quę medium contineant. ergo & compo-
situm ex ipsarum AC CB quadratis medium est,
& ipsi DL æquale. medium igitur est DL, & ad rati-
onalem DE applicatur. ergo rationalis est MD,
& ipsi DE longitudine incommensurabilis. Eadem
ratione, & MG est rationalis, & incommensurabi-
lis ipsi ML, hoc est ipsi DE. vtraque igitur ipsarum

DM MG rationalis est, & ipsi DE longitudine incommensurabilis. & quoniam incommensurabilis est AC ipsi CB longitudine; vt autem AC ad CB, ita quadratum ex AC ad rectangulum ACB: erit & quadratum ex AC rectangulo ACB incommensurabile. ergo & compositum ex quadratis AC C B incommensurabile est ei, quod bis AC CB continetur; hoc est DL incommensurabile ipsi MF. et ob id recta linea DM ipsi MG est incommensurabilis: suntq; rationales. ergo DG est ex binis nominibus. ostendendū est et tertiā esse. similiter enim concludemus DM ipsa MG maiorem esse, et DK ipsi KM commensurabilem. atque est rectangulum DKM quadrato ipsius MN aequale. ergo DM plus potest, quam MG, quadrato rectę lineę sibi incommensurabilis longitudine; et neutra ipsarum DM MG est longitudine commensurabilis ipsi DE. quare DG est ex binis nominibus tertiā.

1. sexti, uel
ex lemm. ad
23. huius:
B

1. sexti & 102
huius.

37. huius:

19. huius.

3. diff. secundum
datum.

F. C. COMMENTARIUS.

Ergo et compositum ex ipsarum AC CB quadratis medium est.] Ex duobus enim A medijs incommensurabilibus, si inter se componantur, unum fit medium, vt in 45 huius diximus.

Ergo et compositum ex quadratis AC CB incommensurabile est ei, quod bis A B C CB continetur.] Nam cum quadrata ex AC CB incommensurabilia sint, si inter se componantur, erit compositum incommensurabile quadrato ex AC per 16 huius. quod autem bis continetur AC CB rectangulo ACB est incommensurabile, vt pote eius duplum. ergo ex ijs, quae nos ad 14 huius demonstrauimus, compositum ex quadratis AC CB incommensurabile est ei, quod bis AC C B continetur.

Sit AB RR 72 plus RR 8, et DE 4. erit DHR 72, KLR 8, MX, vel NFR 24. quare si ad DE applicetur DH, latitudinem faciet DK R 4 $\frac{1}{2}$: si vero applicetur KL faciet KM R $\frac{1}{2}$. et si MX, vel NF faciet MN, vel NG R 1 $\frac{1}{2}$. At si DK KM componantur, hoc est R 4 $\frac{1}{2}$, & R $\frac{1}{2}$. fiet DM R 8. tota igitur DG est R 8 plus R 6, quae est ex binis nominibus tertiā.

THEOREMA XLVI. PROPOSITIO LXIII.

Quadratum maioris ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quartam.

Sit maior AB, diuisa in puncto C, ita vt AC maior sit quā CB. rationalis autem quędam sit DE: & quadrato ex AB æquale ad ipsam DE applicetur parallelogrammum DF, latitudinem faciens DG. Dico DG ex binis nominibus quartā esse. Construuntur enim eadem, quę supra. Et quoniam maior est AB, diuisa in C, erunt AC C C potentia incommensurabiles, quę faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem ipsis continetur medium. itaque quoniam rationale est compositum ex quadratis ipsarum AC CB, erit & parallelogrammum DL rationale. ergo & rationalis est recta linea DM, ipsiq; DC longitudine commensurabilis. Rursus quoniam medium est quod bis AC CB continetur, hoc est MF, & ad rationale ML est applicatum; erit et MG rationalis, & ipsi DE incommensurabilis longitudine. ergo & DM ipsi MG longitudine incommensurabilis est; ac propterea DM MG rationales

40. huius.

21. huius.

23. huius.

37. huius.

1. sexti & 10. huius.
19 huius.

4. diffi. secundum.

rationales sunt potentia solum commensurabiles. quare ex duobus nominibus est DG. ostendendum est & quartam esse. similiter enim superioribus cōcludemus DM maiorem esse, quā MG: et rectāgulum DKM quadrato ex MN æquale. Quoniam igitur quadratum ex AC incōmensurabile est quadrato ex CB, erit et DH parallelogrammum incōmensurabile parallelogrāmo KL. et ob id recta linea DK ipsi KM incōmensurabilis. si aut sint duæ rectæ lineæ inæquales, & quartæ parti quadrati minoris æquale parallelogrāmū ad maiore applicetur, deficiens figura quadrata, quod in partes incōmensurabiles longitudine ipsam diuidat; maior plus poterit, quā minor quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incōmensurabilis. ergo DM plus potest, quā MG, quadrato rectæ lineæ sibi incōmensurabilis longitudine. suntq; DM MG rationales potentia solum commensurabiles: atque est DM commensurabilis expositæ rationali DE. quare DG est ex binis nominibus quarta.

F. C. COMMENTARIUS.

Sit AB R. 10 plus R. 37 $\frac{1}{2}$ plus R. 10 minus R. 37 $\frac{1}{2}$: et DE sit 5. erit DH 10 plus R. 37 $\frac{1}{2}$: KL 10 minus R. 37 $\frac{1}{2}$: MX, vel NF R. 62 $\frac{1}{2}$. itaque si ad DE applicetur DH latitudo facies DK, erit DK 2 plus R. 1 $\frac{1}{2}$: si vero applicetur KL facies KM, erit ea 2 minus R. 1 $\frac{1}{2}$: & si applicetur MX, vel NF, erit MN, vel NG R. 2 $\frac{1}{2}$. Quod si componantur DK KM, hoc est 2 plus R. 1 $\frac{1}{2}$, & 2 minus R. 1 $\frac{1}{2}$, fiet DM 4, ergo tota DG est 4 plus R. 10. videlicet ex binis nominibus quarta.

THEOREMA XLVII. PROPOSITIO. LXV.

Quadratum eius, quæ rationale, ac medium potest ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

41. huius.

23. huius.

21. huius.

13. huius.

5. diffi. secundum.

Sit rationale, ac medium potens A B, diuisa in rectas lineas ad punctum C, ita vt AC sit maior. exponaturq; rationalis DE, & quadrato ipsius A B æquale parallelogrammum D F ad ipsā DE applicetur, latitudinem faciens D G. Dico DG ex binis nominibus quintam esse. Construat enim eadem, quæ supra. Et quoniam rationale, ac medium potens est AB, diuisa ad C punctum, erunt AC CB potentia incōmensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem ipsis continetur rationale. quoniam igitur medium est compositum ex ipsarum AC CB quadratis, erit & parallelogrāmum DL medium: ideoq; recta linea DM rationalis est, & ipsi DE longitudine incōmensurabilis. Rursus quoniam rationale est, quod bis AC CB continetur, hoc est parallelogrammum MF; erit MG rationalis, & ipsi DE longitudine commensurabilis. incōmensurabilis igitur est DM ipsi MG. quare DM MG rationales sunt potentia solum commensurabiles; ac propterea DG est ex binis nominibus. Dico & quintam esse. similiter enim demonstrabitur, rectāgulum DKM quadrato ex MN esse æquale; & DK ipsi KM longitudine esse incōmensurabilem. quare DM plus potest, quā MG quadrato rectæ lineæ sibi incōmensurabilis longitudine: suntq; DM MG rationales, potentia solum commensurabiles; & minor MG commensurabilis est ipsi DE longitudine. ergo DG est ex binis nominibus quinta.

Sit ab $R\sqrt{R}$ 125 plus 5, plus $R\sqrt{R}$ 125 minus 5; & DE sit 5. erit parallelogrammū DH R 125 plus 5, KL R 125 minus 5; MX vel NF 10; & si ad DE applicetur parallelogrammū DH latitudinem faciens DK , erit DK R 5 plus 1. si vero applicetur KL latitudinem faciens KM , erit KM R 5 minus 1. & si applicetur MX vel NF , erit MN , vel NG 2. quod si componantur DK KM videlicet R 5 plus 1, R 5 minus 1, fiet DM R 20. tota igitur DG est R 20 plus 4. nimirum ex binis nominibus quinta.

THEOREMA XLVIII. PROPOSITIO LXVI.

Quadratum eius, quæ bina media potest, ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus sextam.

Sit bina media potens AB , diuisa ad punctum C : rationalis autem sit DE : & ad ipsam DE quadrato ex AB æquale parallelogrammum DF applicetur, latitudinem faciens DG . Dico DG ex binis nominibus sextam esse. Construantur enim eadem quæ supra. Et quoniam bina media potens est AB , diuisa ad C , erunt AC CB potentia incommensurabiles, facientes & compositum ex ipsarum quadratis incommensurabile medium; & quod ipsis continetur medium; & adhuc incommensurabile composito ex quadratis ipsarum. ergo ex iam demonstratis medium est virumque parallelogrammorum DL MF : & ad rationalem DE applicata sunt rationalis igitur est & utraque DM MG , & ipsi DE longitudine incommensurabiles. & quoniam compositum ex ipsarum AC CB quadratis incommensurabile est ei, quod bis AC CB continetur, erit & DL parallelogrammum parallelogrammo MF incommensurabile: & idcirco DM incommensurabilis MG . quare DM MG rationales sunt potentia solum commensurabiles, & ex binis nominibus est DG . Dico & sextam esse. similiter enim prædictis rursus ostendemus rectangulum DKM quadrato ex MN æquale, & idcirco DM incommensurabilem esse. ergo DM plus potest, quam MG quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine: & neutra ipsarum DM MG longitudine commensurabilis est expositæ rationali DE . quare DG ex binis nominibus est sexta.

F. C. COMMENTARIUS.

Sit ab $R\sqrt{R}$ 252 plus R 72, plus $R\sqrt{R}$ 252 minus R 72; & DE sit 6. erit DH R 252 plus R 72, KL R 252 minus R 72; MX , vel NF 180. applicetur ad DE parallelogrammū DH latitudinem faciens DK , erit DK R 7 plus R 2. Rursus applicetur KI faciens latitudinem KM , erit KM R 7 minus R 2. denique applicetur MX , vel NF , erit MN , vel NG 5. ergo tota DG est R 28 plus R 20 ex binis nominibus sexta.

THEOREMA XLIX. PROPOSITIO LXVII.

Ei, quæ est ex binis nominibus longitudine commensurabilis, & ipsa ex binis nominibus est, atque ordine eadem.

Ita Sit

Sit ex binis nominibus AB, & ipsi AB
longitudine commensurabilis sit CD.

Dico CD ex binis nominibus esse, & or-
dine eandem ipsi AB. quoniam enim ex
binis nominibus est AB, diuidatur in

A B C D

C F D

12. sexti.

19. quinti.

10. huius.

8. diffi.

10. huius.

15. huius.

12. huius.

15. huius.

15. huius.

nomina ad punctum E, & sit AE maius nomen. ergo AE EB rationales sunt poten-
tia solum commensurabiles. fiat vt AB ad CD, ita AE ad CF: & reliqua igitur EB
ad reliquam FD est, ut AB ad CD. commensurabilis autem est AB ipsi CD longitu-
dine. ergo & AE ipsi CF, & EB ipsi FD longitudine est commensurabilis. suntq; ra-
tionales AE EB. rationales igitur sunt & CF FD. & quoniam est vt AE ad CF, ita
EB ad FD, erit permutando ut AE ad EB, ita CF ad FD: sunt autem AE EB poten-
tia solum commensurabiles. ergo & CF FD potentia solum commensurabiles erunt.
& sunt rationales. ex binis igitur nominibus est CD. Dico & ipsi AB ordine eandē
esse. uel enim AE plus potest, quam EB quadrato rectæ lineæ sibi longitudine com-
mensurabilis, uel incommensurabilis. si quidem commensurabilis, & CF plus pote-
rit, quam FD quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine. Quod si AE
sit commensurabilis expositæ rationali, & CF eidem commensurabilis erit. & ob id
vtraque ipsarum A B CD ex binis nominibus est prima; hoc est ordine eadem. Si ve-
ro EB sit commensurabilis expositæ rationali, & FD eidem erit commensurabilis. ob
eamq; causam CD ipsi AB ordine eadem est; vtraque enim est ex binis nominibus
secunda. quod si neutra ipsarum AE EB sit expositæ rationali commensurabilis, &
neutra CF FD eidem commensurabilis erit; & est vtraque tertia. At si AE plus pos-
sit, quam EB quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine, & CF plus
poterit, quam FD quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis: &
si AE sit commensurabilis expositæ rationali, & CF eidem commensurabilis erit,
& est vtraque quarta. quod si EB, & ipsa FD, & est vtraque quinta. si vero neutra ip-
sarum AE EB, & neutra CF FD expositæ rationali erit commensurabilis, & est vtraque
sexta. ergo ei, quæ est ex binis nominibus longitudine commensurabilis, & ipsa ex
binis nominibus est, & ordine eadem.

THEOREMA L. PROPOSITIO. LXVIII.

Ei, quæ est ex binis medijs longitudine commensurabilis, & ip-
sa ex binis medijs est, atque ordine eadem.

Sit ex binis medijs AB, & ipsi AB com-
mensurabilis longitudine sit CD. Dico CD
ex binis medijs esse, & ipsi AB ordine ean-
dē. quoniam enim A B ex binis medijs est,

A B C D

C F D

38. huius.

12. sexti.

19. quinti

10. huius.

24. huius.

*

diuisa in medias ad punctum E, erunt AE
EB mediæ potentia solum commensurabiles. Itaque fiat vt A B ad C D, ita A E ad
C F. ergo & reliqua EB ad reliquam FD est vt AB ad CD. commensurabilis autem est
AB ipsi CD longitudine. quare & AE ipsi C F longitudine commensurabilis erit,
& EB ipsi FD. suntq; mediæ AE EB. mediæ igitur & C F FD. Et quoniam est vt AE
ad EB, ita CF ad FD, & sunt AE EB commensurabiles potentia solum, erunt & C F
FD potentia solum commensurabiles. ostense autem sunt & mediæ, ergo CD est
ex binis medijs. Dico & ipsi AB ordine eandem esse. Quoniam enim est vt AE ad
EB, ita CF ad FD, erit & vt quadratum ex AE ad rectangulum AEB, ita quadratū
ex CF ad rectangulum CFD. quare permutando vt quadratum ex A E ad quadra-
tum ex C F, ita rectangulum AEB ad C F D rectangulum. commensurabile autem
est quadratum ex AE quadrato ex CF. ergo & rectangulum AEB rectangulo CFD
est commensurabile. si igitur rationale est rectangulum AEB, & rectangulum CFD
rationale erit: atque est ex binis medijs prima; si vero medium est rectangulum

AEB

AEB, & ipsum CFD erit medium: & est vtrique ex binis *medijs secunda*. ergo CD ipsi AB ordine eadem est. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIUS.

Quoniam enim est vt AE ad EB, sic CF ad FD, erit & ut quadratum ex AE ad re-
ctangulum AEB, ita quadratum ex CF ad rectangulum CFD. Nam cum sit ut AE
ad EB, ita CF ad FD; ut autem AE ad EB, ita quadratum ex AE ad AEB rectangulum ex 1
sexti, vel ex lemmate ante 23 huius: erit ut quadratum ex AE ad AEB rectangulum, ita CF ad
FD. sed vt C F ad F D, ita quadratum ex CF ad rectangulum CFD. vt igitur quadratum ex AE
ad AEB rectangulum, ita quadratum ex CF ad rectangulum CFD. 11. quind.

THEOREMA LI. PROPOSITIO LXIX.

Maiori commensurabilis, & ipsa maior est.

Sit maior A B: & ipsi A B commensurabilis sit
CD. Dico CD maiorem esse. diuidatur AB in E.
ergo AE EB potentia sunt incommensurabiles,
quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum qua-
dratis rationale; quod autem ipsis continetur, me-
dium. & fiant eadem, quæ supra. quoniam igitur est vt AB ad CD, ita AE ad CF, &
EB ad FD; erit vt AE ad CF, ita EB ad FD. commensurabilis autem est A B ipsi CD.
ergo & vtrique ipsarum AE EB vtrique CF FD est commensurabilis. & quoniam
est vt AE ad CF, ita EB ad FD: permutandoq; vt AE ad EB, ita CF ad FD: & com-
ponendo vt AB ad BE, ita CD ad DF. vt igitur quadratum ex A B ad quadratum ex
B E, ita quadratum ex C D ad quadratum ex D F. similiter demonstrabimus & vt
quadratum ex AB ad quadratum ex AE, ita esse quadratum ex C D ad quadratum
ex CF. ergo & vt quadratum ex AB ad quadratum ex AE EB, ita quadratum ex CD
ad quadratum ex CF FD: permutando igitur ut quadratum ex AB ad quadratum ex
CD, ita quadratum ex AE EB ad quadratum ex CF FD. commensurable autem est qua-
dratum ex A B quadrato ex C D. ergo & quadrata ex AE EB quadratis ex CF FD
sunt commensurabilia. atque est compositum ex quadratis ipsarum AE EB ratio-
nale. ergo & rationale erit compositum ex quadratis CF FD. similiter autem & quod
bis continetur AE EB commensurable est ei, quod bis CF FD continetur. atque
est medium, quod bis continetur AE EB. medium igitur & quod bis CF FD con-
tinetur. ergo CF FD potentia sunt incommensurabiles, facientes compositum ex
ipsarum quadratis rationale: quod autem ipsis continetur medium: tota igitur CD
irrationalis est, quæ vocatur maior: ergo maiori commensurabilis & ipsa maior est.
quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIUS.

Vt igitur quadratum ex AB ad quadratum ex BE, ita quadratum ex CD ad qua-
dratum ex DF] Ex 22 sexti libri. A

Similiter demonstrabimus & vt quadratum ex AB ad quadratum ex AE, ita esse
quadratum ex CD ad quadratum ex CF] B

Quoniam enim est vt AB ad BE, ita CD ad DF, erit per conversionem rationis vt BA ad AE,
ita DC ad CF. ergo ut quadratum ex AB ad quadratum ex AE, ita quadratum ex CD ad
quadratum ex CF. 11. sexti.

Ergo & quadratum ex AB ad quadrata ex AE EB, ita quadratum ex CD ad qua-
drata ex CF FD] Est enim vt AE ad EB, ita CF ad FD. quare vt quadratum ex AE ad qua-
dratum ex EB, ita quadratum ex CF ad quadratum ex FD: & componendo vt quadrata ex AE
EB ad quadratum ex EB, ita quadrata ex CF FD ad quadratum ex FD: conuertendoq; vt qua-
dratum ex EB ad quadrata ex AE EB, ita quadratum ex FD ad quadrata ex CF FD. erat autem

EVLID. ELEMENT.

ut quadratum ex AB ad quadratum ex BE, ita quadratum ex CD ad quadratum ex DF. ergo ex aequali ut quadratum ex AB ad quadratum ex AE EB, ita quadratum ex CD ad quadratum ex CF FD.

D Similiter autem & quod bis continetur AE EB commensurabile est ei, quod bis CF FD continetur. Nam ex 4. secundi quadratum ex AB est aequale quadratis ex AE EB una cum eo, quod bis continetur AE EB: & eadem ratione quadratum ex CD est aequale quadratis ex CF FD una cum eo, quod bis CF FD continetur. Cum igitur sit ut totum ad totum, ita ablatum ad ablatum, videlicet ut quadratum ex AB ad quadratum ex CD, ita quadratum ex AE EB ad quadratum ex CF FD; erit & reliquum ad reliquum, ut totum ad totum; hoc est quod bis continetur AE EB ad id, quod bis CF FD continetur, ut quadratum ex AB ad quadratum ex CD. sed quadratum ex AB commensurabile est quadrato ex CD. ergo ex 10. huius & quod bis continetur AE EB commensurabile est ei, quod bis CF FD continetur.

E Medium igitur & quod bis CF FD continetur. J. ex corollario 24. huius. quare & medium est, quod semel continetur CF FD.

F Ergo CF FD potentia sunt incommensurabiles. Ut enim AE ad EB, ita est CF ad F D. sed AE est potentia incommensurabilis ipsi EB. ergo & CF ipsi FD potentia incommensurabilis erit, sunt igitur CF FD potentia incommensurabiles.

THEOREMA LII. PROPOSITIO. LXX.

Rationale, ac medium potenti commensurabilis, & ipsa rationale, ac medium potens est.

Sit rationale, ac medium potens AB: & ipsi AB commensurabilis sit CD. ostendendum est & CD rationale, ac medium potens esse. diuidatur AB in rectas lineas ad punctum E. ergo AE EB potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum ex ipsarum quadratis medium: quod autem ipsis continetur rationale. & eadem, quae prius constuantur. Similiter demonstrabimus CF FD potentia esse incommensurabiles: & compositum ex quadratis ipsarum AE EB commensurabile esse composito ex quadratis CF FD. Quod autem continetur AE EB commensurabile est ei, quod CF FD continetur. ergo & compositum ex quadratis ipsarum CF FD est medium. Quod autem continetur CF FD rationale. rationale igitur, ac medium potens est CD. quod ostendere oportebat.

THEOREMA LIII. PROPOSITIO. LXXI.

Bina media potenti commensurabilis, & ipsa bina media potens est.

Sit bina media potens AB, & ipsi AB commensurabilis CD. ostendendum est & D bina media potentem esse. Quoniam enim bina media potens est AB, diuidatur in rectas lineas ad punctum E. quare AE EB potentia sunt incommensurabiles, quae faciunt compositum ex ipsarum quadratis medium, quod autem ipsis continetur medium, incommensurabile; composito ex quadratis ipsarum. & constuantur eadem, quae supra. similiter demonstrabimus CF FD potentia incommensurabiles esse: & compositum ex quadratis ipsarum AE EB commensurabile composito ex quadratis CF FD. quod autem AE EB continetur commensurabile est ei, quod continetur CF FD. quare & compositum ex quadratis ipsarum CF FD medium est: itemque medium quod CF FD continetur; & adhuc incommensurabile composito ex quadratis CF FD. ergo bina media potens est CD. quod ostendendum fuit.

THEO.

THEOREMA LIIII. PROPOSITIO. LXXII.

Si rationale, & medium componantur , quattuor irrationales sunt, vel ea, quę ex binis nominibus, vel quę ex binis medijs prima, vel maior, vel rationale ac medium potens.

Sit rationale quidem spacium AB, medium autem CD. Dico eam, quę potest spacium AD, vel esse ex binis nominibus, vel ex binis medijs primam, vel maiorem, vel rationale, ac medium potentem. etenim AB vel maius est, quā CD, vel minus. sit primum maius, exponaturq; rationalis EF: & ad ipsam applicetur parallelogrammū EG ipsi AB æquale, quod latitudinem faciat EH: ipsi vero CD equal e ad EF, hoc est ad HG applicetur HI latitudinem faciens HK. & quoniam rationale est AB, & ipsi est equal EG, erit & EG rationale; &

ad rationalem EF applicatum est, latitudinem faciens EH. ergo EH est rationalis, & ipsi EF longitudine commenfurabilis. Rursus quoniam medium est CD, & ipsi est equal HI; erit & HI medium; & ad rationalem EF, hoc est HG applicatum est, latitudinem faciens HK. quare HK est rationalis, & incommenfurabilis ipsi EF longitudine. quod cum medium sit CD, rationale autem AB; erit AB ipsi CD incommenfurabile. ergo & EG incommenfurabile est ipsi HI. ut autem EG ad HI, ita est recta linea EH ad HK. ergo EH ipsi HK longitudine est incommenfurabilis. & sunt utreq; rationales. quare EH HK rationales sunt potentia solum commenfurabiles; & ob id ex binis nominibus est EK, diuisa ad punctum H. & quoniam maius est AB, quā CD, æquale autem AB ipsi EG, & CD ipsi HI; erit & EG, quā HI maius. ergo & E H maior est quā HK. vel igitur EH plus potest, quā HK quadrato rectę lineę sibi commenfurabilis longitudine, vel incommenfurabilis. possit primum quadrato rectę lineę sibi commenfurabilis longitudine, & sit maior HE expositę rationali EF commenfurabilis. ergo EK ex binis nominibus est prima, atque est EF rationalis. Si autem spacium cōtineatur rationali; & ex binis nominibus prima, recta linea spacium potens ex binis nominibus est. ergo quę potest spacium EI est ex binis nominibus. quare & ea quę potest spacium AD. Sed EH plus potest, quā HK, quadrato rectę lineę sibi longitudine incommenfurabilis: & sit maior EH expositę rationali EF commenfurabilis longitudine. ergo EK ex binis nominibus est quarta, & est EF rationalis: si autem spacium contineatur rationali, & ex binis nominibus quarta, recta linea spacium potens irrationalis est, quę maior appellatur. potens igitur spacium EI maior est. ergo & potēs spacium AD maior. sit deinde spacium AB minus, quā C D. erit & EG quā HI minus; & ob id recta linea EH minor, quā recta HK. vel igitur KH plus potest, quā HE quadrato rectę lineę sibi longitudine commenfurabilis, vel incommenfurabilis. possit primum quadrato rectę lineę commenfurabilis longitudine, & sit minor EH commenfurabilis expositę rationali EF longitudine. ergo EK ex binis nominibus est secunda: rationalis autem EF. quod si spacium contineatur rationali, & ex binis nominibus secunda, recta linea spacium potens est ex binis medijs

21. huius.

23. huius.

1. sexti.

10. huius.

1. Diffi. scđ datum.

55. huius.

4. diffi.

58. huius.

primam:

56. huius:

EVCLID. ELEMENT.

prima. potens igitur spaciū EI prima est ex binis medijs. ergo & potēs spaciū A D. Sed KH plus possit, quā HE quadrato rectę lineę sibi longitudine incommensurabilis; sitq; minor EH expositę rationali EF commensurabilis longitudine. quare EK ex binis nominibus est quinta; atque est rationalis EF. si autem spaciū continetur rationali, & ex binis nominibus quinta, quę spaciū potest recta linea rationale ac medium potēs est. quę igitur potest spaciū EI rationale & medium potens est; ideoq; rationale & mediū potēs est quę pot spaciū AD. Si igitur rationale, & medium componantur, quattuor irrationales fiunt, vel ea quę ex binis nominibus, vel quę ex binis medijs prima, vel maior, vel rationale, ac medium potens. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA LV. PROPOSITIO LXXIII.

Si duo media inter se incommensurabilia componantur duę reliquę irrationales fiunt, vel ex binis medijs secunda, vel bina media potens.

Componantur enim duo media incommensurabilia inter se AB CD. Dico rectam lineam, quę spaciū AD potest vel ex binis medijs secundam esse, vel bina media potentem. spaciū enim AB vel maius est, quā CD, vel minus. sit primum maius; exponaturq; rationalis EF: & ad EF spacio quidem AB æquale applicetur EG, latitudinem faciens EH. ipsi vero CD æquale applicetur HI, latitudinem faciens HK. & quoniam medium est utrumq; ipsorū AB CD, erit & utrūq; EG HI medium, & ad rationalem EF applicata sunt, quę latitudinem faciunt EH HK. ergo utraque EH HK rationalis est, & ipsi EF longitudine incommensurabilis. quod cum AB incommensurabile sit ipsi CD; sitq; AB quidem æquale EG; CD vero ipsi HI: erit & EG ipsi HI incommensurabile. sed ut EG ad HI, ita est EH ad HK. incommensurabilis igitur est EH ipsi HK longitudine: ideoq; EH HK rationales sunt potentia solum commensurabiles. quare ex binis nominibus est EK. itaque vel EH plus potest, quā HK quadrato rectę lineę sibi commensurabilis longitudine, vel incommensurabilis. possit primum quadrato rectę lineę sibi commensurabilis longitudine; & neutra ipsarū EH HK longitudine commensurabilis est expositę rationali EF. ergo EK ex binis nominibus est tertia, & est EE rationalis. si autem spaciū continetur rationali, & ex binis nominibus tertia, recta linea spaciū potens est ex binis medijs secunda. ergo quę potest spaciū EI, hoc est AD est ex binis medijs secunda. sed EH plus possit, quā HK quadrato rectę lineę sibi incommensurabilis longitudine; & utraque ipsarū EH HK longitudine incommensurabilis est expositę rationali EF. quare EK sexta est ex binis nominibus. At si spaciū continetur rationali, & ex binis nominibus sexta, quę spaciū potest recta linea est bina media potēs. ergo quę potest spaciū AD bina media

23. huius.

1. sexti.

10 huius.

37. huius.

57. huius.

69. huius.

dia potens est. Similiter demonstrabimus & si AB sit minus, quam CD, rectam lineam, quæ spacium potest AD, vel ex binis medijs secundam esse, vel rationale, ac medium potentem. si igitur duo media inter se incommensurabilia componantur reliquæ duæ irrationales sunt, vel ex binis medijs secunda, vel bina media potens. quod demonstrandum fuit.

Quæ ex binis nominibus & quæ post ipsam sunt, irrationales neq; mediæ, neque inter se eadem sunt. quadratum enim, quod fit à media, ad rationalem applicatum latitudinem efficit rationalem, et ei ad quam applicatur, longitudine incommensurabilem. quodd autem fit ab ea, quæ ex binis nominibus ad rationalem applicatum latitudinem efficit ex binis nominibus primam. quod ab ea, quæ est ex binis medijs prima ad rationalem applicatum latitudinem efficit ex binis nominibus secundam. Quod ab ea, quæ est ex binis medijs secunda ad rationalem applicatum latitudinem efficit ex binis nominibus tertiam. Quod à maiori ad rationalem applicatum latitudinem efficit ex binis nominibus quartam. Quod ab ea, quæ rationale, ac mediū potest ad rationalem applicatum latitudinem efficit ex binis nominibus quintam. Quod ab ea, quæ bina media potest ad rationalem applicatum latitudinem efficit ex binis nominibus sextam. Quoniam igitur dictæ latitudines differunt et à prima & inter se se: à prima quidem, quodd rationalis sit; inter se se vero, quodd ordine non sint eadem, constat & ipsas irrationales inter se differentes esse.

23. huius.

61. huius.

62. huius.

63. huius.

64. huius.

65. huius.

66. huius.

S C H O L I U M.

Septem sunt senarij, de quibus hæcenus dictum est. eorum primus quidem ostendit ortum linearum irrationalium: secundus autem diuisionem, nempe quodd ad unum dumtaxat punctum diuiduntur. tertius earum, quæ ex binis nominibus inuentionem, videlicet primæ, secundæ, tertiæ, quartæ, quintæ, & sextæ. deinceps sequitur quartus senarius, ostendens quomodo hæc lineæ inter se differant. namque usus ijs, quæ ex binis nominibus, ostendit differentiam sex irrationalium. Quintum, & sextum exposuit, ostendens in quinto quidem applicationes quadratorum, quæ ex irrationalibus, videlicet quales irrationales faciant, latitudines applicatorū spaciorū. In sexto aut quomodo irrationalibus commensurabiles eiusdem speciei sint. Rursus in septimo manifeste ostendit differentiam ipsarum. Apparet autem & in his irrationalibus arithmetica analogia: & quæ media sumitur proportionalis inter portiones cuiusque lineæ irrationalis iuxta arithmetica analogiam, & ipsa eiusdem speciei cū ijs, inter quarū portiones media interijcitur. itaq primum arithmetica medietatem in his esse, sic apparet.

Ponatur enim exempli gratia ex binis nominibus AB, & in nomina ad punctum C diuidatur. manifestum est AC maiorem esse, quam CB. auferatur à recta linea AC ipsi BC æqualis AD, & CD bifariam in E secetur. constat igitur AE ipsi EB æqualem esse, ponatur alterutri ipsarum equalis FG. manifestum est quo differt AC. ab ipsa FG, eo differt EB ab ipsa BC; etenim AC ab ipsa FG differt magnitudine E C: & eadem magnitudine differt FG ab ipsa BC, quod est arithmetica analogia proprium. commensurabilis autem est FG ipsi AB; est enim eius dimidiæ æqualis. ergo FG ex binis nominibus est. similiter ostendetur & in alijs.

PRIN-

67. huius.

THEOREMA LVI. PROPOSITIO LXXIII.

Si à rationali rationalis auferatur potentia solum commensurabilis existēs toti, reliqua irrationalis est. vocetur autem apotome.

A rationali enim AB rationalis auferatur B
C, potentia solum cōmensurabilis existens toti.
Dico reliquā AC irrationalem esse, quæ vocatur apotome. Quoniā enim incommensurabilis est AB ipsi BC longitudine; atq; est vt AB ad BC, ita quadratum ex AB ad id quod continetur AB BC: erit quadratū ex AB incommensurabile ei, quod AB BC continetur. sed quadrato quidem ex AB commensurabilia sunt quadrata ex AB BC: ei vero, quod continetur AB BC, commensurabile est quod bis AB BC continetur. quadrata igitur ex AB BC ei, quod bis continetur AB BC sunt incommensurabilia. ergo reliquo, nempe quadrato ex AC incommensurabilia sunt quadrata ex AB BC; quoniam, quadrata ex AB BC æqualia sunt ei, quod bis AB BC continetur vnā cum quadrato ex AC. rationalia autem sunt quadrata ex AB BC. ergo recta linea AC est irrationalis. vocetur autem apotome.

F. C. COMMENTARIVS.

- A Atque est vt AB ad BC, ita quadratum ex AB ad id, quod continetur AB BC] Ex 1. sexti, vel ex lem̃ate, quod 23 huius inseruit.
B Quadrata igitur ex AB BC ei, quod bis continetur AB BC sunt incommensurabilia] Ex demonstratis à nobis ad 14 huius.
C Ergo reliquo, nempe quadrato ex AC incommensurabilia sunt quadrata ex AB BC] Ex demonstratis ad 17 huius.
D Quoniam quadrata ex AB BC æqualia sunt ei, quod bis AB BC cōtinetur, vnā cum quadrato ex AC.] Ex septima 2 libri.
E Ergo recta linea AC est irrationalis] Quoniam enim quadrata ex AB BC incommensurabilia sunt quadrato ex AC, & sunt quadrata ex AB BC rationalia, sequitur quadratum ex AC irrationale esse, ideoque ex 11 diffinitione rectam lineam AC esse irrationalem.
Sic recta linea AB 2, BC Re 3, erit AC 2 minus Re 3, respondet autem tota linea AB maiori nomini eius, quæ est ex binis nominibus, de qua in 37 huius agitur; & BC respondet minori. atque est AC reliqua portio maioris nominis, nempe minori nomine ex eo detracto.

THEOREMA LVII. PROPOSITIO LXXV.

Si à media media auferatur potentia solum commensurabilis existēs toti, quæ cum tota rationale continetur; reliqua irrationalis est. vocetur autem mediæ apotome prima.

A media enim AB auferatur media BC, potentia solum commensurabilis existens ipsi AB, cum ea rationale faciens, videlicet quod AB BC continetur. Dico reliquam AC irrationalem esse. vocetur autem mediæ apotome prima. Quoniam enim AB BC mediæ sunt, erunt & quæ ex AB BC quadrata media: rationale autem est quod bis continetur

AB BC. quadrata igitur ex AB BC incommensurabilia sunt ei, quod bis AB BC continetur. ergo & reliquo, videlicet quadrato ex AC incommensurabile est id, quod bis AB BC continetur, quoniam si tota magnitudo vni componentium sit incommensurabilis, & quæ à principio magnitudines incommensurabiles erunt. Irrationalis igitur est AC. voceturq; mediæ apotome prima.

F. C. COMMENTARIUS.

Rationale autem est, quod bis continetur AB BC] Ponitur enim rationale, quod semel AB BC continetur.

Ergo & reliquo, videlicet quadrato ex AC incommensurabile est id, quod bis AB BC continetur] Namque ex 7 secundi quadrata ex AB BC sunt aequalia ei, quod bis AB BC continetur vna cum quadrato, quod sit ex AC.

Quoniam si tota magnitudo vni componentium sit incommensurabilis] Ex 17 huius.

Irrationalis igitur est AC] Nam cum id, quod bis AB BC continetur sit rationale, & incommensurabile quadrato ex AC, erit quadratum ex AC irrationale: idcircoq; recta linea AC irrationalis ex 11. diffinitione.

Sit recta linea AB R R 54, BC R R 24. erit AC R R 54 minus R R 24. respondet autem tota linea AB maiori nomini eius, quæ est ex binis medijs prima, de qua in 38 huius, & BC minor, est igitur AC reliqua portio maioris nominis, minori ex eo detracta.

THEOREMA LVIII. PROPOSITIO. LXXVI.

Si à media media auferatur, potentia solum commensurabilis existens toti, quæ cum tota medium contineat; & reliqua irrationalis est. vocetur autem mediæ apotome secunda.

A media enim AB auferatur mediæ BC potentia solum commensurabilis existens toti AB, & cum ea medium continens, videlicet quod continetur AB BC. Dico reliquam AC irrationalem esse. vocetur autem mediæ apotome secunda. exponatur enim rationalis DI: & quadratis quidem ex AB BC æquale parallelogrammum DE ad ipsam DI applicetur, latitudinem faciens DG: ei vero quod bis AB BC continetur æquale parallelogrammum DH ad eandem DI applicetur, latitudinem faciens DF. reliquum igitur FE est æquale quadrato ex AC. & quoniam media sunt, quæ ex AB BC quadrata; erit & parallelogrammum DE medium. & ad rationalem DI applicatum est, latitudinem faciens DG. ergo DG est rationalis, & ipsi DI longitudine incommensurabilis. Rursus quoniam medium est quod AB BC continetur, erit & quod bis continetur AB BC medium: atque est æquale parallelogrammo DH. ergo & DH est medium, & ad rationalem DI applicatum est latitudinem faciens DF. rationalis igitur est DF, & ipsi DI longitudine incommensurabilis. & quoniam AB BC potentia solum commensurabiles sunt, erit AB ipsi BC incommensurabilis longitudine. ergo quadratum ex AB incommensurabile est ei, quod AB BC continetur. sed quadrato quidem ex AB commensurabilia sunt quæ ex AB BC quadrata; ei vero, quod AB BC continetur commensurabile est id, quod bis continetur AB BC. quadrata igitur ex AB BC incommensurabilia sunt ei, quod bis AB BC continetur. parallelogrammum autem DE est æquale quadratis ex AB BC; & parallelogrammum DH æquale est ei, quod bis continetur AB BC. ergo DE ipsi DH est incommensurabile. sed ut DE

ad DH

E V C L I D . E L E M E N T .

7. sexti.
10. huius.

ad DH, ita recta linea GD ad DF. incommensurabilis igitur est GD ipsi DF longi-
tudine. & sunt utraque rationales. quare GD DF rationales sunt, potentia solum co-
mensurabiles. ergo FG apotome est; & DI est rationalis. quod autem rationali, & ir-
rationali continetur rectangulum irrationale est, & ipsum potens est irrationalis.
sed recta linea AC potest FE parallelogrammum. ergo AC est irrationalis. vocetur
autem media apotome secunda.

F. C. C O M M E N T A R I V S .

- A Reliquum igitur FE est æquale quadrato ex AC] Ex 7 secundi libri.
B Ergo DG est irrationalis, & ipsi DI longitudine incommensurabilis] Ex 23 huius.
C Erit & quod bis continetur AB BC medium] Ex corollario 24 huius.
D Ergo quadratum ex AB incommensurabile est ei, quod AB BC continetur] Est
Lemma. ad enim ut AB ad BC, ita quadratum ex AE ad rectangulum ABC. & cum AB ipsi BC longitudine
13. huius. sit incommensurabilis, erit & quadratum ex AB incommensurabile ei, quod AB BC continetur;
ex 10 huius.
E Sed quadrato quidem ex AB commensurabilia sunt quæ ex AB BC quadrata]
Nam rectæ lineæ AB BC potentia commensurabiles ponuntur.
F Quadrata igitur ex AB BC incommensurabilia sunt ei, quod bis AB BC conti-
netur] Ex demonstratis ad 17 huius.
G Ergo FG apotome est] Ex 74 huius.
H Quod autem rationali, & irrationali continetur rectangulum irrationale est] Ex
scholio ad 39 huius appposito, quare sequitur parallelogrammum FE irrationale esse.
K Ergo AC est irrationalis] Ex 11 diffinitione.
Sic AB R R 18, BC R R 8. erit AC R R 18 minus R R 8. respondet autem ipsa AB maiori
nomini eius, quæ est ex binis medijs secunda; & BC respondet minori. de qua in 39 huius.

THEOREMA LIX. PROPOSITIO LXXVII.

Si à recta linea recta linea auferatur, potentia incommensurabi-
lis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsa
rum quadratis rationale, quod autem ipsis continetur medium; re-
liqua irrationalis est. vocetur autem minor.

A recta linea AB auferatur recta BC potentia in-
commensurabilis existens toti, faciēq; cum tota A B compositum quidem ex ipsarū AB CB quadratis
rationale; quod autem bis AB BC continetur me-
dium. Dico reliquam AC irrationalem esse, quæ vocatur minor. Quoniam enim co-
positum quidem ex ipsarum AB BC quadratis rationale est: quod autem bis A B
BC continetur medium, erunt AB BC quadrata incommensurabilia ei, quod bis
continetur AB BC. ergo per conuersionem rationis quadrata ex AB BC quadra-
to ex AC sunt incommensurabilia. sed quadrata ex AB BC rationalia sunt. irratio-
nale igitur est quadratum ex AC; ideoq; recta linea AC est irrationalis. vocetur
autem minor.

A — C — B

F. C. C O M M E N T A R I V S .

- A Ergo per conuersionem rationis quadrata ex AB BC quadrato ex AC sunt in-
commensurabilia] Ex demonstratis ad 17 huius.
B Irrationale igitur est quadratum ex AC] Ex 10 diffinitione.
C Ideoq; recta linea AC est irrationalis] Ex undecima diffinitione.
Sic AB R V. 32 plus R 704, BC R V. 32 minus R 704. erit AC R V. 32 plus R 704 mi-
nus R V. 32 minus R 704. respondet autem AB maiori nomini eius, quæ dicitur maior; & C
respondit minori nomini eiusdem; de qua in 40 huius.

THEO-

THEOREMA LX. PROPOSITIO. LXXVIII.

Si à recta linea recta linea auferatur potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem ipsis bis continetur rationale; reliqua irrationalis est; voceturque cum rationali medium totum efficiens.

A recta enim linea AB recta linea BC auferatur, potentia incommensurabilis existens toti AB, faciensq; compositum quidem ex ipsarum AB BC quadratis medium; quod autem bis AB BC continetur, rationale. Dico reliquam AC irrationalem esse: vocetur autem cum rationali medium totum efficiens. Quoniam enim compositum ex ipsarum AB BC quadratis medium est: quod autem bis continetur AB BC rationale; erunt ex AB BC quadrata incommensurabilia ei, quod bis AB BC continetur. & reliquum igitur quadratum ex AC incommensurabile est ei, quod bis continetur AB BC. atque est quod bis continetur AB BC rationale. ergo quadratum ex AC irrationale est: & ob id recta linea AC irrationalis. vocetur aut cum rationali medium totum efficiens.

XXXI. F. C. I. C. O. M. M. E. N. T. A. R. I. V. S. S. E. T

Sit AB BxV. Bx 13 $\frac{1}{2}$ plus Bx 4 $\frac{1}{2}$: EC BxV. Bx 13 $\frac{1}{2}$ minus Bx 4 $\frac{1}{2}$. erit AC BxV. Bx 13 $\frac{1}{2}$ plus Bx 4 $\frac{1}{2}$ minus BxV. Bx 13 $\frac{1}{2}$ minus Bx 4 $\frac{1}{2}$ respondetq; AB maiori nomini eius, quae vocatur rationale, ac medium potens, & BC respondet minori. de qua in 41 huius.

THEOREMA LXI. PROPOSITIO. LXXIX.

Si à recta linea recta linea auferatur potentia incommensurabilis existens toti: & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem ipsis bis continetur medium, incommensurableq; composito ex quadratis ipsarum; reliqua irrationalis est. vocetur autem cum medio medium totum efficiens.

A recta enim linea AB, recta linea BC auferatur, potentia incommensurabilis existens toti AB, faciensq; compositum quidem ex ipsarum AB BC quadratis medium; quod autem bis AB BC continetur medium, & adhuc incommensurable composito ex quadratis ipsarum. Dico reliquam AC irrationalem esse. vocetur autem cum medio medium totum efficiens. exponatur enim rationalis DI: & quadratis quidem ex AB BC æquale parallelogrammum DE ad ipsam DI applicetur, latitudinem faciens DG. ei vero, quod bis continetur AB, BC æquale auferatur DH, latitudinem faciens DF. ergo reliquum FE est æquale quadrato ex AC. & ob id recta linea AC ipsum FE potest. itaque quoniam compositum ex ipsarum AB BC quadratis medium est, & parallelogrammum DE æquale, erit ipsum DE medium: & ad rationale DI applicatū est, latitudinē faciens DG. quare DG est rationalis, & ipsa DI longitudine incommensurabilis. Rursus qm id quod bis AB BC continetur medium est, & æquale parallelogrammo DH, erit DH medium, & ad rationale DI applicatū

Vu 2 est,

23. huius. est, latitudinem faciens DF. ergo DF est rationalis, ipsiq; DI incommensurabilis longitudine. Quod cum quadrata ex A B BC incommensurabilia sunt ei, quod bis AB BC continetur, & parallelogrammum DE ipsi DH est incommensurable. ut autem DE ad DH, ita est recta linea DG ad ipsam DF. incommensurabilis igitur est DG ipsi DF, & sunt vtręque rationales. ergo GD DF rationales sunt, potentia solum commensurabiles. apotome igitur est FG: & FH est rationalis, quod autem rationali, & apotoma continetur rectangulum irrationale est, ipsumq; potens est irrationalis. sed AC potest parallelogrammum FE. ergo AC irrationalis est. vocetur autem cum medio medium totum efficiens,

F. C. C O M M E N T A R I V S.

- A Apotome igitur est FG] Ex 74 huius.
B Quod autem rationali, & apotoma continetur rectangulum irrationale est] Et enim in scholio ad 39 huius apposito demonstratur, quod rationali, & irrationali continetur irrationale esse.
C Ipsumq; potens est irrationalis] Ex 11 diffinitione.
Sic AB R. R. 13 $\frac{1}{2}$ plus 3, BC R. R. 13 minus 3. erit AC R. R. 13 $\frac{1}{2}$ plus 3 minus R. R. 13 $\frac{1}{2}$ minus 3. & respondet AB maior i nomini eius, quae uocatur bina media potens; & BC respondet minori, de qua in 42 huius.

T H E O R E M A L X I I . P R O P O S I T I O L X X X .

Apotomę vna tantum congruit recta linea potentia solum commensurabilis existens toti.

- A Sit apotome A B: congruens autem ipsi sit BC. ergo AC CB rationales sunt potentia solum commensurabiles. Dico ipsi AB alteram non congruere rationalem, quae potentia solum sit commensurabilis toti. si enim fieri potest, congruat BD. ergo AD DB rationales sunt potentia solum commensurabiles. & quoniam quo excessu quadrata ex AD DB excedunt id, quod bis continetur AD DB, eo & quadrata ex AC CB excedunt quod bis AC CB continetur; vtręque enim excedunt eodem quadrato, quod fit ex AB. & permutando quo excessu quadrata ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB, eodem & quod bis continetur AD DB excedet id, quod bis AC CB continetur. sed quadrata ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB rationali; etenim vtręque rectarum linearum rationalis est. quod igitur bis continetur AD DB excedit id, quod bis AC CB continetur rationali. quod fieri non potest; vtręque enim media sunt. medium autem medium non superat rationali. ergo recta linea AB altera non congruit rationalis, potentia solum commensurabilis existens toti. vna igitur tantum ipsi congruit.

F. C. C O M M E N T A R I V S.

- A Ergo AC CB rationales sunt potentia solum commensurabiles] Ex 74 huius.
B Vtręque enim excedunt eodem quadrato, quod fit ex AB] Quadrata enim ex AD DB aequalia sunt ei, quod bis AD DB continetur vna cum quadrato ex AB, ex 7 secundi; & eadem ratione quadrata ex AC CB sunt aequalia ei, quod bis continetur AC CB vna cum quadrato ex AB.
C Et permutando quo excessu quadrata ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB] Hoc sequenti lemma demonstrabimus.

Sint quattuor magnitudines AB C EF G; & AB excedat ipsam C eodem excessu, quo EF excedit G. Dico & permutando AB eodem excessu excedere ipsam E, vel excedi ab ea, quo C excedit G, vel ab ea exceditur.

Sit enim DB excessus, quo AB excedit C: & HF excessus quo EF excedit G. erunt DB HF aequales; itemq; aequa es inter se AD C; & EH G. ergo AD excedit EH, vel ab ea exceditur eodem excessu, quo C ipsam G. & additis utrinque aequalibus DB HF, excedet AB ipsam EF, vel ab ea exceditur eodem excessu, quo AD ipsam EH, hoc est quo C ipsam G. atque illud est, quod demonstrare oportebat.

Sed quadrata ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB rationali. Rationale enim non superat rationale, nisi rationali. quod nos ad 27 huius demonstramus.

Utraque enim media sunt. Nam quod rationalibus potentia solū commensurabilibus continetur rectangulum irrationale est, quod medium appellatur, ex 22 huius. mediū igitur est id, quod continetur AD DB: & ideo medium quod bis continetur AD DB, ut pote eius duplum ex corollario 24 huius, eadem ratione & medium est, quod bis AC CB continetur.

Medium autem medium non superat rationali. Ex 27 huius.

THEOREMA LXIII. PROPOSITIO. LXXXI.

Mediæ apotomæ primæ vna tantum congruit recta linea media, potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota rationale continens.

Sit enim media apotome prima AB, & ipsi AB cōgruat BC. ergo AC CB mediæ sunt potentia solum commensurabiles, quæ rationale continent. Dico ipsi AB alteram non congruere mediæ, quæ potentia solum sit commensurabilis toti, & cum tota medium contineat. si enim fieri potest, congruat BD. ergo AD DB mediæ vna potentia solum commensurabiles, quæ rationale continent, quod AD DB continetur. & quoniam quo excessu quadrata ex AD DB excedunt id, quod bis continetur AD DB, eodē & quadrata ex AC CB excedunt quod bis AC CB continetur; eodem enim rursus excedunt quadrato ex AB; & permutando quo excessu quadrata ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB, eodem & quod bis continetur AD DB excedit id, quod bis AC CB continetur. sed quod bis continetur AD DB excedit id, quod bis AC CB continetur rationali: utraque enim rationalia sunt. ergo & quadrata ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB rationali. quod fieri nō potest; utraque enim sunt mediæ. medium autem medium non superat rationali: quare mediæ apotomæ primæ vna tantum congruit recta linea media, quæ potentia solum toti sit commensurabilis, & cum tota rationale contineat.

75. huius.

7. secundi.

Ex antecedē
tēlemmate.
Ex demon-
stratis ad 17.
huius.

27. huius.

THEOREMA LXIII. PROPOSITIO LXXXII.

Mediæ apotomæ secundæ vna tantum congruit recta linea, potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota medium continens.

Sit mediæ apotome secunda AB, & ipsi AB congruat BC. ergo AC CB mediæ sunt potentia solum commensurabiles, mediumq; continentes ACB. Dico ipsi AB alteram

76. huius.

alteram

CB, eodem & quod bis continetur AD DB excedit id, quod bis AC CB continetur; quadrata autem ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB rationali; vtraque enim rationalia sunt: & quod bis continetur AD DB id, quod bis AC CB continetur, rationali excedet: quod fieri non potest. etenim vtraque sunt media, ergo minori vna tantum congruit recta linea, potentia incommensurabilis existens toti, & cū tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale; quod vero bis ipfis continetur medium.

27 huius.

THEOREMA LXVI. PROPOSITIO LXXXIII.

Ei, quæ cū rationali mediū totū facit, vna tantum congruit recta linea, potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem bis ipsis continetur, rationale.

Sit cum rationali medium totum faciens AB, congruens autem ipsi BC, ergo AC CB potentia sunt incommensurabiles, facientes compositum quidem ex ipsarum AC CB quadratis medium; quod autem bis ipsis continetur, rationale. Dico ipsi AB alterā non congruere eadem facientem. si enim fieri potest, congruat. BD, ergo AD DB potentia sunt incommensurabiles, facientes compositum quidem ex ipsarum AD DB quadratis medium; quod autem bis ipsis continetur, rationale. Quoniam igitur quo excessu, quadrata ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB, eodem quod bis continetur AD DB excedit id, quod bis AC CB continetur; quod autem bis continetur AD DB excedit id quod bis AC CB continetur rationali; etenim vtraque rationalia sunt: & quadrata ex AD DB rationali excedēt quadrata ex AC CB. quod fieri non potest, cum vtraque sint media. non igitur ipsi AB altera congruit, potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem bis ipsis continetur rationale. quare ei, quæ cum rationali medium totum facit, vna tantum congruet recta linea.

28. huius.

THEOREMA LXVII. PROPOSITIO. LXXXV.

Ei, quæ cum medio medium totum facit, vna tantum congruit recta linea, potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem bis ipsis continetur, medium, & adhuc incommensurabile composito ex quadratis ipsarum.

Sit cum medio medium totum faciens AB, ipsi vero congruens BC, ergo AC CB potentia sunt incommensurabiles, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem bis ipsis continetur medium, & adhuc incommensurabile composito ex quadratis ipsarum. Dico ipsi AB alteram non congruere potentia incommensurabilem toti, & cum tota facientem ea, quæ propoſita sunt. si enim fieri potest, congruat BD, ita ut AD DB potentia incommensu-

29. huius.

rabiles

rabiles sint, faciantq; compositum quidem ex ip
sarum quadratis medium; quod autem ipsis con
tinetur medium, & incommensurabile composito
ex quadratis ipsarum. & exponatur rationalis
EF; & quadratis ipsarum AC CB æquale paral
lelogrammum EG ad ipsam EF applicetur, latitu
dinē faciens EM: ei vero, quod bis continetur AC
CB æquale parallelogrammum auferatur HG, la
titudinem faciens HM. reliquum igitur quadra
tum ex AB est æquale parallelogrammo EL. er
gō AB ipsam EL pōt. rursus quadratis ex AD
DB æquale parallelogrammum EI ad ipsam EF
applicetur, latitudinem faciens EN. est autem &
quadratum ex AB æquale parallelogrammo EL.
ergo reliquum, quod bis AD DB continetur ipsi
H I est quale, & quoniam compositum ex quadra
tis AC CB medium est, & æquale parallelogra
mo EG, erit & EG medium, quod ad rationalem EF applicatum est, latitudinem
faciens EM.

73. huius.

75. huius.

74. huius.

76. huius.

quare EM est rationalis, & ipsi EF longitudine incommensurabilis. Rur
sus quoniam quod bis AC CB continetur est medium, & æquale ipsi HG, erit &
HG medium, & ad rationalem EF applicatum est, latitudinem faciens HM. rationa
lis igitur est HM, & ipsi EF incommensurabilis longitudine. quod cum quadrata
ex AC CB incommensurabilia sint ei, quod bis AC CB continetur, erit & EC in
commensurabile ipsi GH; ideoq; recta linea EM rectæ MH longitudine est incommensurabilis. & sunt utraq; rationales. cum igitur EM MH rationales sint, potē
tia solum commensurabiles, recta linea EH apotome est, & ipsi congruens HM, si
militer demonstrabimus EH rursus apotomen esse, ipsiq; congruentem HN. ergo
apotomæ alia, atque alia congruit rationalis, potentia solum commensurabilis exi
stens toti. quod fieri non posse ostensum est. non igitur ipsi A B altera congruet re
cta linea. quare una tantum congruet, potentia incommensurabilis existens toti, &
cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem
bis ipsis continetur medium, & adhuc incommensurabile composito ex quadratis
ipsarum.

DIFFINITIONES TERTIAE.

1. Exposita rationali, & apotoma, si quidē tota plus possit, quā
congruens quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitu
dine; sitq; tota expositæ rationali longitudine commensurabilis: vo
cetur apotome prima.
2. Si vero congruens sit longitudine commensurabilis expositæ
rationali, & tota plus possit, quā congruens quadrato rectæ li
neæ sibi cōmensurabilis longitudine; vocetur apotome secunda.
3. Quod si neutra sit longitudine commensurabilis expositæ ratio
nali, & tota plus possit, quā congruens quadrato rectæ lineæ sibi
commensurabilis longitudine; dicatur apotome tertia.
4. Rursus si tota plus possit, quā congruens quadrato rectæ li
neæ sibi incommensurabilis longitudine, si quidem tota sit lon
gitudine commensurabilis expositæ rationali; vocetur apotome
quarta.

Si vero congruens expofitę rationali fit longitudine commensurabilis, vocetur apotome quinta.

Quod fi neutra, dicatur apotome sexta.

PROBLEMA XVIII. PROPOSITIO LXXXVI.

Inuenire primam apotomen.

Exponatur rationalis A; & ipfi A longitudine commensurabilis fit BG. ergo & BG est rationalis. & exponantur duo quadrati numeri DE EF, quorum excessus DF nō fit quadratus: neque igitur ED ad DF proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. & fiat vt ED ad DF, ita quadratum ex BG ad quadratum ex GC. commensurabile igitur est quadratum ex BG quadrato ex G C; rationale autē est quadratū ex BC. ergo & quadratum ex GC est rationale; ideoq; recta linea GC rationalis est. & quoniam ED ad DF proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque quadratum ex BG ad quadratum ex GC proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. incommensurabilis igitur est BG ipfi GC longitudine; & sunt utraq; rationales. ergo BG GC rationales sunt potentia solum commensurabiles, & ob id BC apotome est. Dico & primam esse. fit enim quadratum ex H id, quo quadratū ex BG plus potest, quam quadratum ex GC. & quoniam est vt ED ad DF, ita quadratum ex BG ad quadratum ex GC; erit per conuerfionem rationis vt DE ad EF, ita quadratum ex BG ad quadratum ex H. sed DE ad EF proportionem habet, quā quadratus numerus ad quadratum numerum; vterque enim quadratus est. ergo & quadratum ex BG ad quadratum ex H proportionem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. commensurabilis igitur est BG ipfi H longitudine. & BG plus potest, quam GC quadrato ex H. ergo BG plus potest, quam GC quadrato recta lineę sibi longitudine commensurabilis. atque est tota BG expofitę rationali A commensurabilis longitudine. ergo BG apotome est prima. Inuenta igitur est prima apotome. quod facere oportebat.

6. diffi.

Coroll. i. lem. ad jo. huius

9. huius.

74. huius.

9. huius.

3. diffi. tertio rum.

F. C. COMMENTARIUS.

Sit A 6, BG 4, numerus autem DE sit 16, EF 9. erit DF 7. si igitur fiat vt 16 ad 7, ita quadratum ex BG, videlicet 16 ad quadratum ex GC. erit quadratum ex GC 7, & recta linea GC Bę 7. ergo BC est 4 minus Bę 7, quę est apotome prima.

PROBLEMA XIX. PROPOSITIO LXXXVII.

Inuenire secundam apotomen.

Exponatur rationalis A; & ipfi A longitudine commensurabilis fit CG. ergo CG est rationalis. & exponantur duo numeri quadrati DE EF, quorū excessus DF, nō fit quadratus fiatq; vt FD ad DE, ita quadratum ex CG ad quadratum ex GB. commensurabile igitur est quadratum ex CG quadrato ex G B. sed quadratum ex

6. Diffi.

Coroll. i. lemma ad jo. huius.

EVCLID. ELEMENT.

CG est rationale. ergo & rationale est quadratum ex GB; ac propterea ipsa GB est rationalis. & quoniam quadratum ex CG ad quadratum ex GB proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, erit CG ipsi GB incommensurabilis longitudine; & utraque sunt rationales. ergo CG GB rationales sunt, potentia solum commensurabiles, & ob id BC est apotome. Dico & secundam esse. quo enim quadratum ex BG excedit quadratum ex GC, sit ex H quadratum. Quoniam igitur est ut quadratum ex BG ad quadratum ex GC, ita DE numerus ad numerum DF, erit per conversionem rationis, ut quadratum ex BG ad quadratum ex H, ita DE ad EF. atque est uterque ipsorum DE EF quadratus. quadratum igitur ex BG ad quadratum ex H proportionem habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; ideoq; BG ipsi H longitudine est commensurabilis. & plus potest BG, quam GC quadrato ex H. ergo BG plus potest, quam GC quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. atque est congruens CG expositæ rationali A commensurabilis longitudine. ergo BC apotome est secunda. inuenta igitur est secunda apotome BC. quod facere oportebat.

F. C. COMMENTARIUS.

Sit A 6, CG 3; numerus autem DE sit 36, & EF 9. erit DF 27, itaque fiat ut 27 ad 36, ita 9 ad alium, erit ad 12. ergo GE est 12, & EC 12 minus 3, quæ est apotome secunda.

PROBLEMA XX. PROPOSITIO LXXXVIII.

Inuenire tertiam apotomen.

Exponatur rationalis A, & exponantur tres numeri E BC CD non habentes inter se proportionem, quam numerus quadratus habet ad quadratum numerum; BC vero ad BD proportionem habeat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: & fiat ut E ad BC, ita quadratum ex A ad quadratum ex FG: ut autem BC ad CD, ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH. commensurabile igitur est quadratum ex A quadrato ex FG. atque est quadratum ex A rationale. ergo & rationale est quadratum ex FG; ac propterea recta linea FG est rationalis. & quoniam E ad BC proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex A ad quadratum ex FG proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. incommensurabilis igitur est A ipsi FG longitudine. rursus qm est ut BC ad CD, ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH; erit quadratum ex FG quadrato ex GH commensurabile. rationale autem est quadratum ex FG. ergo & quadratum ex GH est rationale, & ob id recta linea GH rationalis. quod cum BC ad CD proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex FG ad quadratum ex GH proportionem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. incommensurabilis igitur est FG ipsi GH longitudine: & sunt utraque rationales. ergo FG GH rationales sunt potentia solum commensurabiles; ac propterea apotome est FH. Dico & tertiam esse. Quoniam enim est ut E

Corol. 6. huius.
6. huius.
9. huius.
6. huius.
9. huius.
74. huius.

quidem

quidem ad BC, ita quadratum ex A ad quadratum ex FG; ut autem BC ad CD, ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH; erit ex aequali ut E ad CD, ita quadratum ex A ad quadratum ex GH; sed E ad CD proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. neque igitur quadratum ex A ad quadratum ex GH proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo A ipsi GH longitudine est incommensurabilis. neutra igitur ipsarum FG GH expositæ rationali A commensurabilis est longitudine. quo autem quadratum ex F G plus potest, quam quadratum ex GH, sit ex K quadratum. Quoniam igitur est ut BC ad CD, ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH; erit per conversionem rationis ut CB ad BD, ita quadratum ex FG ad quadratum ex K; ac CB ad BD proportionem habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo & quadratum ex FG ad quadratum ex K proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. commensurabilis igitur est FG ipsi K longitudine: & plus potest FG, quam GH quadrato ex K. ergo FG plus potest, quam GH quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine. & neutra ipsarum FG GH longitudine commensurabilis est expositæ rationali A. quare FH apotome est tertia. Inventa igitur est tertia apotome FH. quod facere oportebat.

9. huius.

9. huius.

33. diffi.

E. C. C O M M E N T A R I V S.
Sit A 6, numerus E 18, BC 16, & CD 7. erit BD 9. fiat ut 18 ad 16, ita 36 ad alium, erit ad 32. ergo FG est B 32 minus fiat ut 16 ad 7, ita 32 ad alium. erit ad 14 quare GH est B 14 & FH B 32 minus B 14, quæ est apotome tertia.

PROBLEMA XXI. PROPOSITIO. LXXXIX.

Inuenire quartam apotomen.

Exponatur rationali A: & ipsi A longitudine commensurabilis sit BG. ergo BG est rationalis. exponatur præterea duo numeri D F FE, ita ut totus DE ad vtrumque ipsorum DF FE proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: & fiat ut DE ad EF, ita quadratum ex BG ad quadratum ex GC commensurabile igitur est quadratum ex BG quadrato ex GC. est autem quadratum ex BG rationale. quare & rationale est quadratum ex GC; ideoque recta linea GC est rationalis. & quoniam DE ad EF proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex BG ad quadratum ex GC proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. incommensurabilis igitur est BG ipsi GC longitudine, & sunt utraque rationales. ergo BG GC rationales sunt potentia solum commensurabiles. & ob id apotome est BC. Dico & quartam esse. Quo igitur plus potest BG, quam GC, sit quadratum ex H. & quoniam est ut DE ad EF, ita quadratum ex BG ad quadratum ex GC; erit per conversionem rationis ut ED ad DF, ita quadratum ex BG ad quadratum ex H. sed ED ad DF proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. neque igitur quadratum ex BG ad quadratum ex H proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. incommensurabilis igitur est BG ipsi H longitudine: & plus potest BG, quam GC quadrato ex H. ergo BG plus potest, quam GC quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, atque est tota BG commensurabilis expositæ rationali A. ergo BC apotome est quarta. Inventa igitur est quarta apotome BC. quod facere oportebat.

4. huius.

9. huius.

74. huius.

4. diffi. ternarum.

ad inueniendum

Xx 2 F. C.

E V C L I D . E L E M E N T .

F. C. C O M M E N T A R I V S .

Sit A 6, BG 4, numerus autem DF 6, & FE 10. itaq; si fiat vt 16 ad 10, ita 16 ad alium, erit GC R 10 & BC 4 minus R 10, quae est apotome quarta.

PROBLEMA XXII. PROPOSITIO XC.

Inuenire quintam apotomen.

Exponatur rationalis A , & ipsi A commensurabilis sit CG . ergo CG est rationalis. & exponantur duo numeri DF , FE , ita vt DE ad yt rumque ipsorum DF , FE proportionem rursus non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; fiatq; vt FE ad ED , ita quadratum ex CG ad quadratum ex GB . ergo quadratum ex CG commensurabile est quadrato ex GB . est autem quadratum ex CG rationale. ergo & rationale est quadratum ex GB ; & ideo recta linea GB est rationalis. & quoniam vt DE ad E F , ita est quadratum ex BG ad quadratum ex GC : & DE ad EF proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex B G ad quadratum ex GC proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. incommensurabilis igitur est BC ipsi GC longitudine; & sunt utraque rationales. ergo BG , GC rationales sunt potentia solum commensurabiles; & BC apotome est. Dico & quintam esse. Quo enim plus potest quadratum ex BG , quam quadratum ex GC , sit quadratum ex H . Quoniam igitur quadratum ex BG ad quadratum ex GC est vt DE ad EF , erit per conuersionem rationis vt ED ad DF , ita quadratum ex BG ad id, quod sit ex H quadratum. sed ED ad DF proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. neque igitur quadratum ex BG ad quadratum ex H proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; ideoq; recta linea BG ipsi H longitudine est incommensurabilis. & plus potest BG , quam GC quadrato ex H . ergo BG plus potest, quam GC quadrato rectae lineae sibi incommensurabilis longitudine. atque est congruens CG expositae rationali A longitudine commensurabilis. quare BC apotome est quinta. Inuenta est igitur quinta apotome BC . quod facere oportebat.

F. C. C O M M E N T A R I V S .

Sit A 6, CG 3. numerus autem DF sit 25, FE 9: & fiat vt 9 ad 34, ita quadratum ex CG , quod est 9 ad alium, erit BG R 34, & BC R 34 minus 3, quae est apotome quinta.

PROBLEMA XXIII. PROPOSITIO. XCI.

Inuenire sextam apotomen.

Exponatur rationalis A , & tres numeri E BC CD proportionem non habentes inter se, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. & fiat vt E ad BC , ita quadratum ex A ad quadratum ex FG : ut autem BC ad CD , ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH . quoniam igitur est vt E ad BC , ita quadratum ex A ad quadratum ex FG ; erit quadratum ex A quadrato ex FG co-

mensurabile.

menſurabile. rationale autem eſt quadratum ex A. ergo & quadratum ex FG ratio-
nale erit; & ob id recta linea FG rationalis. & quoniam E ad BC proportionem nō
habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex
A ad quadratum ex FG proportionem habebit, quam numerus quadratus ad qua-
dratum numerum. Incommenſurabilis igitur eſt A ipſi FG longitudine. rursus quo-
niam eſt ut BC ad CD, ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH, erit quadratum
ex FG commenſurabile quadrato ex GH. eſt autem quadratum ex FG rationale. ra-
tionale igitur eſt & quadratum ex GH; & ipſa GH rationalis. quod cū BC ad CD
proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; ne-
que quadratum ex FG ad quadratum ex GH proportionem habebit, quam nume-
rus quadratus ad quadratum numerum. ergo FG ipſi GH longitudine eſt incom-
menſurabilis: & ſunt utraque rationales. quare FG. GH rationales ſunt potentia
ſolum commēſurabiles, & FH apotome eſt. Dico & ſextam eſſe. Quoniam enim eſt
ut E ad BC, ita quadratum ex A ad quadratum ex FG; ut autem BC ad CD, ita qua-
dratum ex FG ad quadratum ex GH: erit ex æquali ut E ad CD, ita quadratum ex
A ad quadratum ex GH. ſed E ad CD proportionem non habet, quā numerus qua-
dratus ad quadratum numerum. neque igitur quadratum ex A ad quadratum ex
GH proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum.
ergo A ipſi GH longitudine eſt incommenſurabilis: & neutra ipſarum FG GH ex-
poſita rationali A commenſurabilis eſt longitudine. quo igitur plus poteſt quadra-
tum ex FG, quā quadratum ex GH, ſit quadratum ex K. & quoniam eſt ut BC ad
CD, ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH, erit per conſervationem rationis
ut CB ad BD, ita quadratum ex FG ad quadratum ex K. at C B ad B D proportio-
nem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. neque igitur
quadratum ex FG ad quadratum ex K proportionem habebit, quam numerus qua-
dratus ad quadratum numerum. ergo incommenſurabilis eſt FG ipſi K longitudi-
ne. & FG plus poteſt, quā GH quadrato ex K, plus igitur poteſt FG, quā GH qua-
drato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis: & neutra ipſarum FG GH
eſt commenſurabilis longitudine expoſita rationali A. ergo FH apotome eſt ſexta.
Inuenta eſt igitur ſexta apotome FH. ſed & expeditius ſex dictarum linearum in-
ventionem oſtendere licet.

9 huius.

6. huius.

9. huius.

74. huius.

9 huius:

6. tertiarum
diſſi.

Si enim oporteat inuenire primam apotomē,
exponatur ex binis nominibus prima A C, cuius
maius nomē ſit AB. & ponatur B D ipſi BC æqua-
lis. ergo AB BC, hoc eſt AB BD rationales ſūt,
potentia ſolum commēſurabiles: & AB plus poteſt, quā BC, hoc eſt quā B D
quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis: & AB eſt commenſurabi-
lis longitudine expoſitæ rationali. apotome igitur prima eſt AD. ſimiliter & reliquas
apotomas inueniemus, eas, quæ ex binis nominibus eiſdem ordinis exponentes.

F. C. COMMENTARIUS.

Sit A 6. numerus autem E ſit 15, BC 25, & CD 10. ſiat igitur ut 15 ad 25, ita 3 6 ad aliū,
erit ad 60. Rursus ſiat ut 25 ad 10, ita 60 ad aliū, erit ad 24. ergo F G eſt R 60, & G H R
24. ac propterea FH eſt R 60 minus R 24, quæ eſt apotome ſexta.

THEOREMA LXVIII. PROPOSITIO XCII.

Si ſpaciū cōtineatur rationali, & apotoma prima, recta linea
ſpaciū potens apotome eſt.

Continueatur

1. diff. tertia
rum.

18. huius:

16. huius.

20. huius.

16. huius.

14. huius.

22. huius.

26. sexti.

14. sexti.

10. huius:

74. huius.

Contineatur enim spacium AB rationali A
C, & apotoma prima AD. Dico rectam lineam,
quæ potest spacium AB apotomen esse. Quoniã
enim AD prima apotome est, sit ipsi congruens
DG. ergo AG CD rationales sunt potentia so-
lum commensurabiles, & tota AG longitudine
commensurabilis est exposita: rationali AC. &
præterea AG plus potest, quàm CD quadrato
rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine. si
igitur quartæ parti quadrati, quod fit ex DG, æ-
quale parallelogrammum ad AG applicetur, de-
ficiens figura quadrata, in partes longitudine cõ-
mensurabiles ipsam diuidet. secetur DG bifariã
in E, & quadrato ex EG æquale parallelogram-
mum ad ipsam AG applicetur, deficiens figura
quadrata, quod fit AFG. commensurabilis igitur
est AF ipsi FG longitudine: & per E F G
puncta ipsi AC parallela ducantur EH FI GK.
& quoniam AF ipsi FG longitudine est commensurabi-
lis, erit & tota AG vtrique ipsarum AF FG cõ-
mensurabilis longitudine. sed AG commensura-
bilis est ipsi AC. vtraque igitur AF FG ipsi AC
longitudine est commensurabilis. atque est AC rationalis. ergo & rationalis vtra-
que AF FG; ac propterea vtrumque parallelogrammorum AI FK est rationale. &
quoniam DE ipsi EG longitudine est commensurabilis, erit & DG vtrique DE E
G commensurabilis longitudine: estq; rationalis DG, & ipsi AC longitudine incõ-
mensurabilis. ergo & vtraque DE EG rationalis est, & incommensurabilis ipsi AC
longitudine: & ob id vtrumque parallelogrammorum DH EK medium est. ponat-
ur ipsi quidem AI parallelogrammo æquale quadratum LM; parallelogrammo
autem FK æquale quadratum auferatur NX, communem ipsi angulum habens LO
M. ergo quadrata LM NX circa eandem sunt diametrum. sit ipsorum diameter O
R, & figura describatur. itaque quoniam rectangulum AFG est æquale quadrato ex
EG, erit vt AF ad EG, ita EG ad GF: sed vt AF ad EG, ita est parallelogrammum A
I ad ipsum EK: & vt EG ad GF, ita parallelogrammum EK ad ipsum KF. parallelo-
grammorum igitur AI KF medium proportionale est EK: est autem & quadrato-
rum LM NX medium proportionale MN, vt superius ostensum est. parallelogram-
mumq; AI est æquale quadrato LM; & parallelogrammum KF quadrato NX æqua-
le. ergo & parallelogrammum MN est æquale ipsi EK. sed parallelogrammum qui-
dem EK est æquale parallelogrammo DH; parallelogrammum vero MN ipsi LX.
parallelogrammum igitur DX est æquale gnomoni YVQ, quadrato NX. est autẽ
& parallelogrammum AK quadratis LM NX æquale. ergo & reliquum AB est æquale qua-
drato ST. at quadratum ST est id, quod fit ex LN. quadratum igitur ex LN est æqua-
le parallelogrammo AB; ideoq; recta linea LN ipsum AB potest. Dico LN apoto-
men esse. Quoniam enim rationale est vtrumque parallelogrammorum AI FK, &
sunt equalia quadratis LM NX, erit & vtrumque LM NX rationale; hoc est vtrum-
que ipsorum, quæ fiunt ex LO ON; & vtraque igitur LO ON rationalis est. rursus
quoniam medium est parallelogrammum DH, atque est æquale ipsi LX; erit & LX me-
diũ. cũ igitur LX quidẽ medium sit, NX vero rationale, incommensurable est LX ipsi
NX; vtq; LX ad XN, ita est recta linea LO ad ON. ergo LO ipsi ON longitudine est
incommensurabilis. & sunt vtræque rationales. quare LO ON rationales sunt potẽ-
tia solum commensurabiles. & idcirco apotome est LN; & spacium AB potest, quæ
igitur potest spacium AB est apotome. ergo si spacium contineatur rationali, &
apotoma prima, recta linea spacium potens apotome est.

Sit AC 6, AD 7 minus R 13. erit DGR 13, & DE, vel EGR $3\frac{1}{2}$. quod si ad rectam lineæ AG applicetur parallelogrammum AFG æquale quadrato ipsius EG, deficiensq; figura quadrata 13, erit ex demonstratis ad 18 huius AF $6\frac{1}{2}$ FG $\frac{1}{2}$. ergo parallelogrammum AI est 39, & FK 3, totumq; AK parallelogrammum 42. parallelogrammum vero DK est R 468, DH, vel EK R 117, et R 117 minus 3, & FK 3. quare parallelogrammum AB est 42 minus R 468. Huiusmodi autem spaciū iuniores etiam apotomen primam, vel residuum primum appellare consueverunt, cuius latus quadratum, vel radicem inueniemus, quemadmodum ad 55. huius dictum est in spacijs binomialibus, præterquā quod loco vocis plus, utemur minus. Diuidatur enim 42 in duas partes; ita ut quod ex ipsis produciatur, sit æquale quartæ parti 468, hoc est 117. erit maior pars 39, minor 3: ideoq; R 39 minus R 3 erit latus quadratum, vel radix huius spacijs residui 42 minus R 468.

THEOREMA LXIX. PROPOSITIO. XCIII.

Si spaciū contineatur rationali, & apotoma secunda, recta lineæ spaciū potens mediæ est apotome prima.

Spaciū enim AB cōtineatur rationali AC, & apotoma secunda AD. Dico rectam lineam, quæ spaciū AB potest mediæ apotomen esse primam. sit enim ipsi AD congruens DG. ergo AG GD rationales sunt potentia solum commensurabiles, & congruēs DG commensurabilis est expositæ rationali AC; totaq; AG plus potest, quàm GD quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine. quoniam igitur AG plus potest, quàm GD quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, si quartæ parti quadrati ipsius GD æquale parallelogrammum ad AG applicetur, deficiens figura quadrata, in partes commensurabiles ipsam diuidet. Itaque secetur DG bifariam in E: & quadrato ipsius EG æquale parallelogrammum ad AG applicetur, deficiens figura quadrata, quod sit AFG. ergo commensurabilis est AF ipsi FG longitudine; & per puncta EFG ipsi AC parallelæ ducantur EH FIGK. quoniam igitur AF ipsi FG longitudine est commensurabilis, erit AG vtrique ipsarum AF FG commensurabilis longitudine, rationalis autem est AG, & ipsi AC longitudine incommensurabilis. ergo & vtraque AF FG est rationalis, ipsiq; AC incommensurabilis longitudine; & ob id vtrumque parallelogrammorum AI FK medium est. Rursus quoniam DE commensurabilis est ipsi EG, erit & DG vtrique DE EG commensurabilis. sed DG commensurabilis est ipsi AC longitudine. ergo & vtraque DE EG rationalis est, & ipsi AC longitudine commensurabilis: ac propterea vtrumque parallelogrammorum DH EK est rationale. constituatur igitur parallelogrammum quidem AI æquale quadratum LM; parallelogrammo autem FK æquale quadratum auferatur NX, communem ipsi angulum habens LOM. ergo circa eandem diametrum sunt quadrata LM NX. sit ipsorum diameter OR, & figura describatur. Cum igitur parallelogramma AI FK media sint, & sibi ipsis commensurabilia, & æqualia quadratis ex LO ON, erunt & quadrata ex LO ON media. ergo rectæ lineæ LO ON mediæ sūt, potentia solum commensurabiles. & quoniam rectangulum AFG est æquale qua-

2. diff. re-
ctiarum.

18. huius:

16. huius,

22. huius.

16. huius.

20. huius

26. sexti.

drato

14. texti.

drato ex EG, erit vt AF ad EG, ita EG ad CF: sed vt AF ad EG, ita est parallelogrammum AC ad ipsum EK. vt autem EG ad GF, ita parallelogrammum EK ad KF: parallelogrammorum igitur AI FK mediū proportionale est EK. est autē & quadratorum LM NX medium proportionale MN: et parallelogrammum AI quidē est æquale quadrato LM; parallelogrammum vero FK æquale quadrato NX. ergo MN ipsi EK est æquale. sed DH est æquale EK, & LX ipsi MN. totum igitur DK gnomoni YVQ, & quadrato NX æquale erit. itaq; quoniam totum AK æquale est quadratis LM NX, quorum DK est æquale gnomoni YVQ, & quadrato NX; erit reliquum AB æquale quadrato ST, hoc est ei, quod fit ex LN. quadratū igitur ex LN est æquale spacio A B; ideoq; recta linea LN spaciū AB potest. Dico LN mediæ apotomen esse primam. quoniam enim rationale est EK, & æquale ipsi MN, hoc est ipsi LX, erit & LX rationale, videlicet quod LO ON continetur. medium autem ostensum est NX. quare LX est incommensurabile ipsi XN: & vt LX ad XN, ita LO ad ON. ergo LO ON longitudine sunt incommensurabiles; ac propterea LO ON mediæ sunt commensurabiles potentia solum, quæ rationale continent. quare LN mediæ apotome prima est, & potest spaciū AB. recta igitur linea spaciū AB potens mediæ est apotome prima.

75. huius

F. C. C O M M E N T A R I V S .

Sit AC 4, & AD R 48 minus 6: erit DG 6. & DE, vel EG 3 & si ad AG applicetur parallelogrammum AFG æquale quadrato ipsius EG, deficiensq; figura quadrata: erit AF R 27, FG R 3. & ob id parallelogrammum AI R 432, FK R 48, & totum AK parallelogrammum R 768; parallelogrammum vero DK 24, DH, vel EK 12, & EI 12 minus R 48. ergo AB est R 768 minus 24, quod spaciū etiam apotomen secundam, vel residuum secundum vocat. Vt autem eius latus quadratum, vel radicem inueniamus, diuidetur R 768 in duas partes, ita vt productum ex ipsis sit æquale quartæ parti quadrati 24, hoc est æquale 144, erit maior pars R 432, minor R 48. quare R R 432 minus R R 48 est latus quadratum, seu radix eius spaciij residui R 768 minus 24.

T H E O R E M A L X X . P R O P O S I T I O X C I I I I .

Si spaciū cōtineatur rationali, & apotome tertia, recta linea spaciū potens mediæ est apotome secunda.

Spaciū enim AB contineatur rationali AC, & apotoma tertia AD. Dico rectā lineam, quæ potest spaciū AB, mediæ esse apotomen secundam. sit enim ipsi AD congruens DG. ergo AG CD rationales sunt, potētia solum commensurabiles, & neutra ipsarum AG CD longitudinē commensurabilis est exposita rationali AC, totaq; AG plus potest, quā congruens DG quadrato rectæ lineæ sibi commensurabiles longitudine. si igitur quartæ parti quadrati ipsius DG æquale parallelogrammum ad AG applicetur, deficiens figura quadrata, in partes commensurabiles ipsam diuidet. Itaque secetur DG bisariam in E, & quadrato ipsius EG æquale ad AG applicetur, deficiens figura quadrata, quod sit AFG: & per puncta EFG ipsi

28. huius.

ipsi AC parallele ducantur EH. FI GK. ergo AF FG
commensurabiles sunt: atque ob id parallelogrammū
AI parallelogrammo FK est commensurabile. & quo-
nia AF FG commensurabiles sunt longitudine, erit &
AG vtrique ipsarum AF FG longitudine commensu-
rabilis. est autem rationalis AG, & ipsi AC incommen-
surabiles longitudine. & vtraque igitur AF FG ratio-
nalis est, & ipsi AC longitudine incommensurabilis;
ac propterea vtrumque parallelogrammorum AI F
K est medium. Rursus quoniam DE commensurabilis
est ipsi EG longitudine, erit & DG vtrique DE. EG
cōmensurabilis. sed DG rationalis est, & ipsi AC incō-
mensurabilis longitudine. rationalis igitur est & vtra-
que DE EG, & ipsi AC lōgitudine incommensurabi-
lis. ergo vtrumque parallelogrammōū DH EK me-
dium est. quod cum AG CD potentia solum commē-
surabiles sint, AG ipsi CD longitudine erit incommē-
surabilis. sed AG commensurabilis est ipsi AF longitu-
dine, & DG ipsi GE. est igitur AF ipsi EG longitudine
incommensurabilis. vt autem AF ad EG, ita parallelogrammum AI ad EK paralle-
logrammum. ergo incōmensurabilis est AI ipsi EK. constituatur ipsi quidem AI æ-
quale quadratum LM; ipsi vero FK æquale auferatur NX, angulum habens eundem,
quem LM. ergo quadrata LM NX circa eandem sunt diametrum. sit ipsorum dia-
meter OR, & figura describatur. Quoniam igitur rectangulum AFG est æquale
quadrato ex EG, erit vt AF ad EG, ita EG ad GF. vt autem AF ad EG, ita paralle-
logrammum AI ad EK parallelogrammum; & vt EG ad GF, ita EK ad KF. ergo &
vt AI ad EK, ita EK ad KF. parallelogrammorum igitur AI FK medium proportio-
nale est EK. est autem & quadratorum LM NX medium proportionale MN; & pa-
rallelogrammum AI quidem æquale est quadrato LM; FK vero ipsi NX. ergo &
EK est æquale MN. sed MN æquale est LX, & EK ipsi DH. totum igitur DK gnomō-
ni YVQ, & quadrato NX est æquale. est autem & parallelogrammū AK æquale qua-
dratis LM NX. ergo reliquum AB est æquale ipsi ST. hoc est quadrato ex LN. & ob
id recta linea LN ipsum AB spacium potest. Dico LN mediā apotomen esse secun-
dam. Quoniam enim mediā ostensa sunt parallelogramma AI FK, & sunt equalia,
quadratis ex LO ON, erit & vtrumque quadratorum ex LO ON medium; & idcir-
co vtraque LO ON mediā est. & quoniam commensurabile est AI ipsi FK, erit &
quadratum ex LO quadrato ex ON commensurabile. Rursus quoniam ostensum est.
AI incommensurabile ipsi EK, & LM ipsi MN incommensurabile erit, hoc est qua-
dratum ex LO rectangulo LON. quare & recta linea LO ipsi ON longitudine est in-
commensurabilis. sunt igitur LO ON mediæ commensurabiles potentia solum. Di-
co eas etiam medium continere. Quoniam enim medium demonstratum est EK, at-
que est rectangulo LON æquale, erit & LON medium. ergo LO ON mediæ sunt po-
tentia solum commensurabiles, quæ medium continent; ac propterea LN mediā
apotome secunda est, & potest spacium AB. recta igitur linea spacium AB potens
mediæ apotome est secunda.

es. huius.

es. huius.

es. huius.

es. huius.

Ex demon-
stratis ad 14
huius.

26. sexti:

14. sexti.

Lem. ad 23.
huius.

76. huius.

F. C. COMMENTARIUS.

Sit AC 6, & AD R 27 minus R 15. erit DG R 15, & DE, vel EG R 3 $\frac{1}{2}$. quod si ad AG
applicetur parallelogrammum æquale quadrato ex EG, deficiensq; figura quadrata, quod sit AF
G, erit AF R 18 $\frac{1}{4}$, EG R $\frac{1}{4}$. ideoq; parallelogrammum AI est R 675, FK R 27, & totum
AK parallelogrammum R 972. parallelogrammum autem DK R 540, EK R 135, & EIR
135 minus R 27. est igitur AB R 972 minus R 540. quod spacium est apotome tertia, vel ter-
tium residuum. Itaque diuidatur R 972 in duas partes, ita vt quod ex ipsis producit sit æquale
Ry R. 135

EVCLID. ELEMENT.

R 135. erit maior pars R 675, & minor R 27. ergo R R 675 minus R R 27 est latus quadratum, vel radix spacij illius residui R 972 minus R 540.

THEOREMA LXXI. PROPOSITIO XCV.

Si spacium contineatur rationali, & apotoma quarta, recta linea spacium potens minor est.

Spacium enim AB contineatur rationali AC, & apotoma quarta AD. Dico rectam lineam, quę spacium AB potest, minorem esse. sit enim ipsi AD congruens DG. ergo AG GD rationales sunt potentia solum commensurabiles, & A G commensurabilis est expositę rationali AC lōgitudine, totaq; AG plus potest, quā GD, quadrato rectę linę sibi longitudine incommensurabilis. si igitur quartę parti quadrati ex DG æquale parallelogrammum ad AG applicetur, deficiens figura quadrata, in partes incommensurabiles ipsam diuidet. Itaque secetur DG bifariā in E, & quadrato ex EG æquale ad ipsam AG applicetur, deficiens figura quadrata, quod sit A FG. ergo AF ipsi FG longitudine est incommensurabilis. Ducantur per puncta EFG ipsis AC B D parallelę EH FI GK. Quoniam igitur AG rationalis est, & ipsi AC longitudine commensurabilis, erit totum parallelogrammum AK rationale. Rursus quoniam incommensurabilis est DG ipsi AC longitudine, & sunt vtręque rationales, erit parallelogrammum DK medium. quod cum AF ipsi FG longitudine sit incommensurabilis, erit & parallelogrammum AI incommensurabile parallelogrammo FK. constituitur parallelogrammo quidem AI æquale quadratum LM; parallelogrammo autem FK æquale quadratum NX auferatur, angulum habens eundem, quem LM, videlicet LOM. quadrata igitur LM NX circa eandem sunt diametrum. sit ipsorum diameter OR, & figura describatur. itaque quoniā rectangulum AFG est æquale quadrato ex EG, vt AF ad EG, ita erit EG ad GF. sed vt AF quidem ad E G, ita est parallelogrammum AI ad ipsum EK: vt autem EG ad GF, ita EK ad KF. parallelogrammorum igitur AI FK medium proportionale est EK. est autem & quadratorum LM NX medium proportionale MN. atque est parallelogrammum AI æquale quadrato LM, & parallelogrammum FK æquale NX. ergo & FK æquale est MN. sed EK quidem est æquale parallelogrammo DH, MN vero ipsi LX. totum igitur DK parallelogrammum gnomoni YVQ. & quadrato NX est æquale. & quoniam totum AK æquale est quadratis LM NX, quorum DK est æquale gnomoni YVQ. & NX quadrato; erit reliquum AB æquale quadrato ST, hoc est quadrato ex LN. ergo LN spacium AB potest. Dico LN irrationalem esse, quę minor appellatur. Quoniam enim parallelogrammum AK rationale est, & æquale quadratis ipsorum LO ON, erit & compositum ex quadratis LO ON rationale. Rursus quoniam parallelogrammum DK medium est, atque est æquale ei, quod bis continetur LO ON erit & quod LO ON continetur medium: ostensū autē est parallelogrammū AI incommensurabile ipsi FK. ergo & quadratū ex LO incommensurabile est quadrato ex ON; ac propterea LO ON potentia sunt incommensurabiles, quę faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem ipsis continetur medium. quare LN irrationalis est, quę minor appellatur, & potest spacium AB. recta igitur linea spacium AB potens minor est.

¶ Sit AC 6. AD 7 minus R 14. erit DGR 14, & DE, vel EG R 3 $\frac{1}{2}$. Si vero ad AG applicetur parallelogrammum AFG eque quadrato ipsius EG, deficiens, figura quadrata, erit AF 13 $\frac{1}{2}$ plus R 8 $\frac{1}{2}$: EG 3 $\frac{1}{2}$ minus R 8 $\frac{1}{2}$, & parallelogrammum AI est R 21 plus R 315, FK 21 minus R 315, & totum AK 42. parallelogrammum vero DK est R 504, CK R 126, & AE 42 minus R 504. quod spacium est apotome quarta, vel residuum quartum, sicutur 42 dividitur in duas partes, ita ut productum ex ipsis sit eque quartae parti R 504. hoc est R 126, erit maior pars 21 plus R 126, & minor 21 minus R 126. ergo R 21 plus R 126 minus R 504. minus R 126 est latus quadratum, seu radix spacii residui 42 minus R 504.

THEOREMA LXXII. PROPOSITIO. XCVI.

220 Si spacium cōtineatur rationali, & apotoma quinta, recta linea spacium potens est, quæ cum rationali medium totum efficit.

Spacium enim AB continetur rationali AC, & apotoma quinta AD. Dico rectam lineam, quae
 spacium AB potest, esse eamque cum rationali
 li medium totum efficiat. sit enim ipsi AD congruens DG, ergo AG GD rationales sunt potentia solum cum incommensurabilibus; & congruens DG longitudine communifurabilis est expositae rationali AC; totaq; AG plus potest, quam GD quadrato rectae lineae sibi incommensurabilis longitudine. igitur quarta parti quadrati ex DG aequale parallelogrammum ad AG applicetur, deficiens figura quadrata, in partes incommensurabiles ipsam dividit. Itaque secetur DG bifariam in puncto E, & quadrato ex EG aequale ad ipsam A applicetur, deficiens figura quadrata, quod sit AFG. ergo AF incommensurabilis est ipsi FG longitudine. Ducantur per puncta EFG ipsi AC parallelae EH FI GK, & quoniam AG incommensurabilis est ipsi AC longitudine, & sunt utriqueque rationales; erit parallelogrammum AK medium. Rursum quoniam rationalis est DG, & ipsi AC longitudine communifurabilis; parallelogrammum DK rationale erit. Constituitur igitur parallelogrammum quidem A I equale quadratum LM; ipsi vero FK equale quadratum auferatur NX, angulum habens eundem; quem LM, videlicet LOM. ergo quadrata LM NX circa eandem sunt diametrum. sit diameter ipsorum OR, & figura describatur. Similiter ostendemus rectam lineam LN spacium AB posse. Dico LN esse eam, quae cum rationali medium totum efficiat. Quoniam enim ostendimus parallelogrammum AK medium esse; atque est aequale quadratis ipsarum LO ON: erit & compositum ex quadratis LO ON medium. Rursum quoniam DK rationale est, & aequale ei, quod bis continetur LO ON; erit & quod bis LO ON continetur rationale. est autem AI incommensurabile ipsi FK. incommensurabile igitur est quadratum ex LO quadrato ex NO; ideoque LO ON potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex ipsis ratione quadratis medium; quod autem ipsis bis continetur rationale. ergo reliqua LN irrationalis est; quae vocatur cum rationali medium totum efficiens, & potest spacium AB. recta igitur linea spacium AB potens est, quae cum rationali medium totum efficiat.

Sit AC 6, AD R 56 minus 4, erit DG 4, & DE, vel EG 2, quod si ad AG applicetur parallelogrammum AFG aequale quadrato ex C G, deficiensq; figura quadrata, erit AF R 14 plus R 10; FGR 14 minus R 10. & parallelogrammum AI est R 504 plus R 360, FKR 504 minus R 360: totumq; AK R 2016. At vero DK est 24, EK 12, & AB R 2016 minus 24, quod spacium est apotome quinta, vel residuum quintum. Diuidatur R 2016 in duas partes, ita ut productum ex ipsis sit aequale 144, erit maior pars R 504 plus R 360, & minor R 504 minus R 360. quare RV. R 504 plus R 360 minus RV. R 504 minus R 360 est latus quadratum dicti spacij residui R 2016 minus 24.

THEOREMA LXXXIII. PROPOSITIO XCVII.

Si spacium contineatur rationali, & apotoma sexta, recta linea spacium potens est, quæ cum medio medium totum efficit.

6. diffin. tertiarum.

19. huius.

10. huius.
22. huius

10. huius.

14. sexti.

19. huius.

Spacium enim AB contineatur rationali AC, & apotoma sexta AD. Dico rectam lineam, quæ spacium AB potest, esse eam, quæ cum medio medium totum efficit. sit enim ipsi AD congruens DG, ergo AG:GD rationales sunt potentia solum commensurabiles; & neutra ipsarum commensurabilis est expositæ rationali AC longitudine. totaq; AG plus potest, quàm congruens DG quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. si igitur quartæ parti quadrati ex DG æquale ad rectam lineam AG applicetur, deficiens figura quadrata, in partes incommensurabiles ipsam diuidet. Itaque secetur DG bisariam in E, & quadrato ex CG æquale parallelogrammum ad AG applicetur, deficiens figura quadrata, quod sit AFG. incommensurabilis igitur est AF ipsi FG longitudine, ut autem AF ad FG, ita est parallelogrammum AI ad ipsum FK. ergo AI ipsi FK est incommensurabile. & quoniam AG AC rationales sunt potentia solum commensurabiles, erit parallelogrammum AK medium. sunt autem AC:DG rationales, & incommensurabiles longitudine. medium igitur est & DK. quod cum AG:GD potentia solum commensurabiles sint, erit AG ipsi GD longitudine incommensurabilis. sed ut AG ad GD, ita est AK ad KD. incommensurabile igitur est AK ipsi KD. itaque constituatur parallelogrammo AI equale quadratum LM; parallelogrammo autem FK æquale auferatur quadratum NX, angulum habens eundem, quem LM. ergo quadrata LM NX circa eandem sunt diameter. sit eorum diameter OR, & figura describatur. similiter ut supra, ostendimus rectam lineam LN spacium AB posse. Dico LN esse eam, quæ cum medio medium totum efficit. Quoniam enim medium ostensum est AK, atque est æquale quadratis ipsarum LO ON, erit & compositum ex quadratis LO ON medium. Rursus quoniam medium ostensum est DK, & est æquale ei, quod bis continetur LO ON; & quod bis LO ON continetur medium erit. Incommensurabile autem ostensum est AK ipsi KD. ergo & quadrata ex LO ON incommensurabilia sunt ei, quod bis LO ON continetur. & quoniam incommensurabile est AI ipsi FK, erit & quadratum ex LO quadrato ex ON incommensurabile: ergo LO ON potentia solum commensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex quadratis ipsarum medium. quod autem ipsis bis continetur medium, & incommensurabile composito ex ipsarum quadratis. ergo LN irrationalis est, quæ vocatur, cum medio medium totum efficiens, & potest AB spacium. recta igitur linea spacium AB potens est, quæ cum medio medium totum efficit.

Sit AC 6, AD R 32 minus R 20. erit DG R 20, & DE vel EGR 5. si autem ad AG applicetur parallelogrammum AFG, æquale quadrato ex EG, & deficiens figura quadratæ, erit AF R 8 plus R 3, EGR 8 minus R 3: & idcirco parallelogrammum AI R 288 plus R 108, FK R 288 minus R 108, & totum parallelogrammum AK R 1152. parallelogrammum vero DK est R 720, DH R 18, & AB R 1152 minus R 720. quod spacium est apotome sextæ, vel sextiæ residuum, & eius latus quadratum, vel radix inuenietur esse RV. R 288 plus R 108 minus R 1288 minus R 108.

THEOREMA LXXIII. PROPOSITIO. XCVIII.

Quadratum apotomæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen primam.

Sit apotome AB, rationalis autem CD, & quadrato ex AB æquale parallelogrammum CE ad ipsam CD applicetur latitudinē faciens CF. Dico CF apotomen esse primam. sit enim ipsi AB congruens B G. ergo AG GB rationales sunt potentia solum cōmensurabiles: & quadrato quiddē ex AG æquale ad ipsam CD applicetur CH: quadrato autem ex BG æquale applicetur KL. totum igitur CL est æquale quadratis ex AG GB, quorum parallelogrammum CE æquale est quadrato ex AB. ergo reliquum FL ei, quod bis AG GB continetur est æquale. secetur FM bifariam in N: & per N ipsi CD parallela ducatur NX: utrumque igitur ipsorum FX LN est æquale ei, quod AG GB continetur. & quoniam quadrata ex AG GB rationalia sunt, atque est quadratis ex AG GB æquale parallelogrammum DM; erit ipsum DM rationale; & ad rationale CD applicatum est, latitudinē faciens CM. ergo CM est rationalis, & ipsi CD commensurabilis longitudine. Rursus quoniam medium est, quod bis continetur AG GB, estq; ei, quod bis AG GB continetur, æquale parallelogrammum LF; erit ipsum LF medium: & applicatum est ad rationale CD, latitudinem faciens FM. quare FM est rationalis, ipsiq; CD longitudine incommensurabilis. & sunt quadrata quidem ex AG GB rationalia: quod autem bis continetur AG GB medium, quadrata igitur ex AG GB incommensurabilia sunt ei, quod bis AG GB continetur. sed quadratis ex AG GB æquale est parallelogrammum CL. ei vero, quod bis continetur AG GB est æquale FL. ergo CL ipsi LF est incommensurabile, ut autem CL ad LF, ita est recta linea CM ad MF. incommensurabilis igitur est CM ipsi MF longitudine: & sunt utraq; rationales. ergo CM MF rationales sunt potentia solum commensurabiles: ac propterea CF est apotome. Dico & primam esse. Quoniam enim quadratorum ex AG GB medium proportionale est quod AG GB continetur; atque est quadrato quidem ex AG æquale parallelogrammum CH; ei vero, quod AG GB continetur æquale NL, & quadrato ex GB æquale KF. erit ipsorum CH KL medium proportionale NL. ut igitur CH ad NL, ita NL ad LK. sed ut CH ad NL, ita est recta linea CK ad ipsam NM. ut autem NL ad LK, ita recta linea NM ad MK. ergo ut CK ad NM, ita est NM ad MK. & ob id rectangulum CKM, est æquale ei, quod fit ex MN quadrato, hoc est quartæ parti quadrati ex FM. & quoniam quadratum ex AG commensurabile est quadrato ex GB, erit & parallelogrammum CH parallelogrammo KL commensurabile. sed ut CH ad KL ita est recta linea CK ad ipsam KM. commensurabilis igitur est CK ipsi KM. itaque cum duæ rectæ lineæ inæquales sint CM MF, & quartæ parti quadrati ex FM æquale parallelogrammum ad ipsam CM applicatum sit, deficiens figura quadrata, quod

74. huius.

7. secundi.

21. huius:

23. huius.

1. sexti:

74. huius.
Lein. ad 55.
huius.11. quinti:
17. sexti.

scilicet

EVCLID. ELEMENT.

18. huius.

1. diffi. tertia
rursus:

scilicet CK KM continetur; sitq; CK commensurabilis ipsi KM: recta linea CM plus poterit, quam MF quadrato rectę lineę sibi longitudine commensurabilis: atque est CM commensurabilis longitudine expositę rationali CD. ergo CF est prima apotome. quadratum igitur apotomę ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen primam:

E. C. C O M M E N T A R I U S.

Sit AB 33 minus R 3, BG 3. rationalis autem CD sit 6; & si ad ipsam CD applicetur parallelogrammum CH æquale quadrato ex AG, quod est 33, latitudinem faciens CK, erit CK 5 $\frac{1}{3}$. & si ad eandem applicetur KL æquale quadrato ex GB, quod est 3, latitudinem faciens KM, erit KM $\frac{1}{3}$, & tota CM 6. Rursus si ad eandem CD applicetur parallelogrammum FX, quod est 99, latitudinem faciens FN, erit FN R 2 $\frac{1}{3}$, & eadem ratione NM est R 2 $\frac{1}{3}$, & tota P MR 11. ergo CF est 6 minus R 11, quę est apotome prima.

THEOREMA LXXV. PROPOSITIO. XCIX.

Quadratum medię apotomę primę ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen secundam.

Sit apotome medię prima AB; rationalis autę CD: & quadrato ex AB æquale parallelogrammum CE ad ipsam CD applicetur, latitudinem faciens CF. Dico CF apotomę esse secundam. sit enim ipsi AB congruens BG. ergo AG GB medię sunt potentia solum commensurabiles, quę rationale continent: & quadrato quidem ex AG æquale parallelogrammum CH ad CD applicetur, latitudinem faciens CK: quadrato autem ex GB æquale KL ad eandem applicetur, latitudinem faciens KM. totum igitur CL est æquale quadratis ex AG GB medijs existētib; quare & CL est medium; & ad rationalem CD applicatum est, latitudinem

77. huius.

23. huius.

7. secundi.

21. huius.

1. sexti.

10. huius.

74. huius.

Item. ad 55.
huius.

11. quinti.

17. sexti.

faciens CM. rationalis igitur est CM, & ipsi CD longitudine incommensurabilis, ita quę quoniam CL est æquale quadratis ex AG GB, quorum quadratum ex AB æquale est parallelogrammo CE; erit reliquum, quod bis continetur AG GB æquale ipsi FL. est autem rationale, quod bis AG GB continetur. rationale igitur est & FL; & ad rationalem FE applicatum est, latitudinem faciens FM. quare FM est rationalis, & ipsi CD commensurabilis longitudine. & quoniam quadrata quidem ex AG GB, hoc est parallelogrammum CL medium est; quod autem bis continetur AG GB, videlicet FL est rationale: erit CL incommensurabile ipsi LF. ut autem CL ad LF, ita recta linea CM ad MF. ergo CM ipsi MF longitudine est incommensurabilis. & sunt utraque rationales. sunt igitur CM MF rationales potentia solum commensurabiles. ideoq; CF apotome est. Dico & secundam esse, fecerit enim FM bifariam in puncto N: & per N ipsi CD parallela ducatur NX. virumque igitur parallelogrammorum IX NL est æquale ei, quod continetur AG GB. & quoniam quadratorum ex AG GB medium proportionale est, quod AG GB continetur; estq; quadrati ex AG æquale parallelogrammo CH; quod autem continetur AG GB æquale parallelogrammo NL; & quadratum ex GB æquale ipsi KL: erit parallelogrammorum CH KL medium proportionale NL. est igitur ut CH ad NL, ita NL ad LK. Sed ut C H ad NL, ita est recta linea CK ad ipsam NM; & ut NL ad LK, ita NM ad MK. ergo ut CK ad NM, ita est NM ad MK; ac propterea rectangulum CKM est æquale quadrato ex NM, hoc est quare parti quadrati ex FM. & quoniam quadratum ex AG commensurabile est quadrato ex CB, erit & CH parallelogrammum parallelogrammo KL commensurabile, hoc est recta linea CK commensurabilis ipsi KM. quod cum

duar

due rectæ lineæ inæquales sint CM MF; quartæ autem parti quadrati ex MF æquale parallelogrammum CKM ad maiorem CM applicatum sit, deficiens figura quadrata, & in partes commensurabiles ipsam diuidit: recta linea CM plus poterit, quàm MF quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine: atque est congruens FM expositæ rationali CD commensurabilis. quare CF est apotome secunda. quadratum igitur mediæ apotomæ primæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen secundam.

18. huius.

2. Diffi. tertiarum.

F. C. COMMENTARIUS.

Ex iam demonstratis perspicuum sit, ut apotomæ quadratū inueniamus, nos uti septima propositione 2 libri, non autem quarta, ut ad 34 huius dictum est.

Sit AB RR 972 minus RR 108, BG RR 108, rationalis autem CD sit 6. & si ad ipsam CD applicetur parallelogrammum CH æquale quadrato ex AG, quod est R 972, latitudinem faciens CK; erit CK R 27; & si ad eandem applicetur KL æquale quadrato ex GB, quod est R 108, latitudinem faciens KM; erit KM R 3. & tota CM R 48. Rursus si ad CD applicetur parallelogrammum FX æquale rectangulo AGB, quod est 18, latitudinem faciens FN; erit FN 3, itemq; NM 3, & tota FM 6. ergo CF est R 48 minus 6, quæ est apotome secunda.

THEOREMA LXXVI. PROPOSITIO C.

Quadratum mediæ secundæ apotomæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen tertiam.

Sit mediæ apotome secunda AB, rationalis autem CD & quadrato ex AB æquale parallelogrammum CE ad ipsam CD applicetur, latitudinem faciens CF. Dico CF apotomen esse tertiam. sit enim ipsi AB congruenti BC. ergo AC GB mediæ sunt potentia solum commensurabiles, quæ medium continent: & quadrato quidem ex AG æquale ad CD applicetur CH, latitudinem faciens CK; quadrato autem ex GB æquale ad KH applicetur KL, latitudinem faciens KM. totum igitur CL est æquale quadratis ex AG GB: & sunt quadrata ex AG GB media. ergo & CL est medium, & ad rationalem CD applicatum est, latitudinem faciens CM. ergo CM est rationalis, & ipsi CD incommensurabilis longitudine. & quoniam totum CL est æquale quadratis ex AG GB, quorum CE æquale est quadrato ex AB; erit reliquum FL æquale ei, quod bis continetur AG GB. secetur FM bifariam in N; & per N ipsi CD parallela ducatur NX. Vtrumque igitur parallelogrammorum FX NL est æquale ei, quod AG GB continetur. est autem quod continetur AG GB medium. ergo & medium est FL, & ad rationalem EF applicatum est, latitudinem faciens FM. quare & FM est rationalis; & ipsi CD longitudine incommensurabilis. & quoniam AG GB potentia solum commensurabiles sunt, erit AG ipsi GB incommensurabilis longitudine. ideoq; quadratum ex AG rectangulo AGB est incommensurabile. sed quadrato quidem ex AG commensurabilia sunt ex AG GB quadrata; rectangulo autem AGB commensurabile est quod bis AG GB continetur. ergo quadrata ex AG GB ei, quod bis AG GB continetur, sunt incommensurabilia. at quadratis ex AG GB æquale est parallelogrammum CL; ei vero, quod bis continetur AG GB est æquale FL. incommensurabile igitur est CL ipsi LF. Ut autem CL ad LF, ita est recta linea CM ad MF. ergo CM ipsi MF incommensurabilis est longitudine; & sunt utrq; rationales. quare CM MF rationales sunt potentia solum commensurabiles. & ob id apotome est CF. Dico & tertiam esse. Quoniam enim quadratum ex AG commensurabile est quadrato ex GB,

76. huius.

23. huius.

7. secundi.

23. huius.

lem. ad 23. huius.

Ex demonstratis in 24 huius.

1. sexti.

10. huius.

74 huius.

erit

Lem. ad 35.
huius:

1. sexti.
11. quinti.
27. sexti.

18. huius:

3. diffin. ter-
ciarum.

erit parallelogrammum CH parallelogrammo KL com-
mensurabile. ergo & recta linea CK est comensurabilis ip-
si KM. & quoniam quadratorum ex AG GB mediū pro-
portionale est rectangulū AGB; atque est quadrato quid-
em ex AG æquale parallelogrammum CH; quadrato au-
tem ex GB æquale KL, & rectangulo AGB æquale NL:
erit parallelogrammorum CH KL medium proportio-
nale NL, ita est igitur vt CH ad NL, ita NL ad LK. sed vt CH
ad NL, ita est recta linea CK ad NM: vt autem NL ad LK,
ita NM ad MK. ergo & vt CK ad NM, ita NM ad MK; ac
propterea rectangulum CKM est æquale quadrato ex N
M, hoc est quartæ parti quadrati ex FM. Quoniam igitur
duæ rectę lineę inæquales sunt CM MF; & quartæ parti
quadrati ex FM æquale ad CM applicatum est, deficiens
figura quadrata, quod in partes comensurabiles ipsam diuidit: recta linea CM plus
poterit, quam MF quadrato rectę lineę sibi longitudine comensurabilis. & neutra
ipsarum CM MF longitudine comensurabilis est exposita rationali CD. ergo CF
tertia est apotome. quadratum igitur mediæ apotomę secundę ad rationalem ap-
plicatum, latitudinem facit apotomen tertiam.

F. C. COMMENTARIUS.

Sit AB RR 88: minus RR 18, BG RR 18, & rationalis CD sit 6. quod si ad CD applicetur parallelogrammum CH æquale quadrato ex AG, latitudinem faciens CK, erit CK R 24 $\frac{1}{2}$. & si applicetur KL æquale quadrato ex GE, quod latitudinem faciat KM, erit KM R $\frac{1}{2}$; & tota CM R 32. præterea si ad eandem CD applicetur FX æquale rectangulo AGB, quod est R 126, latitudinem faciens FN, erit FN R 3 $\frac{1}{2}$; & tota FM R 14. ergo CF est R 32 minus R 14, quæ est apotome tertia.

THEOREMA LXXVII. PROPOSITIO CI.

Quadratum minoris ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quartam.

Sit minor AB, rationalis autem CD: & quadrato ex AB æquale parallelogrammum CE ad ipsam CD applicetur, latitudinem faciens CF. Dico CF apotomen esse quartam. sit enim ipsi AB congruēs BG. ergo AG GB potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex ipsarum AG GB quadratis rationale; quod autem bis ipsis continetur medium: & quadrato ex AG æquale ad CD applicetur CH, latitudinem faciens CK: quadrato autem ex GB æquale ad KH applicetur KL, latitudinem faciens KM. totum igitur CL quadratis ex AG GB est æquale. atque est compositum ex quadratis AG GB rationale. ergo & rationale est CL; & ad rationalem CD applicatum est, latitudinem faciens CM. quare CM est rationalis, & ipsi CD longitudine comensurabilis. & quoniam totum CL est æquale quadratis ex AG GB, quorum CE æquale est quadrato ex AB: erit reliquum FL æquale ei, quod bis AG GB continetur. Itaque secetur FM bifariam in N; & per N alterutri ipsarum CD ML parallela ducatur NX. vtrumque igitur parallelogrammorum FX NL est æquale ei, quod continetur AG GB. & quoniam quod bis continetur AG GB medium est, & æquale parallelogrammo LF. erit & LF me-
dium.

77. huius.

21. huius:

7. secundi.

dium.& ad rationalem FE applicatum est; latitudinem faciens FM.ergo FM est rationalis,& ipsi CD longitudine incommensurabilis.& quoniam compositum ex quadratis ipsarum AG GB est rationale;quod autem bis AG GB continetur mediū: erunt quadrata ex AG GB ei, quod bis continetur AG GB incommensurabilia. quadratis autem ex AG GB æquale est parallelogrammum CL;& ei quod bis AG GB continetur est æquale FL.incommensurabile igitur est CL ipsi LF. sed vt CL ad LF,ita est CM ad MF.quare CM ipsi MF longitudine est incommensurabilis:& sunt utæque rationales.ergo CM MF rationales sunt potentia solum commensurabiles.& eam ob causam apotome est CF.Dico & quartam esse. Quoniam enim AG GB potentia sunt incommensurabiles, erit quadratum ex AG incommensurabile quadrato ex GB. & quadrato quidem ex AG æquale est parallelogrammum CH; quadrato autem ex GB est æquale KL.incommensurabile igitur est CH ipsi KL.sed vt CH ad KL,ita est CK ad KM.ergo CK ipsi KM est incommensurabilis longitudine.& quoniam quadratorum ex AG GB medium proportionale est AGB rectangulum;atque est quadrato quidem ex AG æquale parallelogrammum CH;quadrato autem ex GB æquale KL; & rectangulo AGB æquale NL: erit NL medium proportionale parallelogrammorum CH KL. est igitur vt CH ad NL, ita NL ad LK. sed vt CH ad NL, ita CK ad MN; & vt NL ad LK, ita NM ad MK.ergo vt CK ad MN ita NM ad MK; ac propterea rectangulum CKM est æquale quadrato ex NM, hoc est quartæ parti quadrati ex FM. Itaque quoniam duæ rectæ lineæ inæquales sunt C M MF;& quartæ parti quadrati ex FM æquale ad CM applicatum est,deficiens figura quadrata,quod est CKM,& in partes incommensurabiles ipsam diuidit: recta linea CM plus poterit,quam MF quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine.& est tota CM longitudine commensurabilis expositæ rationali CD. ergo CF quarta est apotome. quadratum igitur minoris ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quartam.

23.huius.

1.sexti.

10.huius.

74.huius.

1.sexti.

10.huius.

1eni. ad 55

huius.

1.sexti.

11.quinti.

17.sexti.

19.huius.

4.Diffi. ter-

tiarum.

F. C. COMMENTARIUS.

Sit AB R $\sqrt{21}$ plus R $\sqrt{315}$, minus R $\sqrt{21}$ plus R $\sqrt{315}$; BG R $\sqrt{21}$ minus R $\sqrt{315}$; rationalis autem CD sit 6. & si ad CD applicetur parallelogrammum CH æquale quadrato ex AG, latitudinem faciens CK,erit CK $3\frac{1}{2}$ plus R $\sqrt{8\frac{1}{2}}$. & si applicetur KL æquale quadrato ex GB,quod latitudinem faciat KM,erit KM $3\frac{1}{2}$ minus R $\sqrt{8\frac{1}{2}}$; & tota CM 7. Quod si ad eandem CD applicetur FX æquale rectangulo AGB,videlicet R $\sqrt{126}$, latitudinem faciens FN,erit FN R $\sqrt{3\frac{1}{2}}$; & tota FM R $\sqrt{14}$.est igitur CF 7 minus R $\sqrt{14}$, quæ est apotome quartæ.

THEOREMA LXXVIII. PROPOSITIO CII.

Quadratum eius,quæ cum rationali mediū totum efficit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quintam.

Sit quæ cum rationali medium totum efficit AB;rationalis autem CD;& quadrato ex AB æquale ad CD applicetur parallelogrammum CE, latitudinem faciens CF. Dico CF apotomen esse quintam. sit enim ipsi AB congruens BG.ergo AG GB rectæ lineæ potentia sunt incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex quadratis ipsarum medium;quod autem bis ipsis continetur rationale. & quadrato ex AG æquale parallelogrammum CH ad ipsam CD applicetur, latitudinem faciens CK: quadrato autem ex GB æquale applicetur KL latitudinem faciens KM.totum igitur CL est æquale quadratis ex AG GB. sed compositum ex quadratis ipsarum AG GB est medium.ergo & medium est parallelogrammum CL; &

78.huius.

Z Z ad

EVCLID. ELEMENT.

23. huius ad rationalem CD applicatum est, latitudinem faciens CM. quare CM est rationalis, & ipsi CD longitudine incommensurabilis. & quoniam totum CL est æquale quadratis ex AG GB, quorum CE æquale est quadrato ex A B; erit reliquum FL æquale ei, quod bis AG GB continetur. Itaque secetur FM bifariam in puncto N, & ab ipso N alterutri ipsarum CD ML parallela ducatur NX. utrumque igitur FX NL est æquale ei, quod AG GB continetur. & quoniam quod bis continetur AG GB rationale est, & æquale parallelogrammo FL; erit & FL rationale; & ad rationalem EF applicatum est, latitudinem faciens F M. ergo FM est rationalis, & ipsi CD commensurabilis longitudine. est autem parallelogrammum CL medium, & FL rationale. incommensurabile igitur est CL ipsi LF. & vt CL ad LF, ita CM ad M F. ergo CM ipsi MF longitudine est incommensurabilis. & sunt utraque rationales. quare CM MF rationales sunt potentia solum commensurabiles; ob idque apotome esse æquale quadrato ex NM, hoc est quartæ parti quadrati ex FM. quod cum quadratum ex AG incommensurabile sit quadrato ex GB; sitq; quadratum ex AG parallelogrammo CH æquale; quadratum autem ex GB parallelogrammo KL; erit C H ipsi KL incommensurabile. sed vt CH ad KL, ita CK ad KM. ergo CK ipsi KM longitudine est incommensurabilis. Quoniam igitur duæ rectæ lineæ CM MF inæquales sunt; & quartæ parti quadrati ex FM æquale ad ipsam CM applicatum est, de ficiens figura quadrata, & in partes incommensurabiles ipsam diuidit; recta linea C M plus poterit, quam MF quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. atque est congruens FM commensurabilis longitudine expositæ rationali CD. ergo CF quinta apotome est. quadratum igitur eius, quæ cum rationali medium totum efficit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quintam.
23. huius
7. secundæ
21. huius.
1. sexti.
10. huius.
74. huius.
1. sexti.
10. huius.
19. huius.
5. diffi. tertium.

F. C. COMMENTARIUS.

Sit AB R. V. R. 288 plus R. 207 minus R. V. 288 minus R. 207. EG R. V. R. 288 minus R. 207: rationalis autem C D sit 6. quod si ad C D applicetur parallelogrammum CH æquale quadrato ex AG, latitudinem faciens CK; erit CK R. 8 plus R. 5 $\frac{1}{4}$. & si applicetur KL æquale quadrato ex GB, latitudinem faciens KM erit KM R. 8 minus R. 5 $\frac{1}{4}$, & tota CM R. 32. Rursus si ad eandem CD applicetur FX æquale rectangulo AGB, latitudinem faciens FN; erit FN 1 $\frac{1}{2}$, & tota FM 3, quare CF est R. 32 minus 3, quæ est apotome quinta.

THEOREMA LXXIX. PROPOSITIO CIII.

Quadratum eius, quæ cum medio medium totum efficit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen sextam.

Sit quæ cum medio medium totum efficit A B; rationalis autem C D: & quadrato ex AB æquale parallelogrammum CE ad ipsam CD applicetur, latitudinem faciens CF. Dico CF apotomen esse sextam. sit enim ipsi AB congruens BG. ergo AG GB potentia sunt incommensurabiles, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis medium: quod autem bis ipsis AG GB continetur furabile. Itaq; ad CD applicetur quadrato ex AG æquale parallelogrammum C H, latitudinem faciens

CK.

CK:quadrato aut ex BG æquale applicetur KL,latitudinem faciens KM,totū igitur CL est æquale quadratis ex AG GB:ac propterea CL est mediū,& ad rationale CD applicatum est,latitudinem faciens CM.ergo CM rationalis est,& ipsi CD longitudine incommensurabilis. Quoniam igitur CL est æquale quadratis ex AG GB,quorum CE æquale est quadrato ex AB; erit reliquum FL æquale ei,quod bis AG GB continetur. atque est quod bis cōtinetur AG GB medium.ergo FL est medium,& ad rationale FE applicatum est,latitudinem faciens FM. est igitur FM rationalis,& ipsi C D longitudine incommensurabilis. & quoniam quadrata ex AG GB incommensurabilia sunt ei, quod bis AG GB continetur; atque est quadratis quidem AG GB æquale parallelogrammum CL; ei vero,quod bis continetur AG GB æquale FL: erit CL ipsi LF incommensurable. sed vt CL ad LF, ita est CM ad MF. quare CM ipsi MF incommensurabilis est longitudine: & sunt utręque rationales. ergo CM MF rationales sunt potentia solum commensurabiles.& ob id CF est apotome. Dico & sextam esse. Quoniā enim FL est æquale ei, quod bis continetur AG GB, secetur FM bifariā in puncto N; & per N ipsi CD parallela ducatur NX, utriq; igitur parallelogrammorum FX NL est æquale rectangulo AGB. & quoniam AG GB potentia sunt incommensurabiles; erit quadratum ex A G incommensurable quadrato ex BG. sed quadrato quidem ex AG est æquale parallelogrammum CH; quadrato autem ex BG æquale KL. ergo CH ipsi KL est incommensurable. vt autem CH ad KL, ita est CK ad KM. incommensurabilis igitur est CK ipsi KM. quod cum quadratorum ex AG GB medium proportionale sit rectangulum AGB; sitq; quadrato ex AG æquale CH, & quadrato ex GB æquale KL; rectanguloq; A G B æquale NL: erit & parallelogrammorum CH KL medium proportionale NK. & eadem ratione CM plus poterit, quā MF quadrato rectæ linę sibi longitudine incommensurabilis:& neutra ipsarum est commensurabilis lōgi tudine expōsitę rationali CD.ergo CF sexta est apotome. quadratum igitur eius,quę cum medio medium totum efficit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen sextam.

F. C. C O M M E N T A R I V S.

Sit $ABRV$. R 396 plus R 288 minus RV . R 396 minus R 288; $BGRV$. R 396 minus R 288; & rationalis CD sit 6. si vero ad CD applicetur parallelogrammum CH , latitudinem faciens CK ; erit CKR 11 plus R 8, & si applicetur KL æquale quadrato ex GB , latitudinem faciens KM ; erit KMR 11 minus R 8, & tota CMR 44. Rursus si ad CD applicetur FX æquale rectangulo AGB , quod latitudinem faciat FN , erit ea R 3, & tota FMR 12. ergo CF est R 44 minus R 12, quæ est apotome sexta.

THEOREMA LXXX. PROPOSITIO. CIIII.

Recta linea apotomę longitudine cōmensurabilis, & ipsa apotome est, atque ordine eadem.

Sit apotome AB ; et ipsi AB longitudine cōmensurabilis sit CD . Dico CD apotomen esse, atque ordine eandem, quā AB . quoniam enim apotome est $A B$, sit ipsi congruens $B E$. ergo AE EB rationales sunt potentia solum commensurabiles. & fiat proportio BE ad D eadem, quę est AB ad CD . quare vt vna ad vnā, ita erunt omnes ad omnes. est igitur vt AB ad CD , ita $A E$ ad CF . commensurabilis autem est AB ipsi CD longitudine. ergo & AE ipsi CF longitudine commensurabilis erit, & BE ipsi DF . sunt autem AE EB rationales potentia solum cōmensurabiles. ergo & EF FD rationales erunt potentia solum commensurabiles; ac propterea CD apotome est. Dico & ordine eandem esse. Quoniam enim est vt AE ad CF , ita BE ad FD , erit permutādo vt AE ad EB , ita CF ad FD . vel igitur AE plus

74. huius:

11. quinti.

10. huius.

A

B

74. huius.

22 2 potest,

EVCLID. ELEMENT.

potest, quàm EB quadrato rectę lineę sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis: & siquidem commensurabilis, & CF plus poterit, quàm FD quadrato rectę lineę sibi longitudine commensurabilis: & si quidem AE commensurabilis est longitudine expositę rationali; & CF expositę rationali longitudine commensurabilis erit: si vero EB est commensurabilis, & DF commensurabilis erit: & si neutra ipsarū AE EB commensurabilis est expositę rationali longitudine, & neutra ipsarū CF FD eidē longitudine erit commensurabilis. quòd si AE plus possit, quàm EB quadrato rectę lineę sibi incommensurabilis longitudine; & CF plus poterit, quàm FD quadrato rectę lineę sibi longitudine incommensurabilis: & siquidem AE sit commensurabilis expositę rationali longitudine, & CF eidē longitudine commensurabilis erit: si uero BE, & DF: & si neutra ipsarū AE EB, & neutra ipsarū CF FD erit expositę rationali longitudine commensurabilis. ergo CD apotome est, & ordine eadē, quę AB.

F. C. COMMENTARIUS.

80. huius. **A** Et BE ipsi DF. *Quoniam enim est ut AE ad CF, ita AB ad CD, erit & reliqua BE ad DF, ut AE ad CF, hoc est ut AB ad CD. commensurabilis igitur est & BE ipsi DF longitudine.*
B Ergo & CF FD rationales erunt potentia solum commensurabiles. *Nam cum sit ut AE ad CF, ita BE ad DF, erit permutatio ut AE ad EB, ita CF ad FD: suntq; AE EB rationales potentia solum commensurabiles. ergo & CF FD rationales potentia solum commensurabiles erunt.*
 10. huius.

THEOREMA LXXXI. PROPOSITIO. CV.

Recta linea medię apotomę commensurabilis, & ipsa medię apotome est, atque ordine eadem.

75. 76. huius. Sit medię apotome AB, & ipsi AB longitudine commensurabilis sit CD. Dico CD medię apotomen esse, & ordine eandem. Quoniam enim medię apotome est AB, sit BE ipsi AB congruens. ergo AE EB medię sunt potentia solum commensurabiles: & fiat ut AB ad CD, ita B E ad DF. sunt autem AE EB medię potentia solum commensurabiles. ergo & CF FD medię potentia solum commensurabiles erunt; ac propterea medię apotome est CD. ostendendum est & ordine eandem esse, quę AB. Quoniam enim ut AE ad EB, ita CF ad FD; ut autem AE ad EB, ita quadratum ex AE ad rectangulum AEB; & ut C F ad FD, ita quadratum ex CF ad rectangulum CFD: erit & ut quadratum ex AE ad rectangulum AEB, ita quadratum ex CF ad rectangulum CFD. sed quadratum ex AE commensurabile est quadrato ex CF. rectangulum igitur AEB rectangulo CFD est commensurabile. & si quidem rationale est rectangulum AEB, & rectangulum CFD rationale erit. si vero rectangulum AEB medium est, & medium erit rectangulum CFD. medię igitur apotome est CD, atque ordine eadē, quę AB.
- Lem. ad 25. huius.

THEOREMA LXXXII. PROPOSITIO. CVI.

Recta linea minori commensurabilis, & ipsa minor est.

77. huius. Sit minor AB, & ipsi AB commensurabilis sit C D. Dico & CD minorem esse. fiant enim eadem quę prius. & quoniam AE EB potentia sunt incommensurabiles, & CF FD potentia incommensurabiles erunt. est aut ut AE ad EB, ita CF ad FD. quare & ut quadratum ex AE ad quadratum ex EB, ita quadratum ex CF ad quadratum ex EB. quadratum
22. sexti.

quadratum ex FD : & componendo, vt quadrata ex AE EB ad quadratum ex EB, ita quadrata ex CF FD ad quadratum ex FD; & permutando. commensurabile autem est quadratum ex BE quadrato ex DF. ergo & compositum ex quadratis ipsarum AE EB composito ex quadratis CF FD commensurabile erit. sed compositum ex quadratis AE EB est rationale. ergo & rationale erit compositum ex quadratis CF FD. Rursus quoniam est vt quadratum ex AE ad rectangulum AEB, ita quadratum ex CF ad rectangulum CFD, & permutando; commensurabile autem est quadratum ex AE quadrato ex CF: erit & rectangulum AEB rectangulo CFD commensurabile. sed rectangulum AEB medium est. medium igitur & rectangulum CFD. quare CF FD potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale: quod autem ipsis continetur medium. ergo C D est minor.

ALITER. Sit minor A, & ipsi A commensurabilis sit B. Dico B minorem esse. Exponatur enim CD rationalis: & quadrato ex A æquale parallelogrammum CE ad ipsam CD applicetur latitudine faciens CF. apotome igitur quarta est CF. quadrato autem ex B æquale ad FE applicetur FG, latitudinem faciens FH. Quoniam igitur A commensurabilis est ipsi B, erit & quadratum ex A quadrato ex B commensurabile. sed quadrato quidem ex A æquale est parallelogrammum CE; quadrato autem ex B æquale FG. ergo CE commensurabile est ipsi FG. vt autem CE ad FG, ita CF ad FH. commensurabilis igitur est CF ipsi FH longitudine. sed CF est apotome quarta. ergo & FH apotome quarta est; et spaciū FG rationale, et apotoma quarta continetur. recta igitur linea spaciū potens minor est. potest autem spaciū FG ipsa B. ergo B est minor.

77. huius.

78. huius.
79. huius.

THEOREMA LXXXIII. PROPOSITIO CVII.

Recta linea commensurabilis ei, quæ cum rationali medium totum efficit, & ipsa cum rationali medium totum efficiens est.

Sit cum rationali medium totum efficiens AB: et ipsi AB commensurabilis sit CD. Dico CD esse eam, quæ cum rationali medium totum efficit. sit enim ipsi AB congruens BE. ergo AE EB potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem ipsis continetur rationale. et eadem construantur. similiter demonstrabitur, vt prius CF FD in eadem esse proportionem; in qua AE EB : et compositum ex quadratis ipsarum AE EB commensurabile esse composito ex quadratis CF FD: rectangulum autem AEB rectangulo CFD commensurabile. quare et CF FD potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex quadratis CF FD, medium; quod autem ipsis continetur, rationale. ergo CD est quæ cum rationali medium totum efficit.

78. huius.

79. huius:

ALITER. Sit cum rationali medium totum efficiens A, et ipsi A commensurabilis B. Dico B esse eam, quæ cum rationali medium totum efficit. Exponatur enim rationalis CD: et quadrato quidem ex A æquale parallelogrammum CE ad ipsam CD applicetur latitudinem faciens CF. ergo CF est apotome quinta: quadrato autem ex B æquale

FG ad

102. huius.

EVCLID. ELEMENT.

FG ad ipsam FE applicetur, latitudinem faciens FH. Quoniam igitur A commensurabilis est ipsi B, erit & quadratum ex A quadrato ex B commensurabile. sed quadrato ex A æquale est parallelogrammum CE; quadrato autem ex B æquale FG. ergo CE est commensurabile ipsi FG; ob idque recta linea CF ipsi FH longitudine est commensurabilis. apotome autem quinta est CF. ergo & FH est apotome quinta; estq; FE rationalis. si autem spaciū contineatur rationali, & apotoma quinta, recta linea spaciū potens est, quæ cum rationali medium totum efficit. sed ipsa B potest spaciū FG. ergo B cum rationali medium totum efficiens est.

104. huius.
96. huius.

THEOREMA LXXXIIII. PROPOSITIO CVIII.

Recta linea commensurabilis ei, quæ cum medio medium totum efficit, & ipsa cum medio medium totum efficiens est.

Sit cum medio medium totum efficiens AB : & ipsi AB commensurabilis sit CD. Dico CD esse eā, quæ cum medio medium totum efficit. sit ipsi AB congruēs BE, & eadem cōstruantur. ergo AE EB potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex quadratis ipsarum medium; quod autem ipsis continetur medium, incommensurabileq; composito ex ipsarum quadratis, & sunt AE EB commensurabiles ipsis CF FD, ut ostensum est : & compositum ex quadratis AE EB commensurabile composito ex quadratis CF FD: rectangulumque AEB rectangulo CFD. ergo CF FD potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex quadratis ipsarum medium; quod autem ipsis continetur medium, & incommensurabile composito ex ipsarum quadratis. ergo CD est quæ cum medio medium totum efficit.

79. huius.
79. huius.

THEOREMA LXXXV. PROPOSITIO CIX.

Medio de rationali detracto, recta linea, quæ reliquum spaciū potest, vna ex duabus irrationalibus sit, vel apotome, vel minor.

De rationali enim BC medium BD detrahatur. Dico eam, quæ reliquum spaciū EC potest, vnam fieri ex duabus irrationalibus, vel apotomē vel minorem. Exponatur enim rationalis FG : & parallelogrammo quidem BC æquale GH ad F G applicetur; parallelogrammo autem BD æquale auferatur GK. reliquum igitur CE est æquale LH. Itaque quoniam rationale est BC, medium autem BD: atque est BC æquale GH, & BD ipsi GK; erit GH rationale; medium autem CK, & ad rationalem FG applicatum est. rationalis igitur est FH; & ipsi FG longitudine commensurabilis: FK vero rationalis, & incommensurabilis ipsi FG longitudine. ergo FH ipsi FK longitudine incommensurabilis est, & HF FK rationales sunt, potentia solum commensurabiles; ac propterea HK est apotome. ipsi vero congruens

27. huius.
23. huius.
13. huius.
74. huius.

congruens KF. vel igitur HF plus potest, quàm FK quadrato rectę lineę sibi commensurabilis longitudine, vel incommensurabilis. possit primum quadrato rectę lineę commensurabilis. atque est tota HF commensurabilis longitudine expositę rationali FG. ergo HK prima est apotome. recta autem linea, quę potest spacium rationali, & apotoma prima contentum est apotome. Ergo quę potest LH hoc est CE apotome est. quòd si HF plus possit, quàm FK quadrato rectę lineę sibi incommensurabilis longitudine; estq; tota HF expositę rationali FG longitudine commensurabilis; erit HK apotome quarta. & quę potest spacium rationali, & apotoma quarta contentum minor est. quę igitur potest spacium LH, videlicet EC est minor.

1. tertiarum.
4. diffin.

92. huius.

4. diffin. tertiarum.
95. huius.

THEOREMA LXXXVI. PROPOSITIO CX.

Rationali de medio detracto alię duę irrationales fiunt, vel medię apotome prima, vel cum rationali medium totum efficiens.

De medio enim BC rationale BD detrahatur. Dico rectā lineā, quę reliquū spacium EC potest, vnā duarum irrationalium fieri vel medię apotomen primam, vel eam, quę cum rationali medium totum efficit. Exponatur enim rationalis FG, & ad ipsam similiter spaciam applicentur; erit rationalis quidē FH, & ipsi FG longitudine incommensurabilis; rationalis autem FK, & incommensurabilis ipsi FG longitudine. ergo HF FK rationales sunt potentia solum commensurabiles; ac propterea apotome est HK, & ipsi congruēs KF. vel igitur HF plus potest, quàm FK quadrato rectę lineę sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. & si quidē commensurabilis; atque est congruens FK commensurabilis expositę rationalis FG longitudine; erit HK apotome secunda. est autem FG rationalis. ergo quę potest spacium LH, hoc est CE, medię est apotome prima. quòd si HF plus potest, quàm FK quadrato rectę lineę sibi longitudine incommensurabilis; atque est congruens FK commensurabilis expositę rationali FG longitudine: erit HK apotome quinta. recta igitur linea potens spacium EC est quę cum rationali medium totum efficit.

23. huius.
21. huius.

74. huius.

2. diffin. tertiarum.
93. huius.
5. diffin. tertiarum.
99. huius.

THEOREMA LXXXVII. PROPOSITIO CXI.

Medio de medio detracto, quod sit incommensurabile toti, reliquę duę irrationales fiunt, vel medię apotome secunda, vel cum medio medium totum efficiens.

Detrahatur enim, vt in propositis figuris de medio BC medium BD, quod sit incommensurabile toti. Dico rectam lineam, quę potest spacium CE, vnā esse ex duabus irrationalibus, vel medię apotomen secundam, vel eam, quę cum medio medium totum efficit. Quoniam enim medium est vtrumque ipsoꝝ BC BD, & BC incommensurabile est ipsi BD, hoc est GH ipsi GK; erit HF ipsi FK incommensurabilis longitudine. ergo HF FK rationales sunt potentia solum commensurabiles; & ob id apotome est HK, & ipsi congruens KF. itaque vel HF plus

63. huius.

74. huius.

HF plus potest, quàm FK quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis: & si quidem commensurabilis, & neutra ipsarum HF FK commensurabilis est expositæ rationali FG longitudine; erit HK apotome tertia. rationalis autem est KL: & rectangulum rationali, & apotoma tertia cõtetum irrationale est. ergo recta linea, quæ ipsum potest, est irrationalis, & vocatur mediæ apotome secunda. si vero HF plus potest, quàm FK quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine, & neutra ipsarum HF FK longitudine commensurabilis est expositæ rationali FG; erit HK apotome sexta. at recta linea potens quod rationali, & apotoma sexta cõtinetur est quæ cum medio medium totum efficit. ergo quæ potest spacium LH, hoc est EC est cum medio medium totum efficiens.

THEOREMA LXXXVIII. PROPOSITIO. CXII.

Apotome non est eadem, quæ ex binis nominibus.

Sit apotome AB. Dico AB non esse eandem, quæ ex binis nominibus. sit enim, si fieri potest, ex ponaturque rationalis DC, & quadrato ex AB æquale rectangulum CE ad ipsam DC applicetur latitudinem faciens DE. Quoniam igitur apotome est AB, erit DE apotome prima. sit ipsis congruens EF. ergo DF FE rationales sunt potentia solum commensurabiles: & DF plus potest, quàm FE quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis: atque est DF commensurabilis expositæ rationali CD longitudine. Rursus quæ ex binis nominibus est AB, erit DE ex binis nominibus prima. Diuidatur in nomina ad punctum G; sitque DG maius nom. ergo DG GE rationales sunt, potentia solum commensurabiles: & DC plus potest, quàm GE quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine: & maior DG longitudine est commensurabilis est expositæ rationali DC. quare DF ipsi DG longitudine est commensurabilis. & reliquæ igitur FG commensurabilis erit. Itaque quoniam DF commensurabilis est ipsi FG, atque est rationalis DF; erit & FG rationalis. Rursus quoniam DF commensurabilis est ipsi FG longitudine, atque est DF ipsi FE incommensurabilis longitudine; erit & FG ipsi FE longitudine incommensurabilis: & sunt rationales. ergo GF FE rationales sunt potentia solum commensurabiles; ac propterea apotome est EG. sed & rationalis. quod fieri non potest. ergo apotome non est eadem, quæ ex binis nominibus.

Apotome, & quæ post ipsam sunt irrationales, neque mediæ, neque inter se eadẽ sunt: quadratum enim, quod à mediâ fit, ad rationalem applicatum, latitudinem facit rationalem, & ei, ad quam applicatur, longitudine incommensurabilem. quod autem ab apotoma fit ad rationalem applicatum, latitudinem facit apotomen primam. quod fit à mediâ apotoma prima ad rationalem applicatum, latitudinem facit apotomen secundam. quod fit à mediâ apotoma secunda ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen tertiam. quod fit à minori ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quartam. quod ab ea, quæ cum rationali mediũ totũ efficit ad rationalem applicatũ latitudinẽ facit apotomẽ quintã. quod ab ea, quæ cum medio medium totum efficit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen sextam. Quoniam igitur dictæ latitudines differunt tum à prima, tum inter se, à prima quidem, quod rationalis sit, inter se vero, quod ordine non sint eadẽ; manifestum est & ipsas irrationales inter se differentes esse, & ostensum est apotomẽ

non

non esse eandem, quæ ex binis nominibus quadrata autem apotomæ & earum quæ sunt post apotomen ad rationalem applicata latitudines faciunt apotomas eiusdem ordinis, cuius & illæ sunt, quarum quadrata applicantur. Similiter & quadrata eius, quæ est ex binis nominibus, & earum, quæ post ipsam sunt ad rationalem applicata latitudines faciunt eas, quæ ex binis nominibus eiusdem ordinis, cuius & illæ sunt, ergo rectæ lineæ, quæ sequuntur apotomen, & quæ sequuntur eam, quæ ex binis nominibus, inter se differunt, ita ut omnes sint numero tredecim, videlicet.

- 1 Media.
- 2 Quæ ex binis nominibus
- 3 Quæ ex binis medijs prima
- 4 Quæ ex binis medijs secunda
- 5 Maior
- 6 Rationale ac medium potens
- 7 Bina media potens
- 8 Apotome
- 9 Mediæ apotome prima.
- 10 Mediæ apotome secunda.
- 11 Minor.
- 12 Cum rationali medium totum efficiens.
- 13 Cum medio medium totum efficiens.

THEOREMA LXXXIX. PROPOSITIO. CXIII.

Quadratum rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus applicatum latitudinem facit apotomen, cuius nomina commenfurabilia sunt nominibus eius, quæ est ex binis nominibus, & in eadem proportionem, & adhuc apotome, quæ fit, eundem habet ordinem, quem ea, quæ est ex binis nominibus.

Sit rationalis A, ea, quæ est ex binis nominibus BC, cuius maius nomen CD, & quadrato ex A æquale rectangulum sit quod B C EF continetur. Dico EF apotomen esse, cuius nomina commenfurabilia sunt ipsis CD DB, & in eadem proportionem, & adhuc EF eundem ordinem habere, quam habet BC. Sit enim rursus quadrato ex A æquale rectangulum, quod BD & G contineatur. Itaque quoniam rectangulum contentum BC EF est æquale ei, quod BD & G continetur, erit ut CB ad BD, ita C ad EF. A maior autem est CB, quam BD. ergo & C quam EF maior erit. sit ipsi G æqualis E. B H. est igitur ut CB ad BD, ita HE ad EF. & diuidendo ut CD ad DB, ita HF ad FE; fiat ut HF ad FE, ita FK ad KE. ergo & tota HK ad totam KF est ut FK ad KE. ut enim unum antecedentium ad unum consequentium, ita antecedentia omnia ad omnia consequentia. sed ut FK ad KE, ita CD ad DB. & ut igitur HK ad KF, ita CD ad DB. D comensurable autem est quadratum ex CD quadrato ex DB. ergo & quadratum ex HK quadrato ex KF est comensurable. atque est ut quadratum ex HK ad quadratum ex F

HK, ita recta linea HK ad KE, quoniam tres recta linea HK KF KE deinceps proportio sunt. commensurabilis igitur est HK ipsi KE longitudine. ergo & HE ipsi EK longitudine est commensurabilis. & quoniam quadratum ex A est aequale ei, quod HE BD continetur; rationale autem est quadratum ex A: erit & quod HE BD continetur rationale: & ad rationalem BD applicatum est. rationalis igitur est HE, & ipsi BD longitudine commensurabilis; ideoque & EK, quae est incommensurabilis ipsi HE rationalis erit, & ipsi BD commensurabilis longitudine. Quoniam igitur est ut CD ad DB, ita FK ad KE; sunt autem CD DB potentia solum commensurabiles: & FK KE potentia solum commensurabiles erunt. rationalis autem est KE, & ipsi BD commensurabilis longitudine. quare & FK est rationalis, ipsique CD longitudine commensurabilis. sunt igitur FK KE rationales, & potentia solum commensurabiles: & idcirco EF apotome est. itaque vel CD plus potest, quam DB quadrato recta linea sibi commensurabilis longitudine, vel incommensurabilis. & si quidem commensurabilis, etiam FK plus poterit, quam KE quadrato recta linea sibi longitudine commensurabilis. & si CD commensurabilis est exposita rationali longitudine, & FK eadem commensurabilis erit: si autem BD, & KE. & si neutra ipsarum CD DB, & neutra ipsarum FK KE. Quod si CD plus potest, quam DB quadrato recta linea sibi incommensurabilis longitudine, & FK plus poterit, quam KE quadrato recta linea sibi longitudine incommensurabilis. & si BD, & KE. at si neutra ipsarum CD DB, & neutra ipsarum FK KE. ergo EF apotome est, cuius nomina FK KE commensurabilia sunt nominibus CD DB eius, quae est ex binis nominibus, & in eadem proportionem, & eandem habet ordinem, quem CB.

E. C. COMMENTARIUS.

- A Erit ut CB ad BD, ita G ad EF] Ex 14 sexti.
 B Ergo & G, quam EF maior erit] Ex 15, quae a nobis demonstrata sunt ad 16 quinti.
 C Ergo & tota HK ad totam KF est ut FK ad KE] Ex 12 quinti.
 D Commensurabile autem est quadratum ex CD quadrato ex DB] Ex 37 huius, permittitur enim CB ea, quae ex binis nominibus.
 E Ergo et quadratum ex HK quadrato ex KF est commensurabile] Ex 22 sexti, & decima huius.
 F Atque est ut quadratum ex HK ad quadratum ex KF, ita recta linea HK ad KE] Ex corollario secundo 20 sexti.
 G Ergo & HE ipsi EK longitudine est commensurabilis] Ex 16 huius.
 H Quare & FK est rationalis, ipsique CD longitudine commensurabilis] Quoniam igitur est ut CD ad DB, ita FK ad KE, erit permutando ut KE ad DB, ita FK ad CD. sed KE est longitudine commensurabilis ipsi BD. ergo & FK ipsi CD commensurabilis erit longitudine. quod cum FK KE potentia commensurabiles sint, sitque rationalis KE, erit & FK rationalis, & ipsi CD longitudine commensurabilis.
 K Et idcirco EF apotome est] Ex 74 huius.
 A Sit A 2, CBR 12 plus 3, ut CD sit R 12, DB 3. & si quadratum ex A, quod est 4, applicetur ad DB latitudinem facies G, erit G $1\frac{1}{4}$, cui equalis sit HE. fiat ut CB ad BD, ita HE ad EF ut deicet ut R 12 plus 3 ad 3 ita $1\frac{1}{4}$ ad alium. multiplicabimus igitur 3 per $1\frac{1}{4}$ producet 4, & 4 dividemus per R 12 plus 3, hoc est applicabimus 4 ad R 12 plus 3. quod quidem hoc modo fiet. multiplicetur R 12 plus 3 per apotomen ipsi respondentem, hoc est per R 12 minus 3. producietur 3. rursus multiplicetur 4 per eandem R 12 minus 3. producietur R 192 minus 12. quare ex 17 septimi 3 ad R 192 minus 12 proportionem habebit eandem, quam R 12 plus 3 ad 4. & ob id R 192 minus 12 ad 3 applicata latitudinem faciet eandem, quae 4, si applicetur ad R 12 plus 3. sed

sed R 192 minus 12 applicata ad 3 latitudinem facit R 21 $\frac{1}{2}$ minus 4. quadrat non igitur rationalis, videlicet 4 ad eam, quae est ex binis nominibus secunda, hoc est ad R 12 plus 3 applicatum latitudinem facit R 21 $\frac{1}{2}$ minus 4, quae est secunda apotome, cuius nomina commensurabilia sunt ipsis nominibus CD DB, & in eadem proportionem.

PROBLEMA XC. PROPOSITIO CXIII.

Quadratum rationalis ad apotomen applicatum latitudinem facit eam, quae ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt apotomae nominibus, & in eadem proportionem, & adhuc quae ex binis nominibus sit eundem habet ordinem, quae ipsa apotome.

Sit rationalis quidem A, apotome autem BD: & quadrato ex A a quale sit quod BD, KH continetur, ita ut quadratum rationalis A ad BD applicatum latitudinem faciat KH. Dico KH ex binis nominibus esse, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus ipsius BD, & in eadem proportionem: & KH eundem habere ordinem, quem habet BD. sit enim ipsi BD congruens DC. ergo BC CD rationales sunt potentia solum commensurabiles: & quadrato ex A aequale sit, quod BC, & G continetur. rationale autem est quadratum ex A. ergo quod BC G continetur est rationale: & ad rationalem BC applicatum est. rationalis igitur est recta linea G, ipsiq; BC longitudine commensurabilis. itaque quoniam rectangulum contentum BC G est aequale ei, quod BD KH continetur, erit ut CB ad BD, ita KH ad G. maior autem est CB, quam BD. ergo & KH, quam G est maior. ponatur ipsi G equalis KE. commensurabilis igitur est KE ipsi BC longitudine. & quoniam est ut CB ad BD, ita HK ad KE, erit per conversionem rationis ut BC ad CD, ita KH ad HE. fiat ut KH ad HE, ita HF ad FE. & reliqua igitur KF ad FH est ut KH ad HE, hoc est ut BC ad CD: sed BC CD potentia solum sunt commensurabiles. ergo & KF FH potentia solum commensurabiles erunt. & cum sit ut KH ad HE, ita KF ad FH: ut autem KH ad HE, ita HF ad FE, erit & ut KF ad FH, ita HF ad FE. quare & ut prima ad tertiam, ita quadratum ex prima ad quadratum ex secunda: ut igitur KF ad FE, ita quadratum ex KF ad id, quod ex FH quadratum. commensurabile autem est quadratum ex KF quadrato ex FH: sunt enim KF FH potentia solum commensurabiles. ergo & KF ipsi FE commensurabilis est longitudine: ac propterea FK ipsi KE longitudine commensurabilis. sed KE rationalis est, & ipsi BC longitudine commensurabilis. ergo & KF rationalis erit, & commensurabilis ipsi BC longitudine. & quoniam est ut BC ad CD, ita KF ad FH, erit permutando ut BC ad KF, ita DC ad FH: commensurabilis autem est BC ipsi KF. quare & CD ipsi FH est commensurabilis: suntq; BC CD rationales potentia solum commensurabiles. ergo & KF FH rationales potentia solum commensurabiles erunt: ex binis igitur nominibus est KH. & si quidem BC plus potest, quam CD quadrato recte lineae sibi longitudine commensurabilis, & KF plus poterit, quam FH quadrato recte lineae sibi longitudine incommensurabilis, & KF plus poterit, quam FH quadrato recte lineae sibi longitudine incommensurabilis longitudine. & si quidem BC longitudine commensurabilis est expositae rationali, & KF eidem commensurabilis: & si neutra ipsarum BC CD, & neutra ipsarum KF FH, at si BC plus potest, quam CD quadrato recte lineae sibi longitudine incommensurabilis, & KF plus poterit, quam FH quadrato recte lineae sibi incommensurabilis longitudine. & si quidem BC longitudine commensurabilis est expositae rationali, & KF eidem commensurabilis erit. si vero CD, & ipsa FH: quod si neutra ipsarum BC CD, & neu-

74. huius.

21. huius.

14. sexti:
Ex demon-
stratis ad 16.
quinti.
39. quinti:
solus est

61. quinti.

Corr. a. 26.
sexti.

similiter
ad 16.
quinti

tra ipsarum KF FH, ex binis igitur nominibus est KH, cuius nomina KF FH commensurabilia sunt nominibus apotomæ BC CD; & in eadem proportionē; & KH eandem tenet ordinem, quem ipsa BC.

F. C. COMMENTARIIVS.

Sit A 2, BD R 18 minus R 10. & multiplicetur R 18 minus R 10 per eam, quæ ex binis nominibus ipsi respondet, videlicet per R 18 plus R 10 produciatur; 83, rursus multiplicetur ipsius A rationalis quadratum, quod est 4 per eandem, produciatur R 288 plus R 160. habebit igitur 8 ad R 288 plus R 160 proportionem eandem, quam R 18 minus R 10 ad 4 ex 17 septimi. quare si R 288 plus R 160 applicetur ad 8 latitudinem faciet R 4 $\frac{1}{2}$ plus R 2 $\frac{1}{2}$; & eandem latitudinem faciet 4, si ad R 18 minus R 10 applicetur. quadratum igitur rationalis 4 applicatum ad tertiam apotomen, videlicet ad R 18 minus R 10 latitudinem faciet eam, quæ est ex binis nominibus tertia, hoc est R 4 $\frac{1}{2}$ plus R 2 $\frac{1}{2}$ cuius nomina commensurabilia sunt apotomæ nominibus, & in eadem proportionē.

THEOREMA XCI. PROPOSITIO. CXV.

Si spaciū cōtinetur apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus apotomæ, & in eadem proportionē; recta linea spaciū potens est rationalis.

Spaciū enim contineatur AB CD, videlicet apotoma AB, & CD, quæ sit ex binis nominibus, cuius maius nomen CE: & sint nomina eius; quæ ex binis nominibus CE ED commensurabilia nominibus apotomæ AF FB; & in eadē proportionē; sitq; recta linea G potens spaciū contentum AB CD. Dico ipsam G rationalem esse, exponatur enim rationalis H: & quadrato ex H æquale ad ipsam CD applicetur, latitudinem faciens KL. apotome igitur est KL, cuius nomina KM ML commensurabilia sunt nominibus eius, quæ est ex binis nominibus CE ED, & in eadem proportionē. sed CE ED commensurabiles sunt ipsis AF FB, atque in eadem proportionē. est igitur vt AF ad FB, ita KM ad ML. & permutando vt AF ad KM, ita FB ad LM. quare & reliqua AB ad reliquam KL est vt AF ad K M. commensurabilis autem est AF ipsi KM. ergo & AB ipsi KL est cōmensurabilis. estq; vt AB ad KL, ita rectangulum contentum CD AB ad id, quod continetur CD KL. commensurabile igitur est rectangulum contentum CD AB rectangulo, quod CD KL continetur. sed rectangulum contentum CD KL est æquale quadrato ex H. ergo rectangulum, quod continetur CD AB quadrato ex H est commensurabile. rectangulum autem, quod continetur CD AB est æquale quadrato ex G. ergo quadratū ex G commensurabile est quadrato ex H. atque est quadratum ex H rationale. rationale igitur est quadratum ex G; & idcirco ipsa G est rationalis; & potest quod CD AB continetur. Si igitur spaciū contineatur apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus apotomæ, & in eadē proportionē; recta linea spaciū potens est rationalis.

19. quini.
10. huius.
1. sexti.

C I O R O L L A R I V M.

Ex ijs manifesto constat fieri posse, vt spaciū rationale irrationalibus rectis lineis contineatur.

Sit apotome AB $21\frac{1}{2}$ minus 4, ea vero, quæ ex binis nominibus CD sit 12 plus 3. & multiplicetur R $21\frac{1}{2}$ minus 4 plus R 12 plus 3. fit R 256, quæ est 16 minus 12, hoc est 4, quod est rationale, & eius radix 2 rationalis.

THEOREMA XCII. PROPOSITIO. CXVI.

A media infinitæ irrationales fiunt, & nulla alicui antecedentium est eadem.

Sit media A . Dico ex ipsa A infinitas irrationales fieri, & nullam alicui antecedentium eandem esse. exponatur enim rationalis B . & rectangulo contento AB æquale sit quadratum ex C . irrationalis igitur est ipsa C nam quod rationali, & irrationali continetur irrationale est, & nulli earum, quæ prius est eadem: non enim quadratum alicuius antecedentium ad rationalem applicatum latitudinem efficit mediam. rursus rectangulo, quod BC continetur, æquale sit quadratum ex D . irrationale igitur est, quod fit ex D : & idcirco ipsa D est irrationalis, & nulli antecedentium eadem. neque enim quadratum alicuius earum, quæ prius sunt ad rationalem applicatum latitudinem efficit ipsam C . Similiter & eodem ordine infinite protracto, manifestum est à media infinitas irrationales fieri, & nullam alicui antecedentium eandem esse.

ALITER. Sit media AC . Dico ex ipsa AC infinitas irrationales fieri, & nullam alicui priorum eandem esse. ducatur ipsi AC ad rectos angulos AB : sitque A B rationalis, & BC compleatur. irrationale igitur est BC , & quæ ipsum potest esse irrationalis. possit autem ipsum recta linea CD . ergo CD irrationalis est, & nulli priorum eadem. non enim quadratum alicuius priorum ad rationalem applicatum latitudinem efficit mediam. rursus compleatur ED : erit ED irrationale; & recta linea ipsum potens irrationalis. possit ipsum recta linea DF . ergo DF irrationalis est, & nulli priorum eadem. nullus enim priorum quadratum, si ad rationalem applicetur, latitudinem efficit ipsam CD . ergo à media infinite irrationales fiunt, & nulla alicui priorum est eadem.

In scholio
ad pp. huius:

THEOREMA XCIII. PROPOSITIO. CXVII.

Propositum sit nobis ostendere in quadratis figuris diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine.

Sit quadratum $ABCD$, cuius diameter AC . Dico AC ipsi AB longitudine incommensurabilem esse. si enim fieri potest, sit commensurabilis. Dico ex hoc sequi eundem numerum parem esse, & imparem. itaque manifestum est quadratum ex AC duplum esse quadrati ex AB . & quoniam AC commensurabilis est ipsi AB , habebit AC ad AB proportionem eam, quam habet numerus ad numerum. habeat, quam EF ad

A
B

EF ad G : sintq; EF, G numeri minimi eorum, qui eandem habent proportionem. non igitur vnitas est EF. si enim est vnitas, & habet ad G proportionem eam, quam AC ad AB; estq; AC maior, quam AB: & EF vnitas, quam G numerus maior erit, quod est absurdum. ergo EF non est vnitas. quare numerus sit necesse est. & quoniam vt AC ad AB, ita est EF ad G, erit & vt quadratum ex AC ad quadratum ex A B, ita quadratus ex EF ad eum, qui fit ex G quadratum. duplum autem est quadratum ex CA quadrati ex AB: ergo & quadratus ex EF quadrati ex G est duplus: ac propterea quadratus ex EF par est, & ipse EF par. si enim esset impar, & qui fit ab ipso quadratus impar esset, quoniam si impares numeri quomodocumque componantur, multitudo autem ipsorum sit impar; & totus impar erit. ergo EF est par. secetur bifariam in H. & quoniam numeri EF, G minimi sunt eorum, qui eandem habent proportionem, inter se primi sunt: & est EF par. impar igitur est G: si enim esset par, numeros EF, G binarius metiretur; omnis enim par dimidiam partem habet: atqui primi inter se sunt. quod fieri non potest. non igitur G est impar. ergo par. & quoniam FE duplus est ipsius EH, erit quadratus ex FE quadrati ex EH quadruplus. est autem G quadratus ex EF duplus quadrati ex G. duplus igitur est quadratus ex G quadrati ex EH. ideoq; par est qui fit ex G quadratus. & ex iam dictis ipse G est par; sed & impar. quod fieri non potest. non igitur AC communisurabilis est ipsi AB longitudine. ergo est incommensurabilis.

A L I T E R. Sed & aliter ostendendum est incommensurabile esse quadrati diametrum ipsius latere. sit enim pro diametro quidem A, pro latere autem B. Dico A ipsi B longitudine incommensurabilem esse. si enim fieri potest, sit communisurabilis. & rursus fiat vt A ad B, ita EF numerus ad ipsum G: sintq; minimi eorum, qui eandem habent proportionem. ergo EF, G primi inter se sunt. Dico primum, G non esse vnitatem. si enim fieri potest, sit G vnitas. & quoniam est vt A ad B, ita EF ad G, erit & vt quadratum ex A ad quadratum ex B, ita quadratus ex EF ad eum, qui fit ex G quadratum: duplum autem est quadratum ex A quadrati ex B. ergo & quadratus ex EF quadrati ex G est duplus: atq; est G vnitas. binarius igitur est quadratus ex EF. quod fieri non potest. ergo G non est vnitas. numerus igitur. & quoniam est vt quadratum ex A ad quadratum ex B, ita quadratus ex EF ad quadratum ex G. & conuertendo vt quadratum ex B ad quadratum ex A, ita quadratus ex G ad quadratum ex EF. sed quadratum ex B metitur quadratum ex A. ergo & qui fit ex G quadratus metitur eum, qui fit ex EF; & propterea latus G ipsum EF latus metitur. metitur autem & se ipsum. ergo G numeros EF, G metitur, primos inter se existentes. quod fieri minime potest. non igitur A ipsi B longitudine est communisurabilis. quare incommensurabilis sit necesse est.

Itaque inuentis longitudine incommensurabilibus rectis lineis, vt AB, inuenientur & alię quam plurimę magnitudines ex duabus dimensionibus. nimirum superficies incommensurabiles inter se. si enim ipsarum AB mediam proportionalem sumamus rectam lineam C, erit vt A ad B, ita figura, quę fit ex A ad eam, quę ex C similem, & similiter descriptam, siue quadrata, siue alia rectilinea similia, siue circuli, qui circa diametros AC describantur. quando quidem circuli inter se sunt, vt diametrorum quadrata. Inuenta igitur sunt spacia plana inter se incommensurabilia. ostensis autem his ostendemus etiam ex solidis

rum contemplatione ipsa solida esse commensurabilia, & incommensurabilia inter se. nam si in quadratis ex AB, vel in rectilincis, quæ ipsis æqualia sint solida æque alta constituamus, siue parallelepipeda, siue pyramides, siue prismata, erunt ea inter se, uti bases. & si quidem bases commensurabiles sint, erunt solida commensurabilia; si vero incommensurabiles, & ipsa incommensurabilia erunt. sed & duobus circulis existentibus AB, si in ipsis conos æque altos, siue Cylindros constituamus, erunt inter se, uti ipsorum bases, hoc est ut AB circuli, & si quidem circuli commensurabiles sint, commensurabiles erunt & coni inter se se, & Cylindri; si vero incommensurabiles, & coni, & Cylindri incommensurabiles erunt. ex quibus perspicuum est non solum in lineis, & superficiebus esse commensurabilitatem, & incommensurabilitatem, sed & in solidis figuris.

F. C. COMMENTARIUS.

Manifestum est quadratum ex AC duplum esse quadrati ex AB] Ex 47 primi. A
Habebit AC ad AB proportionem eam, quam numerus habet ad numerum] Ex 5. huius. B

Et quoniam ut AC ad AB, ita est EF ad G, erit & ut quadratum ex AC ad quadratum ex AB, ita quadratus ex EF ad eum, qui fit ex G quadratum] Quoniam enim est ut AC ad AB, ita EF ad G, erit et ut proportio AC ad AB duplicata, ita proportio EF ad G duplicata. sed ut proportio quidem AC ad AB duplicata, ita est quadratum ex AC ad quadratum ex AB ex corollario secundo 20. sexti; ut autem proportio EF ad G duplicata, ita est quadratum ex EF ad quadratum, ex G ex 11 octavi. ergo ex 11 quinti ut quadratum ex AC ad quadratum ex AB, ita erit quadratus ex EF ad eum, qui fit ex G quadratum.

Quoniam si impares numeri quomodocunque componantur, multitudo autem ipsorum sit impar, & totum impar erit] Ex 23 noni. sequitur enim hoc ex 29 eiusdem. D

Inter se primi sunt] Ex 24 septimi.

Erit quadratus ex FE quadrati ex EH quadruplus] Ex 11 octavi.

Duplus igitur est quadratus ex G quadrati ex EH] Proportio enim quadrati ex FE ad quadratum ex EH, interiecto quadrato ex G, composita est ex proportionibus quadrati ex FE ad quadratum ex G, & proportionibus quadrati ex G ad quadratum ex EH. sed proportio quadrati ex FE ad quadratum ex EH est quadrupla: proportio autem quadrati ex FE ad quadratum ex G est dupla. ergo & proportio quadrati ex G ad quadratum ex EH dupla erit.

Ideoq; par est, qui fit ex G quadratus] Quoniam enim quadratus ex G duplus est quadrati ex EH, partem habet dimidiam, quare par necessario erit.

Et ex iam dictis ipse G est par] Si enim sit impar, & quadratus ex ipso impar est ex 29 noni. sed & par. quod fieri non potest.

Et propterea latus G ipsum EF latus metitur] Ex 14 octavi.

Erit ut A ad B, ita figura, quæ fit ex A ad eam, quæ ex C similem, & similiter descriptam] Ex corollario secundo vigesimæ sexti.

Quandoquidem circuli inter se sunt, ut diametrorum quadrata] Ostenditur id in se summa propositione duodecimi libri. unde colligi potest hac siue sint Euclidis, siue alterius alieno loco posita esse.

Nam si in quadratis ex AB, vel in rectilincis, quæ ipsis æqualia sint, solida æque alta constituamus, siue parallelepipeda, siue pyramides, siue prismata, erunt ea inter se uti bases] Ex 32 undecimi, & ex 5. & 6. duodecimi.

Sed & duobus circulis existentibus AB, si in ipsis conos æque altos, siue Cylindros constituamus, erunt inter se, uti ipsorum bases] Ex 11. duodecimi.

S C H O L I U M.

Antiqui planorum cognitionem à scientia solidorum distinxerunt, et nem illam geometriam appellarunt, ut etiam Plato ostendit in politicis, hanc autem stereometriam. At vero Iuniores cum utriusque scientiæ communis sit cognitio, quæ circa magnitudines versatur, etiam communi nomine geometriam dixerunt, eas uelut unam coniungentes. Et quemadmodum in planis alia quidem erant rectilinea, alia uero circularia, & alia mixta, ut helices, ita in solidis, alia constant ex planis rectilineis, alia ex sphaericis, alia ex mixtis, ut cylindrus & conus. Et sphaerica quidem ad terminum & finem pertinent, rectilinea uero, uel quæ ex rectilineis sunt ad infinitum; mixta ad id, quod occultum est. & si aliquod est corpus, hoc & solidum est, non autem contra, ut in ijs, quæ dicta sunt: hæc enim imaginabilia sunt solida, non autem typæ, hoc est dura, & resistentia.

E V C L I D I S E L E M E N T O R V M

LIBER VNDECIMVS

ET SOLIDORVM PRIMVS.

CVM SCHOLIIS ANTIQVIS

ET COMMENTARIIS.

Federici Commandini Vrbinatis.

DIFFINITIONES

I.

SOLIDVM est, quod longitudinem, latitudinem, & crassitudinem habet.

II.

Solidi terminus est superficies.

III.

Recta linea ad planum recta est, quando ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt, & in subiecto sunt plano rectos angulos efficit.

SCHOLIUM.

Si posset planum in rectas lineas resolui, ita dixisset: Quando ad omnes rectas lineas, ex quibus planum constat, rectos facit angulos, tunc & ad ipsum recta erit. Sed quoniam planum etiam infinite rectis lineis sectum in ipsas non resoluitur, contentus fuit linearum infinitate pro toto plano contingentes autem addit, ut non parallele sint.

F. C. COMMENTARIIS.

Sit recta linea AB ad subiectum planum $CDEF$ perpendicularis, siue recta, & a puncto B ducantur quorunque rectae lineae in eodẽ plano BC BD BE BF erunt anguli CBA DBA EBA FBA recti. Quod si anguli CBA DBA EBA FBA recti sint, dicemus rectam lineam AB ad subiectum planum $CDEF$ perpendicularem, siue rectam esse.

Bbb Planum

Planum ad planum rectum est, quando communi planorum sectioni ad rectos angulos ductæ rectæ lineæ in vno plano, alteri plano ad rectos angulos fuerint.

F. C. COMMENTARIUS.

Sit planum $ABCD$ ad planum $BEFC$ rectum, sitq; eorū cōis sectio BC , & in plano $BEFC$ ducatur recta. linea GH perpendicularis ad ipsā BC . erit recta linea GH ad planū $ABCD$ perpendicularis, siue recta. At si recta GH , vel planū $ABCD$ perpendicularis sit, siue recta, erit ea ad BC cōem duorū planorū sectionē perpendicularis. Et similiter cōinget, si in alio plano ducatur KH perpendicularis ad ipsā BC . ponatur autē nūc cōem duorū planorū sectionē recta lineæ esse, quod in sequentibus demonstrabitur.

Rectæ lineæ ad planum inclinatio est, quando à sublimi termino lineæ ad planum perpendiculari acta, à puncto facto ad terminum lineæ, qui est in plano, recta linea ducta fuerit, angulus acutus, qui ducta linea & stante continetur.

F. C. COMMENTARIUS.

Sit recta linea AB inclinata ad subiectum planū $CDEF$: atque à puncto sublimi A ad idem planum perpendicularis ducatur AG , & BG iungatur. erit angulus ABG acutus, rectæ lineæ AB ad planum $CDEF$ inclinatio.

V I.

Plani ad planum inclinatio est angulus acutus rectis lineis cōtentus, quæ ad rectos angulos communi planorum sectioni ad vnum ipsius punctum in vtroque planorum ducuntur.

F. C. COMMENTARIUS.

Sint duo plana inter se inclinata $ABCD$ $EADF$, quorum cōmunis sectio AD , & sumpto in ipsā AD quouis puncto G ab eo ad rectos angulos in vtroque plano ducantur GH GK , erit angulus HGK inclinatio plani $ABCD$ ad $EADF$ planum.

V I I.

Planum ad planum similiter inclinari dicitur, & alterum ad alterum, quando dicti inclinationum anguli inter se fuerint æquales.

F. C.

Sint duo plana inter se inclinata $ABCD$ $EADF$,
de quibus proxime dictum est: sint & alia duo plana
inclinata $LMNO$ $PLOQ$, quorum inclinatio angu-
lus SRT : & sint anguli HGK SRT æquales. dice-
ris planum $ABCD$ ad planum $EADF$ similiter in-
clinationem, atque planum $LMNO$ ad planum $PLOQ$.

VIII.

Plana parallela sunt, quæ inter se non conueniunt.

IX.

Similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis multitudine æ-
qualibus continentur.

Æquales & similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis
multitudine & magnitudine æqualibus continentur.

XI.

Solidus angulus est, plurium, quàm duarum linearum, quæ se se
contingant, & non in eadem sint superficie, ad omnes lineas incli-
natio. vel solidus angulus est, qui pluribus, quàm duobus planis
angulis comprehenditur, non existentibus in eodem plano, & ad
vnum punctum constitutis.

SCHEMATA.

Euclides quidem in inclinatione angulum vult esse: Stoici vero di-
cunt inclinationem esse angulum, sed recte Euclides. omnis enim an-
gulus magnitudinum inclinatio est ad vnum punctum. hæc autem dif-
finitio imperfecta est. angulus enim quartæ partis sphaeræ pluribus qui-
dem, quàm duabus superficiebus comprehenditur, sed non planis: &
dimidius conus ad verticem angulum solidum non efficit. nam si is est
angulus: & conus uertex angulus erit. quare & ex duabus superficiebus
& ex vna solidus angulus constabit. quod quidem verum est. melius
igitur erit solidum angulum diffinire, inclinationem magnitudinis, vel
magnitudinum ad vnum punctum.

XII.

Pyramis est figura solida planis comprehensa, quæ ab vno
plano ad vnum punctum constituitur.

Prisma est figura solida planis comprehensa, quorum duo, quæ opponuntur æqualia, & similia & parallela sunt; reliqua vero parallelogramma.

F. C. COMMENTARIUS.

Prismata dicuntur non solum, quæ bases habent triangulares, ut opinatur Campanus, qui ea corpora seratilia appellat, sed quæcumque plana, quæ opponuntur, siue triangula, siue quadrilatera, siue pentagona, siue plurilatera, & æqualia, & similia habent, reliqua vero parallelogramma, quod ex ijs, quæ tum in hoc libro, tum in sequenti traduntur, manifestissime apparet. Alia autem prismata Campanus improprie columnas lateatas vocat, quemadmodum & conos, pyramides rotundas, & cylindros columnas rotundas.

XIII.

Sphæra est figura comprehensa, quando circa manentem diametrum semicirculus conuersus restituitur, rursus in eundem locum, à quo moueri cœpit.

XV.

Axis sphæræ est recta linea manens, circa quam semicirculus conuertitur.

XVI.

Centrum sphæræ est idem, quod & semicirculi centrum.

XVII.

Diameter sphæræ est recta linea quædam per centrum ducta, & ex utraque parte à superficie sphæræ terminata.

XVIII.

Conus est comprehensa figura, quando orthogonij trianguli manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum sunt, triangulum conuertatur, quoad rursus in eundem restituitur locum, à quo moueri cœpit. & si quidem manens recta linea equalis fuerit reliquo lateri, quod circa rectum angulum conuertitur, conus orthogonius erit; si vero minor, amblygonius; & si maior, oxigonius.

XIX.

Axis coni est recta linea manens, circa quam triangulum conuertitur.

Basis

Basis vero circulus à conuerſa recta linea deſcriptus.

S C H O L I U M.

Oſtendendum quomodo conus orthogonius ſit, vel angulum rectum à Verticem habeat.

Exponatur triangulum orthogonium ABC rectū habens ABC angulum; & rectam lineam BC rectę A B æqualem. Dico ad punctum A rectum angulum conſtitui. producat enim CB vſque ad D: ponaturq; B D ipſi CB æqualis, & AD iungatur. Itaque quoniam AB eſt æqualis BC, erit & angulus BCA angulo BAC æqualis, & vterque ipſorum dimidijs recti, quod rectus ponatur ABC: Eadem ratione & BAD eſt recti dimidijs. totus igitur DAC angulus rectus eſt; & idcirco conus circa ABC deſcriptus eſt orthogonius; nimirū recta linea AB manente: & circumducta AC quoad in eūdem locum reſtituat, à quo moueri cœpit. circumductis igitur AC & CB, manente autem AB neceſſe eſt in conuerſione rectam lineam AC congruere rectę AD, cum CB ipſi BD ſit æqualis: & circulus à puncto C deſcriptus baſis erit con, qui à triangulo ABC conſtituitur, & eius circuli diameter erit baſis trianguli ADC, rectum habentis DAC angulum. Quod ſi conus à vertice A ad baſim vſque biſariam diuidatur, portionum ſuperficies non aliud erunt, niſi triangulum ADC, quod eſt orthogonium. quare & conus orthogonius erit. ſi vero angulus BAC ſit maior dimidio recti, erit ob eandem cauſam angulus quoque DAB dimidio recti maior, & DAC maior recto, videlicet obtuſus; & conus ambliگونius erit, vel ad verticem angulum obtuſum habebit. ſi denique BC ſit minor, quàm AB, erit angulus BAC minor dimidio recti. ergo ex ijs, quę oſtenſa ſunt, DAC angulus recto minor, hoc eſt acutus, & conus oxyگونius erit.

F. C. COMMENTARIUS.

Euclides conos, & cylindros duntaxat rectos diſſiniuit, vel potius eorum ortum tradidit, nobis vero omnium vniuerſe ex Apollonio, Serenoq; ortum explicare viſum eſt.

EX APOLLONIO.

Si ab aliquo puncto ad circumferentiam circuli, qui non ſit in eodem plano, in quo punctum, coniuñcta recta linea in vtramque partem producat, & manente puncto conuertatur circa circuli circumferentiã, quouſque ad eum locum redeat, à quo capit moueri, ſuperficiem à recta linea deſcriptam, conſtatemque ex duabus ſuperficiebus, ad verticem interſe aptatis, quarum vtraque in infinitum augetur, nimirum recta linea, quę eam deſcribit in infinitum producta, uoco Conicam ſuperficiem, Verticem ipſus manens punctum, Axem rectam lineam, quę per punctum, et centrum circuli ducitur: Conum autem uoco figuram contentam circulo

Et conica superficie, quæ inter verticem, & circuli circumferentiam interijcitur. Verticem conij punctum, quod et superficie conicæ vertex est. Axem rectam lineam, quæ à vertice ad circuli centrum perducitur. Basim circulum ipsū.

Conorū rectos quidē voco, qui axes habēt ad rectos angulos ipsis basibus. Scalenos vero, qui non ad rectos angulos ipsis basibus axes habēt.

Quem locum explicans Eutocius ita scribit.

Sit circulus $A B$, cuius centrum C : & punctum aliquod sublime D : in illa quæ $D B$ in infinitum ex utraque parte producatū ad puncta $E F$. Si igitur recta linea $D B$ feratur eo usque in circuli $A B$ circumferentia, quousque punctum B rursus in eum locum restituatur, à quo cepit moveri: describet superficiem quandam, quæ quidem constat ex duabus superficiebus, ad D punctum se se tangentibus. eam voco conicam superficiem; quæ & augetur in infinitum, cum recta linea $D B$, ipsā describens in infinitum producatū. verticem superficiei dicit punctum D ; axem, rectam $D C$. eorum vero appellat figuram cōtentam circulo $A B$, & ea superficie, quam $D B$ sola describit: conij verticem punctum D : axē $D C$: & basim, $A B$ circulum. At si $D C$ ad circulum, fuerit perpendicularis, rectum vocat conum; sin minus, scalenum.

Describetur autem conus scalenus, quando à centro circuli linea erigatur, quæ non sit perpendicularis ad circuli planum: à puncto vero lineæ, quod est in sublimi ad circuli circumferentiam recta linea ducatur: & manente puncto circa ipsam conuertatur: comprehensa etenim figura conus erit scalenus. constat igitur lineam circumductam in conuersione quandoque maiorem; quandoque minorem, & quandoque æqualem fieri, ad aliud atque aliud circuli punctum.

XX I.

Cylindrus est comprehensa figura, quando orthogonij parallelogrammi manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum sunt, parallelogrammum conuertatur, quousque rursus restitatur in eundem locum, à quo moveri cœpit.

XX II.

Axis Cylindri est manens recta linea, circa quam parallelogrammum conuertitur.

XX III.

Basis autem, circuli, qui à duobus e regione lateribus conuersis describuntur.

Sit parallelogrammum rectangulum $ABCD$, & latere AB manente intelligatur latus CD conuerui, quousq; ad eum locum redeat, à quo caput moueri. erit ita descripta figura, cuius axis est AB recta linea manens, & basis circuli ipsi à punctis CD circa contra BA descripti.

EX SEREKO.

Si duorum circulorum equalium, & parallelorū diametri semper inter se se parallelæ, & ipsa in circulorum planis circa manens centrum circumferandur, & una circumferatur recta linea diametrorū terminos ex eadem parte coniungens, quousque rursus in eum locum restituatur, à quo moueri icæpit: superficies, quæ à circumlata recta linea describitur, Cylindrica superficies vocetur; quæ quidem & in infinitum augeri potest, recta linea describente in infinitum producta. Cylindrus, figura, quæ circulis parallelis, & Cylindrica superficie inter ipsos interiecta continetur. Cylindri bases circuli ipsi. Axis recta linea, quæ per circulorum centra ducitur. latus autem Cylindri linea, quæ cum recta sit, & in superficie ipsius Cylindri, bases utrasque contingit: quam & circumlatam describere superficie Cylindri antea diximus. Cylindrorum recti quidem dicuntur, qui axem habent ad rectos angulos existentem ipsis basibus. Scaleni autem, qui non ad rectos angulos existentem ipsis basibus axem habent.

XXIII.

Similes conī, & Cylindri sunt, quorum, & axes, & basium diametri eandem inter se proportionem habent.

F. C. COMMENTARIUS.

Similes conos & Cylindros omnes tum rectos, tum scalenos hoc modo diffiniemus.

Similes conī, & Cylindri sunt, quando per axes ductis planis ad rectos angulos basibus, communes sectiones eorum & basium cum axibus æquales angulos continentes, eandem inter se, quam axes, proportionem habent.

XXV.

Cubus est figura solida, sex quadratis æqualibus contenta.

XXVI.

Tetraedrum est figura solida quattuor triangulis æqualibus & æquilateris comprehensa.

Octaedrum

Octaedrum est figura solida octo triangulis æqualibus & æquilateris comprehensa.

XXVIII.

Dodecaedrum est figura solida, quæ duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris, & equiangulis continetur.

XXIX.

Icosaedrum est figura solida, quæ viginti triangulis æqualibus, & æquilateris comprehenditur.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

Rectæ lineæ pars quædam non est in subiecto plano, quædam vero in sublimi.

- A Si enim fieri potest rectæ lineæ AB pars quidem AB sit in subiecto plano, pars vero BC in sublimi. erit utique recta linea quædam ipsi A B in directum continuata in subiecto plano. sitq; BD. duabus igitur datis rectis lineis AB C' ABD communis portio est AB, quod fieri non potest; recta enim linea cum recta linea non convenit in pluribus punctis, quam vno.
- B alioqui rectæ lineæ sibi ipsis congruēt. non igitur rectæ lineæ pars quædam est in subiecto plano, quædam vero in sublimi.

SCHOLIUM.

- A Duabus igitur datis rectis lineis ABC ABD communis portio est AB, quod fieri non potest. Duabus enim rectis lineis non est communis portio. si enim fieri potest, sit duabus rectis lineis ABC ABD communis portio AB; & sumatur in recta linea ABC centrum quidem B; internullum vero BA, & circulus AEF describatur. Quoniam igitur punctum B centrum est circuli AEF, & per B ducta est quædam recta linea ABC, erit AEF circuli diameter. BC. diameter autem circulum bisariam secat. ergo AEC semicirculus est. Rursus quoniam B centrum est AEF circuli, & per B recta linea quædam ducta est ABD, erit ABD circuli AEF diameter. ostensa autem est & ABC diameter eiusdem circuli, & semicirculi eiusdem circuli sunt æquales inter se. ergo AEC semicirculus semicirculo AED est æqualis, minor maiori, quod fieri non potest. non igitur duabus rectis lineis communis portio est, sed differens; ac propterea neque fieri potest, ut terminatae rectæ lineæ alia recta linea in directum continuata sit ex his, quæ ante ostensa sunt; quoniam duabus rectis lineis communis portio non est recta linea.
- B Alioqui rectæ lineæ sibi ipsis congruēt. Manifestum est congruentibus rectis lineis, & earum fines inter se congruere. si autem hoc, duæ rectæ lineæ eosdem fines habentes, spaciū cōtinebunt. quod fieri non potest.

THEO-

THEOREMA II. PROPOSITIO. II.

Si duę rectę lineę se inuicem secent, in vno sunt plano, & omne triangulum in vno plano consistit.

Duę enim rectę lineę AB CD se inuicem in puncto E secant. Dico ipsas AB CD in vno esse plano, & omne triangulum in vno plano consistere. Sumantur enim in ipsis EB EC quauis puncta FG; iunganturq; CB FG, & FH GK ducantur. Dico primum EBC triangulum consistere in vno plano. Si enim in trianguli EBC pars quidem FHC, vel GBK in subiecto plano est, reliqua vero in alio plano; erit & vnius linearum EB EC pars in subiecto plano, & pars in alio. Quod si trianguli ECB pars FG BG sit in subiecto plano, reliqua vero in alio, vtrariq; rectarum linearum EC EB quędam pars erit in subiecto plano, quędam vero in alio. quod absurdū esse ostendimus. Triangulum igitur EBC in vno est plano. in quo autem plano est BCE triangulum, in hoc est vtraque ipsarum EC EB; in quo autem vtraque ipsarum EC EB, in hoc & AB CD. ergo rectę lineę AB CD in vno sunt plano, & omne triangulum in vno plano consistit.

S C H O L I U M.

Propositum est ostendere rectas lineas, quę se mutuo secant in vno plano esse. quoniam autem hoc per triangulum ostenditur, illud apposuit, & omne triangulum in vno plano consistit.

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

Si duo plana se inuicem secant, cōmunis ipsorum sectio recta linea erit.

Duo enim plana AB BC se inuicem secant, communis autem ipsorum sectio sit DB lineā. Dico lineam DB rectam esse. si enim non ita sit, ducatur à puncto D ad B in plano quidem AB recta linea DEB; in plano autem BC recta linea DFB. erunt vtrique duarum rectarū linearum DEB DFB iidem termini, & ipse spaciū cōtinebunt, quod est absurdum. non igitur DEB DFB rectę lineę sunt. Similiter ostendemus neque aliam quāpiam, quę à puncto D ad B ducitur rectam esse, præter ipsam DB, communem scilicet planorū AB BC sectionem. si igitur duo plana se inuicem secant, communis ipsorum sectio recta linea erit.

THEOREMA IIII. PROPOSITIO IIII.

Si recta linea duabus rectis lineis se inuicem secantibus in cōmuni sectione ad rectos angulos insistat, etiā ducto per ipsas plano ad rectos angulos erit.

Recta enim linea quędam EF duabus rectis lineis AB CD se inuicem secantibus in puncto, ab ipso E ad rectos angulos insistat. Dico EF etiam plano, per AB, CD ducto

4. primi.

26. primi.

4. primi.

3. primi.

4. primi.

3. diffi.

ducto ad rectos angulos esse. sumantur enim rectæ lineæ AE EB CE ED inter se æquales: perq; E ducatur recta linea GEH utcumque, & iungantur A D CB; deinde à quouis puncto F ducantur FA FG FD FC FH FB. Et quoniam duæ rectæ lineæ A E ED duabus rectis lineis CE EB æquales sunt, & angulos æquales continent, erit AD basis basi CB æqualis, & triangulum AED triangulo CEB æquale. ergo & angulus DAE æqualis est angulo ECB. est aut & angulus AEG æqualis angulo BEH. Duo igitur triangula sunt AGE BEH duos angulos duobus angulis æquales habetia, alterū alteri; & unū latus AE vni lateri EB æquale. quod est ad æquales angulos. quare & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebūt, ergo GE quidem est æqualis EH; AG vero ipsi BH. Quod cum AE sit æqualis EB, communis autem & ad rectos angulos FE; erit basis AF basi FB æqualis. Eadem quoq; ratione & CF æqualis erit FD. Præterea quoniam AD est æqualis CB, & AF ipsi FB; erunt duæ FA AD duabus FB BC æquales, altera alteri; & ostensa est basis DF æqualis basi FC. angulus igitur FAD angulo FBC est æqualis. Rursus ostensa est AG æqualis BH. sed & AF ipsi FB est æqualis. duæ igitur FA AG duabus FB BH æquales sunt, & angulus FAG æqualis est angulo FBH, ut demonstratum fuit. basis igitur GF basi FH est æqualis. Rursus quoniam GE ostensa est æqualis EH, communis autem FE; erunt duæ GE EF æquales duabus HE EF; & basis HF est æqualis basi FG. angulus igitur GEF angulo HEF est æqualis, & idcirco rectus est uterque angulorum GEF HEF. ergo FE ad GH utcumque per E ductam rectos efficit angulos. Similiter ostendemus FE etiam ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt, & in subiecto sunt plano, rectos angulos efficere. recta autē ad planum recta est, quando ad omnes rectas lineas ipsam contingentes, & in eodem existentes plano rectos efficit angulos. quare FE subiecto plano ad rectos angulos insistit. at subiectum planum est quod per AB CD rectas lineas ducitur. ergo FE ad rectos angulos erit ducto per AB CD plano. Si igitur recta linea duabus rectis lineis se inuicem secantibus in communi sectione ad rectos angulos insistat, etiam ducto per ipsas plano ad rectos angulos erit.

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

Si recta linea tribus rectis lineis se se tangentibus in communi sectione ad rectos angulos insistat, tres illæ rectæ lineæ in vno plano erunt.

3 huius.

Ex anteceden-
te.

3. diffi.

Recta enim linea quædam AB tribus rectis lineis BC BD BE in contactu B ad rectos angulos insistat. Dico BC BD BE in vno plano esse. non enim, sed si fieri potest, sint BD BE quidē in subiecto plano, BC vero in sublimi, & planum per AB BC producat. communē utique sectionem in subiecto plano faciet rectam lineam. faciat EF. in vno igitur sunt plano per AB BC ducto tres rectæ lineæ AB BC BF. & quoniam AB utrique ipsarum BD BE ad rectos angulos insistit, & ducto per ipsas DB BE plano ad rectos angulos erit. planum autem DB BE est subiectum planum. ergo A B ad subiectum planum recta est. quare & ad omnes rectas lineas ipsam contingentes,

res, quæ in eodem plano sunt, rectos faciet angulo; sed ipsam tangit BF in subiecto existens plano. ergo angulus ABF rectus est. ponitur autem & ABC angulus rectus. equalis igitur est angulus ABF angulo ABC, & in eodem sunt plano; quod fieri non potest. recta igitur linea BC non est in plano sublimi. quare tres rectæ lineæ BC, BD, BE in vno sunt plano. Si igitur recta linea tribus rectis lineis se se tangentibus in cōmuni sectione ad rectos angulos insitit, tres illæ rectæ lineæ in vno plano erunt.

THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

Si duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos angulos fuerint, illæ inter se se parallelæ erunt.

Duæ enim rectæ lineæ AB, CD subiecto plano sint ad rectos angulos. Dico AB ipsi CD parallelam esse. occurrant enim subiecto plano in punctis BD, iungaturq; BD recta linea, cui ad rectos angulos in subiecto plano ducatur DE, & posita DE ipsi AB equali, iungantur BE, AE, AD. Quoniam igitur AB recta est ad subiectum planum, & ad omnes rectas lineas, quæ ipsam cōtingunt, & in subiecto sunt plano, rectos angulos efficiet. contingit autem AB vtraque ipsarum BD, BE existens in subiecto plano. ergo vterque angulorum ABD, ABE rectus est. Eadem ratione rectus etiam est vterque ipsorum CDB, CDE. & quoniam AB equalis est ipsi DE, cōmunis autem BD, erunt duæ AB, BD duabus ED, DB æquales, & rectos angulos continent. basis igitur AD basi BE est æqualis. rursus quoniam AB est æqualis DE, & AD ipsi BE, duæ AB, BE duabus ED, DA æquales sunt, & basis ipsarum AE communis. ergo angulus ABE angulo EDA est equalis. sed ABE rectus est. rectus igitur & EDA; & idcirco ED ad DA est perpendicularis. sed & perpendicularis est ad vtramque ipsarum BD, DC. quare ED tribus rectis lineis BD, DA, DC in contactu ad rectos insitit angulos. tres igitur rectæ lineæ BD, DA, DC in vno sunt plano. in quo autem sunt BD, DA, in hoc & AB: omne enim triangulum in vno est plano. ergo AB, BD, DC in vno plano sint necesse est, atque est vterque angulorum ABD, BDC rectus. parallela igitur est AB ipsi CD. quare si duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos angulos fuerint, illæ inter se se parallelæ erunt.

Diff. 9.

4. primi.

8. primi.

Ex antec.

denic.

1. huius.

28. primi.

THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

Si duæ rectæ lineæ parallelæ sint, sumantur autem in vtraque ipsarum quælibet puncta; quæ dicta puncta coniungit recta linea in eodem erit plano, in quo & parallelæ.

Sint duæ rectæ lineæ parallelæ AB, CD, & in vtraque ipsarum sumantur quælibet puncta EF. Dico rectam lineam quæ puncta E, F cōiungit, in eodem plano esse, in quo sunt parallelæ. non enim, sed si fieri potest, sit in sublimi, vt EGF, & per EGF planū ducatur, quod in subiecto plano sectionem faciet, rectam lineam. faciat vt EF. ergo duæ rectæ lineæ EGF, EF spaciū continebunt, quod fieri non potest. non igitur quæ à puncto E ad F ducitur recta linea in sublimi est plano, quare erit in eo, quod per AB, CD parallelas transit. si igitur duæ rectæ lineæ parallelæ sint, & reliqua, quæ sequuntur. quod oportebat demonstrare.

3. huius.

10. com. no. primi libri.

EVCLID. ELEMENT.
THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

Si duę rectę lineę parallele sunt, altera autem ipfarum plano ali cui sit ad rectos angulos; & reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

Ex antecede-
nte.

3. diffi.

29. prim.

4. primi.

3. primi.

4. huius.
3. diffi.

2. huius.

4. huius.

Sint duę rectę lineę parallele AB CD , & altera ipfarum AB subiecto plano sit ad rectos angulos. Dico & reliquam CD eidem plano ad rectos angulos esse. occurrat enim AB CD subiecto plano in punctis BD , & BD iungatur. ergo A B CD BD in vno sunt plano. Ducatur ipsi BD ad rectos angulos in subiecto plano DE : & ponatur DE ipsi AB æqualis: iunganturq; BE AE AD . Et quoniam AB perpendicularis est ad subiectum planum, & ad omnes rectas lineas, quę ipsam contingunt, suntq; in subiecto plano, perpendicularis erit. rectus igitur est vterque angulorum ABD ABE . Quod cū in parallelas rectas lineas AB CD incidat BD , erūt anguli ABD CDB duobus rectis æquales. rectus autem est ABD . ergo & CDB est rectus; ac propterea CD perpendicularis est ad BD . Et quoniam AB est æqualis DE , communis autem BD , duę AB BD duabus ED DB æquales sunt; & angulus ABD est æqualis angulo EDB , rectus enim vterq; est. basis igitur AD basi BE est æqualis. Rursus quoniam AB æqualis est DE , & BE ipsi AD ; erunt duę AB BE duabus ED DA æquales, altera alteris; & basis earum communis AE . quare angulus ABE est æqualis angulo EDA . rectus autem est ABE . ergo & EDA est rectus, & ED ad DA perpendicularis. sed & perpendicularis est ad BD . ergo ED est ad planum per BD DA perpendicularis erit, & ad omnes rectas lineas, quę in eodem existentes plano ipsā contingunt, rectos faciet angulos. At in plano per BA AD est DC , quoniam in plano per BD DA sunt AB BD : in quo autem sunt AB BD in eodem est ipsa DC . quare ED ipsi DC est ad rectos angulos; ideoq; CD ad rectos angulos est ipsi DE . sed & CD ipsi DB . ergo CD duabus rectis lineis DE DB se mutuo secantibus in cōmuni sectione D ad rectos angulos insistit; ac propterea plano per DE DB est ad rectos angulos. planum autem per DE DB est subiectum planum. ergo CD subiecto plano ad rectos angulos erit.

THEOREMA IX. PROPOSITIO IX.

Quę eidem rectę lineę sunt parallele, non existentes in eodem, in quo ipsa plano; etiam inter se parallele erunt.

4. huius.
Ex antecede-
nte.

6. huius.

Sit enim vtręque ipfarum AB CD parallela ipsi EF , non existentes in eodem, in quo ipsa plano. Dico AB ipsi CD parallelā esse. sumatur in EF quodvis punctum G , a quo ipsi EF in plano quidem per EF AB transeunte ad rectos angulos ducatur GH ; in plano autem transeunte per FE CD rursus ducatur ipsi EF ad rectos angulos GK . Et quoniam EF ad vtramque ipfarum CH GK est perpendicularis, erit EF etiam ad rectos angulos plano per GH GK transeunte. atque est EF ipsi AB parallela. ergo & AB plano per HGK ad rectos angulos est. eadem ratione & CD plano per HGK est ad rectos angulos. vtręq; igitur ipfarum AB CD plano per HGK ad rectos angulos erit: Si autem duę rectę lineę eidem plano ad rectos angulos fuerint, parallele erunt inter se se. ergo AB ipsi CD est parallela.

THEO-

THEOREMA X. PROPOSITIO. X.

Si duæ rectæ lineæ se se contingentes duabus rectis lineis se se contingentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano; æquales angulos continebunt.

Duæ enim rectæ lineæ se se contingentes AB BC duabus rectis lineis DE EF se se contingentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano. Dico angulum ABC angulo DEF æqualem esse. Assumentur enim BA BC ED EF inter se æquales: & iungantur AD CF BE AC DF. Quoniam igitur BA ipsi ED æqualis est & parallelæ, erit & AD æqualis & parallelæ ipsi BE. Eadē ratione & CF ipsi BE æqualis & parallelæ erit. Vtraque igitur ipsarum AD CF ipsi BE æqualis est & parallelæ. Quæ autem eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, nō existentes in eodem, in quo ipsa plano; & inter se parallelæ erūt. ergo AD parallelæ est ipsi CF, & æqualis. atque ipsas coniungunt AC DF. & AC igitur ipsi DF æqualis est & parallelæ. & quoniā duæ rectæ lineæ AB BC duabus DE EF æquales sunt, & basis AC est æqualis basi DF; erit angulus ABC angulo DEF æqualis. si igitur duæ rectæ lineæ se se contingentes duabus rectis lineis se se contingentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano; æquales angulos continebunt. quod oportebat demonstrare.

32. primi.

Ex antecedente.

33. primi.

8. primi.

S C H O L I U M.

CONVERSUM. Si fuerint duo anguli æquales, contenti rectis lineis in eodem plano non existentibus, & earum una parallelæ sit uni continentium æqualem angulum; & reliqua reliquæ parallelæ erit.

F. C. COMMENTARIUS.

Sint duo anguli æquales ABC DEF: & rectæ lineæ AB BC angulum ABC continentes nō sint in eodem plano, in quo DEF. sit autem DE parallelæ ipsi AB. Dico & EF ipsi BC parallelam esse. Si enim nō est EF parallelæ ipsi BC, erit alia ipsi parallelæ, sit EG. Itaque quoniam duæ rectæ lineæ se se contingentes AB BC duabus rectis lineis se se contingentibus DE EG sunt parallelæ, nō autem in eodem plano; æquales angulos continebunt. ergo angulus DEG angulo ABC est æqualis. Sed et angulus DEF ponitur æqualis angulo ABC. angulus igitur DEF angulo DEG æqualis erit, minor maiori, quod fieri non potest. non igitur EG parallelæ est ipsi BC. similiter ostendimus neque aliam ullam eidem BC parallelam esse præter ipsam EF. ergo EF ipsi BC est parallelæ. quod demonstrare oportebat.

PROBLEMA I. PROPOSITIO XI.

A dato puncto sublimi ad subiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit datum quidem punctum sublime A, datum autem subiectum planum. oportet à puncto A ad subiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere. In subiecto enim plano ducatur quedam recta linea ut cumq; BC, & à puncto A ad B C per

11. primi.
1. primi.

4. huius.

8 huius.
3. diffi.

4. huius.

C perpendicularis agatur A D. Si quidem igitur AD perpendicularis sit etiam ad subiectum planum; factum iam erit, quod proponebatur: sin minus, ducatur à puncto D ipsi BC in subiecto plano ad rectos angulos D E: & à puncto A ad DE perpendicularis ducatur AF. deniq; per F ducatur GH ipsi BC parallela. Et qm BC vtri que ipsarum DA DE est ad rectos angulos, erit & BC ad rectos angulos plano per ED DA transeunti, atq; est ipsi parallela GH. Si aut sint duæ rectæ lineæ parallelae, quarum vna plano alicui sit ad rectos angulos; & reliqua eidẽ plano ad rectos angulos erit. quare & CH plano per ED DA transeunti ad rectos angulos est: ac propterea ad omnes rectas lineas, quæ in eodem plano existentes ipsam contingunt, est perpendicularis. contingit aut ipsam AF existẽs in plano per ED DA. ergo GH perpendicularis est ad FA. & ob id FA est perpendicularis ad GH: est autem AF & ad DE perpendicularis. ergo AF perpendicularis est ad vtrâq; ipsarum HG DE. si autem recta linea duabus rectis lineis sese contingentibus in cõmuni sectione ad rectos angulos insistat, etiam plano per ipsas ducto ad rectos angulos erit. quare FA plano per E D GH ducto est ad rectos angulos. planum autem per ED GH est subiectum planum. ergo AF ad subiectum planum est perpendicularis. A dato igitur puncto sublimi A ad subiectum planum perpendicularis recta linea ducta est AF. quod facere oportebat.

PROBLEMA II. PROPOSITIO. XII.

Dato plano à puncto, quod in ipso datum, est ad rectos angulos rectam lineam constituere.

Ex antecedente.

8 huius.

Sit datum quidem planum subiectum, punctum autẽ, quod in ipso sit A. oportet à puncto A subiecto plano ad rectos angulos rectam lineam constituere. Intelligatur aliquod punctũ sublime B, à quo ad subiectũ planum agatur perpendicularis B C; & per A ipsi BC parallela ducatur AD. Qm igitur duæ rectæ lineæ parallelae sunt A D CB, vna autem ipsarum B C subiecto plano est ad rectos angulos; & reliqua AD subiecto plano ad rectos angulos erit. Dato igitur plano à puncto, quod in ipso est datum ad rectos angulos recta linea constituta est. quod facere oportebat.

THEOREMA XI. PROPOSITIO XIII.

Dato plano à puncto, quod in ipso est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non constituentur ex eadem parte.

5. huius.

3. diffi.

Si enim fieri potest, dato plano à puncto quod in ipso est A, duæ rectæ lineæ AB AC ad rectos angulos constituentur ex eadem parte: & ducatur planũ per BA AC, quod faciet sectionem per A in subiecto plano rectam lineam. faciat DAE. ergo rectæ lineæ AB AC DAE in vno sunt plano. Et quoniam CA subiecto plano ad rectos angulos est, & ad omnes rectas lineas, quæ in subie-

cto plano

et plano existentes ipsam contingunt, recto s faciet angulos. contingit autem ipsam DAE, quæ est in subiecto plano. angulus igitur CAE rectus est. Eadem ratione & rectus est BAE. ergo angulus CAE ipsi BAE est æqualis, & in vno sunt plano, quod fieri non potest. Non igitur dato plano à puncto, quod in ipso est, duæ rectæ B lineæ ad rectos angulos constituentur ex eadē parte. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIUS.

Et ducatur planum per B A A C] Sunt enim ex secunda huius rectæ lineæ BA AC A in vno plano.

S C H O L I U M.

Quod fieri non potest] Effent enim & parallelæ, eidem plano ad rectos angulos existentes; & inter se conuenirent. quod est absurdum, parallelæ autem essent ex sexta huius.

THEOREMA XII. PROPOSITIO XIII.

Ad quæ plana eadem recta linea est perpendicularis, ea parallela sunt.

Recta enim ipsa quædam AB ad vtrumque ipsorum planorum CD EF sit perpendicularis. Dico ea plana parallela esse. si enim non ita sit, producta conuenient inter se, conueniāt; & cōm sectionē faciāt rectā lineā GH; & in ipsa GH sumpto quouis pūcto K, iungantur AK BK. Quia igitur AB perpendicularis est ad EF planū, erit & perpendicularis ad ipsa BK rectā lineā in plano EF producto existētē. quare angulus ABK rectus est. Eadē ratione & BAK est rectus: ideoque trianguli ABK duo anguli ABK BAK duobus rectis sunt æquales, quod fieri non potest. non igitur plana CD EF producta inter se conuenient. quare CD EF parallela sunt necesse est. Ad quæ igitur plana eadem recta linea est perpendicularis, ea parallela sunt. quod demonstrare oportebat.

S C H O L I U M.

CONUERSVM. Si duo plana parallela fuerint, recta linea, quæ ad vnum ipsorum est perpendicularis, etiam ad reliquum perpendicularis erit.

F. C. COMMENTARIUS.

Sint duo plana parallela CD EF, & recta quædam linea AB ad planum CD sit perpendicularis. Dico AB etiam ad planum EF perpendicularem esse. Si enim non est perpendicularis, ducatur in plano EF recta linea BG ad eas partes in quibus angulum facit recto minorem: & per AB BG aliud planum ducatur, cuius & plani CD communis sectio sit recta linea AH. Et quoniam angulus ABG est acutus, productis planis conuenient tandem inter sese rectæ lineæ BG AH. quare & ipsa plana conuenient, atque parallela ponuntur. quod fieri non potest. non igitur AB ad planum EF non est perpendicularis. ergo perpendicularis sit necesse est. quod demonstrandum proposuimus.

THEO.

Si duæ rectæ lineæ sese tangentes duabus rectis lineis sese tangentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano; & quæ per ipsas transeunt plana parallelæ erunt.

Duæ enim rectæ lineæ sese tangentes AB BC duabus rectis lineis sese tangentibus DE EF parallelæ sint, & non in eodem plano. Dico plana quæ per AB BC DE EF transeunt, si producantur, inter se non conuenire. Ducatur enim à puncto B ad planum, quod per DE EF transit perpendicularis BG, quæ plano in puncto G occurrat; & per G ducatur ipsi quidem ED parallela GH; ipsi vero EF parallela GK. Itaque

3. diff.

29. primi.

8. huius.

Ex antecedentibus.

quoniam BG perpendicularis est ad planum per DE EF; & ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt, & in eodem sunt plano, rectos faciet angulos. contingit autem ipsam utraq; earum GH GK, quæ est in eodem plano. rectus igitur est uterque angulorum BGH BGK. Et quoniam BA parallela est ipsi GH, anguli GBA BGH duobus rectis sunt æquales. rectus autem est BGH, ergo et GBA rectus erit; ideoq; GB ad BA est perpendicularis. Eadem ratione & GB est perpendicularis ad BC. cum igitur recta linea BG duabus rectis lineis BA BC se inuicem secantibus ad rectos angulos infistat, erit BG etiam ad planum per AB BC ductum perpendicularis. & ob eandem causam BG est perpendicularis ad planum per HG GK. sed planum per HG GK est illud, quod per DE EF transit, quare BG ad planum, quod transit per DE EF est perpendicularis. ostensa autem est BG etiam perpendicularis ad planum per AB BC: atq; est ad planum per DE EF perpendicularis. ergo BG perpendicularis est ad utrumq; planorum, quæ per AB BC DE EF transeunt. Ad quæ vero plana eadē recta linea est perpendicularis, ea parallelæ sunt. parallelæ igitur est planum per AB BC plano per DE EF. Quare si duæ rectæ lineæ se se tangentes duabus rectis lineis se se tangentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano, & quæ per ipsas transeunt plana parallelæ erunt. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XIII. PROPOSITIO XVI.

Si duo plana parallelæ ab aliquo plano secantur, communes ipsorum sectiones parallelæ erunt.

Duo enim plana parallelæ AB CD à plano aliquo EFGH secantur: communes autem ipsorum sectiones sint EF GH. Dico EF ipsi GH parallelam esse. si enim non est parallela, productæ EF GH inter se conuenient, vel ad partes FH, vel ad partes EG. producantur prius, ut ad FH; & conueniant in K. Quoniam igitur EFK est in plano AB, & omnia quæ in EFK sumuntur puncta in eodem plano erunt. unum autem punctorum, quæ sunt in EFK, est ipsum K punctum. ergo K est in plano AB. Eadem ratione & K est in CD plano. ergo plana AB CD producta inter se conuenient. non igitur EF GH rectæ lineæ productæ conuenient ad partes FH. similiter demonstrabimus neque ad partes EG conuenire, si pro-

ducantur

ducantur. quæ autem neutra ex parte conueniunt parallelæ sunt. ergo EF ipsi GH est parallela. si igitur duo plana parallela ab aliquo plano secentur, communes ipsorum sectiones parallelæ erunt. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XV. PROPOSITIO. XVII.

Si duæ rectæ lineæ à parallelis secentur planis, in easdem proportionibus secabuntur.

Duæ enim rectæ lineæ AB CD à parallelis planis GH KL MN secantur in punctis A E B C F D. Dico ut AE recta linea ad ipsam EB, ita esse CF ad FD. Iungantur enim AC BD. AD: & occurrat AD plano KL in puncto X: & EX XF iungantur. Quoniam igitur duo plana parallela KL MN à plano EBDX secantur, communes ipsorum sectiones EX BD parallelæ sunt. Ea dem ratione quoniam duo plana parallela GH KL à plano AEFC secantur, communes ipsorum sectiones AC FX sunt parallelæ. Et quoniam vni laterum trianguli ABD, videlicet ipsi BD parallela ducta est EX, ut AE ad EB, ita erit AX ad XD. Rursum quoniam vni laterum trianguli ADC, nempe ipsi AC parallela ducta est XF, erit ut AX ad XD, ita CF ad FD. ostensum autem est & ut AX ad XD, ita esse AE ad EB. & ut igitur AE ad EB, ita est CF ad FD. Quare si duæ rectæ lineæ à parallelis secantur planis, in easdem proportionibus secabuntur. quod demonstrare oportebat.

Ex antecedente.

2. axi.

et. quoniam.

THEOREMA XVI. PROPOSITIO. XVIII.

Si recta linea plano alicui sit ad rectos angulos, & omnia quæ per ipsam. transeunt plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

Recta enim linea quædam AB subiecto plano sit ad rectos angulos. Dico & omnia plana, quæ per ipsam AB transeunt, subiecto plano ad rectos angulos esse. producantur enim per AB planum DE, sitq; plani D E, & subiecti plani communis sectio CE: & sumatur in CE quod vis punctum F; à quo ipsi CE ad rectos angulos in DE plano ducatur FG. Quoniam igitur AB ad subiectum planum est perpendicularis; & ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt, & in eodem sunt plano perpendicularis erit. quare et ad CE est perpendicularis. angulus igitur ABF rectus est. sed & CFB est rectus. ergo AB parallela est ipsi FC. est autem AB subiecto plano ad rectos angulos. & FG igitur eidem plano ad rectos angulos erit. At planum ad planum rectum est, quando communi planorum sectioni ad rectos angulos ductæ rectæ lineæ in vno planorum reliquo plano ad rectos angulos sint: & communi planorum sectioni CE in vno plano DE ad rectos angulos ducta FG, ostensa est subiecto plano ad rectos esse angulos: ergo planum DE rectum est ad subiectum planum. similiter demonstrabuntur, & omnia quæ per AB transeunt plana subiecto plano recta esse. si igitur recta linea plano alicui sit ad rectos angulos, & omnia quæ per ipsam transeunt plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

3. diffi.

8 huius.

4. diffi.

E V C L I D . E L E M E N T .

THEOREMA XVII. PROPOSITIO XIX.

Si duo plana se inuicem secantia plano alicui sint ad rectos angulos , & communis ipforum sectio eidem plano ad rectos angulos erit.

Duo enim plana se inuicem secantia AB BC subiecto plano sint ad rectos angulos : communis autem ipforum sectio sit BD. Dico BD subiecto plano ad rectos angulos esse.

Non enim, sed si fieri potest ; non sit BD ad rectos angulos subiecto plano ; & à puncto D ducatur in plano quidem A B, ipsi AD rectæ lineæ ad rectos angulos DE : in plano autè BC ducatur ipsi CD ad rectos angulos DF. Et quoniam planum AB ad subiectum planum rectum est, & communi ipforum sectioni AD ad rectos angulos in plano AB ducta est DE, erit DE ad subiectum planum perpendicularis. simili-
liter ostendemus & DF perpendicularem esse ad subiectum planum. quare ab eodè puncto D subiecto plano duæ rectæ lineæ ad rectos angulos constitutæ sunt ex eadem parte, quod fieri non potest. non igitur subiecto plano à puncto D ad rectos angulos constituentur aliæ rectæ lineæ, præter ipsam D B, communem planorum AB BC sectionem. Ergo si duo plana se inuicem secantia plano alicui sint ad rectos angulos , & communis ipforum sectio eidè plano ad rectos angulos erit. quod oportebat demonstrare.

uj. huius.

F. C. C O M M E N T A R I V S.

Ex proxime demonstratis apparet conuersum antecedentis theorematis, nempe hoc.

Si omnia, quæ per aliquam rectam lineam plana producuntur, cuiuspiam plano ad rectos fuerint angulos, & recta linea eidem plano ad rectos angulos erit.

Fit enim recta linea dictorum planorum communis sectio. quare cum ea plana plano cuiuspiam ad rectos angulos esse ponantur, & recta linea quæ ipforum communis sectio est eidem plano ad rectos angulos erit.

Conuersum vero presentis theorematis apparet ex antecedente, quod huiusmodi est.

Quorum planorum se se mutuo secantium communis sectio alicui plano ad rectos fuerit angulos, & secantia plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

Communis enim planorum sectio est recta linea, per quam dicta plana transiunt. quod cum recta linea plano cuiuspiam ad rectos fuerit angulos, & ipsa plana eidem ad rectos angulos erunt.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO. XX.

Si solidus angulus tribus planis contineatur, duo quilibet reliquo maiores sunt, quomodocumque sumpti.

Solidus enim angulus ad A tribus angulis planis BAC CAD DAB contineatur. Dico angulorum BAC CAD DAB duos quoslibet reliquo maiores esse, quomodocumque sumptos. si enim BAC CAD DAB anguli inter se æquales sint, perspicuum est duos quoslibet reliquo maiores esse, quomodocumque sumptos. Sin

minus

minus, sit maior BAC. & ad rectam lineam AB, & ad punctum in ipsa A constitua-
ur angulo DAB in plano per BA AC transeunte, æqualis angulus BAE; ponaturq;
ipfi AD æqualis AE; & per E ducta BEC secet rectas lineas AB AC in punctis BC
& DB DC iungantur. Itaque quoniam DA est æqualis AE, communis autem AB,
duæ DA AB duabus BA AE æquales sunt: & angulus DAB æqualis est angulo B
AE, basis igitur DB basi BE est æqualis. Et quoniam duæ DB DC ipsa BC maiores
sunt, quarum DB æqualis ostensa est ipsi BE; erit reliqua DC quam reliqua EC ma-
ior. Quod cum DA sit æqualis AE, communis autem AC & basis DC maior, basi
EC; erit angulus DAC angulo EAC maior. ostensus autem est & DAB angulus æ-
qualis ipsi BAE. quare DAB DAC anguli angulo BAC maiores sunt. similiter de
monstrabimus: & si duo quilibet abij sumantur, eos reliquo esse maiores. si igitur so-
lidus angulus tribus angulis planis continetur, duo quilibet reliquo maiores sunt,
quomodocumque sumpti, quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XXI.

Omnis solidus angulus minoribus, quam quattuor rectis angu-
lis planis continetur.

Sit solidus angulus ad A planis angulis BAC CAD DA
B cõtetus. Dico angulos BAC CAD DAB quattuor re-
ctis esse minores. sumatur enim in vnaquaq; ipsarũ AB A
C AD quævis puncta B' C' D'; & BC CD DB iungatur. Quo-
niam igitur solidus angulus ad B tribus angulis planis cõ-
tinetur CBA ABD CBD, duo quilibet reliquo maiores
sunt, anguli igitur CBA ABD angulo CBD sunt maiores.
Eadem ratione & anguli quidẽ BCA ACD maiores sunt
angulo BCD; anguli vero CDA ADB maiores angulo C
DB. quare sex anguli CBA ABD BCA ACD ADC ADB tribus angulis CB
D BCD CDB sunt maiores. sed tres anguli CBD BDC DCB sunt æquales duo-
bus rectis. Sex igitur anguli CBA ABD BCA ACD ADC ADB duobus rectis ma-
iores sunt. Quod cũ singulorũ triagulorum ABC ACD ADB tres anguli sint æqua-
les duobus rectis, erunt triũ triangulorum nouem anguli CBA ACD BAC ACD
DAC CDA ADB DBA BAD æquales sex rectis. quorũ sex anguli ABC BCA A
CD CDA ADB DBA duobus rectis sunt maiores, reliqui igitur BAC CAD DA
B tres anguli, qui solidum continent angulum quattuor rectis minores erunt. Qua-
re omnis solidus angulus minoribus, quam quattuor rectis angulis planis contine-
tur, quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XX. PROPOSITIO XXII.

Si sint tres anguli plani, quorum duo reliquo sint maiores, quo-
modocumque sumpti, contineant autem ipsos rectæ lineæ æqua-
les fieri potest, vt ex ijs, quæ rectas æquales coniungunt triangu-
lum constituatur.

Sint tres anguli plani ABC DEF GHK, quorum duo reliquo sint maiores, quo-
modocumque sumpti, videlicet anguli quidem ABC DEF maiores angulo GHK;
anguli vero DEF GHK maiores angulo ABC; & præterea anguli GHK ABC angu-
lo DEF maiores sintq; æquales rectæ lineæ AB BC DE EF GH HK, & AC DF
GK iungatur. Dico fieri posse, vt ex equalibus ipsis AC DF GK trianguli cõstitua-
tur; hoc est ipsarũ AC DF GK duas quaslibet reliqua esse maiores, quomodocumq;
sumptas. si quidẽ igitur anguli ABC DEF GHK inter se æquales sint; manifestũ

est & æqualibus factis AC DF GK ex æqualibus ipsis triangulum constitui posse. sin minus, sint inæquales, & ad rectam lineam HK, atque ad punctum in ipsa H, angulo ABC equalis angulus constituitur KHL, & ponatur vni ipsarum AB BC DE EF GH HK æqualis HL; & GL KL iungantur. Itaque quoniam duæ AB BC duabus KH HL æquales sunt; & angulus ad B angulo KHL æqualis, erit basis AC æqualis basi KL. Et quoniam anguli ABC GHK angulo DEF sunt maiores; æqualis autem est angulus A B C angulo K H L : erit G H L : angulo D E F maior. Quod cum duæ GH HL duabus DE EF æquales sint, & angulus GHL angulo, qui ad E maior, basis GL basi DF maior erit. Sed GK KL ipsa GL sunt maiores. multo igitur maiores sunt GK KL ipsa DF. est autem KL æqualis AC. ergo AC GK reliqua DF sunt maiores. similiter demonstrabimus, & ipsas quidem AC DF maiores esse GK, ipsas uero GK DF maiores AC. fieri igitur potest ut ex æqualibus ipsis AC DF GK triangulum constitutur.

ALITER. sint dati tres anguli plani ABC DEF GHK, quorum duo reliqui
sint maiores, quomodo cumque sumpti: contineant autem ipsos æquales recta lineæ
AB BC DE EF GH HK, & AC DF GK iungantur. Dico fieri posse, vt ex equali-
bus ipsis AC DF GK triangulum constitutur: hoc est rursus duas reliqua maio-
res esse, quomodo cumque sumptas. si igitur rursus anguli ad B E H sint æquales,
& AC DF GK æquales erunt, & due reliqua maiores. sin minus, sint in æquales
anguli ad B E H, & maior qui est ad B vtroque ipsorum qui ad E H. maior igitur
est & recta lineæ AC, vtique ipsarum DF GK. & manifestum est ipsam AC vna cū
altera ipsarum DF GK reliqua esse maiorem. Dico & DF GK ipsa AC maiores esse.
constituitur ad rectam lineam AB, & ad punctum in ea B, angulo GHK æqualis
angulus ABL, & vni ipsarum AB BC DE EF GH HK ponatur æqualis BL, & AL
LC iungantur. Quoniam igitur due AB BL duabus GH HK æquales sunt, altera al-
teri, & angulos æquales continent; erit basis AL basi GK æqualis, & quoniam anguli
ad E H angulo ABC maiores sunt, quorum angulus GHK est æqualis ipsi ABL;
erit reliquus qui ad E angulo LBC maior. Quod cum due LB BC duabus DE EF
æquales sint, altera alteri; & angulus DEF angulo LBC maior; basis DF basi LC ma-
ior erit. ostensa est autem GK equalis AL. ergo DF GK ipsi AL LC sunt maiores.
sed AL LC maiores sunt ipsa AC. multo igitur DF GK ipsa AC maiores erūt. qua-
re rectarum linearum AC DF GK due reliqua maiores sunt, quomodo cumque
sumptæ; nam propterea fieri potest, vt ex equalibus ipsis AC DF GK triangulum con-
stitutur, quod oportebat demonstrare.

PROBLEMA III. PROPOSITIO. XXIII.

Ex tribus angulis planis, quorum duo reliquo sint maiores, quomodocumque sumpti, solidum angulum constituere. oportet autem tres angulos quattuor rectis esse minores.

Sint dati tres anguli plani ABC DEF GHK, quorum duo reliquo sint maiores, quomodocumque sumpti, sintque tres anguli quattuor rectis minores. oportet ex æqualibus ipsis ABC DEF GHK solidum angulum constituere. abscindatur æquales AB BC DE EF GH HK, & AC DF GK iungatur. fieri igitur potest, ut ex æqualibus ipsis AC DF GK constituatur triangulum. Itaque constituatur LMN, ita ut AC quidem sit æqualis LM, DF vero ipsi MN: & præterea GK ipsi LN: & circa LMN triangulum circulus LMN describatur: sumaturque ipsius centrum X; quod vel erit intra triangulum LMN, vel in uno eius latere, vel extra. Sit primum intra: sitque X: & LX MX NX iungatur. Dico AB maiorem esse ipsa LX. Si enim non ita sit, vel AB erit equalis LX, vel ea minor. Sit primum æqualis. Quoniam igitur AB est equalis LX, atque est AB ipsi BC æqualis; erit LX equalis BC; est autem LX æqualis XM. duæ igitur AB BC duabus LX XM æquales sunt: altera alteri; & AC basis basi LM equalis ponitur. quare angulus ABC angulo LXM est equalis. Eadem ratione & angulus quidem DEF est equalis angulo MXN, angulus vero GHK angulo NXL. Tres igitur anguli ABC DEF GHK tribus LXM MXN NXL æquales sunt. Sed tres LXM MXN NXL quattuor rectis sunt, æquales. ergo & tres ABC DEF GHK æquales erunt quattuor rectis. atqui ponuntur quattuor rectis minores, quod est absurdum. non igitur AB ipsi LX est equalis. Dico præterea neque AB minorem esse ipsa LX. si enim fieri potest, sit minor; & ponatur ipsi quidem AB equalis XO, ipsi vero BC æqualis XP, & OP iungatur. Quoniam igitur AB est æqualis BC, & XO ipsi XP equalis erit. ergo & reliqua OL relique PM est æqualis; ac propterea LM parallela est ipsi OP; & LMN triangulum triangulo OPX æquiangulum. est igitur ut XL ad LM, ita XO ad OP; & permutando ut LX ad XO, ita LM ad OP; maior autem est LX, quam XO. ergo & LM quam OP est maior. Sed LM posita est æqualis AC. & AC igitur quam OP maior erit. Itaque quoniam duæ rectæ lineæ AB BC duabus OX XP æquales sunt, & basis AC maior basi OP; erit angulus ABC angulo OXP maior. Similiter demonstrabimus & DEF angulum maiorem esse angulo MXN, & angulum GHK angulo NXL. Tres igitur anguli ABC DEF GHK tribus LXM MXN NXL

Ex antecedente.
22. primi.

5. quarti.

8. primi.
Corol. 15. psi
mi.

2. sexti.
4. sexti.

25. primi.

MXN

EVLID. ELEMENT.

Coro. 15. primi.
12. huius.

5. diffi.

4. primi.

47. primi.

8. primi.

MXN NXL sunt maiores. At anguli ABC DEF GHK quattuor rectis minores ponuntur. multo igitur anguli LXM MXN NXL minores erunt quattuor rectis. Sed & equales. quod est absurdum. non igitur AB minor est; quam LX. ostensum autem est neque esse aequalem. ergo maior sit necesse est. constituitur a puncto X circuli LMN plano ad rectos angulos XR, & excessui, quo quadratum ex AB superat quadratum ex LX, ponatur equale quadratum quod sit ex RX, & RL RM RN iungantur. Quoniam igitur RX perpendicularis est ad planum LMN circuli, & ad vnamquamque ipsarum LX MX NX erit perpendicularis. Et quoniam LX est æqualis XM, communis autem & ad rectos angulos XR, erit basis LR æqualis basi RM. Eadem ratione & RN vtrique ipsarum RL RM est equalis. Tres igitur rectæ lineæ RL RM RN inter se æquales sunt. Et quoniam quadratum XR ponitur equale excessui, quo quadratum ex AB superat quadratum ex LX; erit quadratum ex AB quadratis ex LX XR æquale. quadratis autem ex LX XR æquale est quadratum ex RL; rectus enim angulus est LXR. ergo quadratum ex AB quadrato ex RL æquale erit; ideoque AB ipsi RL est equalis. sed ipsi quidem AB æqualis est vnaquæque ipsarum BC DE EF GH HK; ipsi vero RL æqualis vtrique ipsarum RM RN. vnaquæque igitur ipsarum AB BC DE EF GH HK vnicuique ipsarum RL RM RN est æqualis. Quod cum duæ LR RM duabus AB BC æquales sint, & basis LM, ponatur æqualis basi AC; erit angulus LRM æqualis angulo ABC. Eadem ratione & angulus quidem MRN angulo DEF, angulus autem LRN angulo GHK est æqualis. ex tribus igitur angulis planis LRM MRN LRN, qui æquales sunt tribus datis ABC DEF GHK solidus angulus constitutus est ad R, qui angulis LRM MRN LRN continetur.

Sed sit centrum circuli in vno laterum trianguli, videlicet in MN, quod sit X, & XL iungatur. Dico rursus AB maiorem esse ipsa LX. Si enim non ita sit, vel AB est æqualis LX, vel ipsa minor. sit primum æqualis. duæ igitur AB BC, hoc est DE EF

20. primi.

duabus MX XL, hoc est ipsi MN æquales sunt, sed MN ponitur æqualis DF. ergo DE EF ipsi DF sunt æquales. quod fieri non potest. non igitur AB est æqualis LX. similiter neque minor. multo enim magis id quod fieri non potest, sequetur. ergo AB ipsa LX maior est. & similiter si excessui quo quadratum ex AB superat quadratum ex LX æquale ponatur, ut quadratum ex RX, & ipsa RX circuli plano ad rectos angulos constituitur, fiet problema.

8. primi.

Sed sit centrum circuli extra triangulum LMN, quod sit X, & LX MX NX iungantur. Dico & sic AB ipsa LX maiorem esse. si enim non ita sit, vel æqualis est, vel minor. sit primum æqualis. ergo duæ AB BC duabus MX XL æquales sunt, altera alteri; & basis AC est æqualis basi ML. angulus igitur ABC æqualis est angulo MXL. Eadem

dem ratione & GHK angulus ip-
 fi LXN est equalis; ac propterea
 totus MXN equalis duobus AB
 C GHK. sed & anguli ABC G
 HK angulo DEF maiores sunt.
 & angulus igitur MXN ipso DE
 F est maior. Et quoniam duæ D
 E EF duabus MX XN æquales
 sunt, & basis DF equalis basi M
 N, erit MXN angulus angulo D
 EF æqualis. ostensus autem est
 maior, quod est absurdum. non
 igitur AB est æqualis LX. dein-
 ceptus vero ostendimus neque minorem esse. quare maior necessario erit. & si rur-
 sus circuli plano ad rectos angulos constituamus XR, & ipsā æqualē ponamus lateri
 quadrati eius, quo quadratum ex AB superat quadratum ex LX, problema consti-
 tuetur. Itaque dico neque minorem esse AB ipsā L
 X. si enim fieri potest, sit minor; & ipsi quidem AB
 æqualis ponatur XO, ipsi vero BC æqualis XP, & OP
 iungatur. Quoniam igitur AB ipsi BC est æqualis,
 erit ex XO æqualis XP. ergo & reliqua OL reliquæ
 PM æquales. parallela igitur est LM ipsi FO, & trian-
 gulum LMX triangulo PXO æquiangulum. quare
 ut XL ad LM, ita XO ad OP: & permutando ut LX
 ad XO, ita LM ad OP. maior autem est LX quàm X
 O. ergo LM quàm OP est maior. sed LM est æqualis
 AC. & AC igitur quàm OP maior erit. Itaque quo-
 niam duæ AB BC duabus OX XP sunt æquales, al-
 tera alteri; & basis AC maior est basi OP; erit angu-
 lus ABC angulo OXP maior. similiter & si XR su-
 matur æqualis utriq; ipsarum XO XP, & iungatur O
 R, ostendimus angulum GHK angulo OXR maio-
 rem. constitutur ad rectam lineam LX, & ad pun-
 ctum in ipsa X angulo quidem ABC æqualis angu-
 lus LXS, angulo autem GHK æqualis LXT, & ponat-
 ur utraq; XS XT ipsi OX æqualis: iunganturq; OS OT ST. Et quoniam duæ A
 B BC duabus OX XS æquales sunt, & angulus ABC æqualis angulo OXS, erit basi
 AC, hoc est LM basi OS æqualis. Eadem ratione & LN est æqualis ipsi OT. Quod
 cum duæ ML LN duabus OS ST sint æquales, & angulus MLN maior angulo SO
 T; erit et basis MN basi ST maior. sed MN est æqualis DF. ergo et DF quàm ST ma-
 ior erit. Quoniam igitur duæ DE EF duabus SX XT æquales sunt, et basis DF ma-
 ior basi ST; erit angulus DEF angulo SXT maior. æqualis autē est angulus SXT an-
 gulis A BC GHK. ergo DEF angulus angulis A BC GHK maior est. sed et minor;
 quod fieri non potest.

3. secū.
 4. secū.

23. primū.

4. primū.

42. primū.

23. primū.

Quo autem modo sumatur quadratum ex RX æquale ei, quo quadratum ex AB superat quadratum ex LX , ita ostendemus.

gr. ter. iii.
47. primi.

Exponatur rectę lineę AB LX , sitq; maior AB , & in ipsa describatur semicirculus ACB ; in quo aptetur recta linea AC ipsi LX æqualis, & BC iungatur. Itaque quoniam in semicirculo ABC angulus est AGB , erit $A C B$ rectus. quadratum igitur quod fit ex AB æquale est, & quadrato quod ex AC , & ei, quod ex CB . ergo quadratum ex AB superat quadratum ex AC , quadrato ex CB . æqualis autem est AC ipsi LX . quadratum igitur ex AB superat quadratum ex LX , quadrato ex CB . Quare si ipsi CB æqualem sumamus XR , quadratum ex AB superabit quadratum ex LX , eo quod fit ex RX quadrato.

S C H O L I U M.

PROPOSITIO I.

Si fuerint quotlibet anguli plani, quorū vno reliqui sint maiores quomodocūque sumpti, contineant autem ipsos rectę lineę æquales. Dico ex rectarum linearum angulos subtendentium, vna reliquas maiores esse quomodocūque sumptas: hoc est fieri posse, vt ex ijs, quę rectas lineas coniungunt multorum laterum figura constituatur.

liber. 2.
liber. 4.

liber. 10.

24. primi.

63. primi.

Vt si dati fuerint quattuor anguli ad puncta $A D G L$, quorum tres reliqui sint maiores quomodocūque sumpti: æquales autem sint rectę lineę $BA AC ED DF HG GK ML LN$: & iungantur $BC EF HK MN$. Dico ipsarum $BC EF HK MN$ tres reliqua maiores esse, quomodocūque sumptas. si enim æquales sint anguli ad puncta $A D G L$, & latera $BC EF HK MN$ equalia erunt. & manifestum est tres vna reliqua esse maiores, quomodocūque accipiantur. si vero inæquales sint, sit maior qui ad A . basis igitur BC singulis ipsarum $EF HK MN$ maior est. quare BC cū vna earum reliquis quibuslibet est maior: cum duabus reliqua multo maior erit. Dico etiam $EF HK MN$ ipsa BC maiores esse. Quoniam enim angulus ad A maior est singulis ipsorum $D G L$, constituatur ad BA rectam lineam, & ad punctum in ipsa A angulo, qui ad D æqualis angulus BAX , & ad rectam lineam AX , & ad punctum in ipsa A angulo, qui ad G æquali constituto angulo XAO , vel AO cadet intra lineam AC , vel in ipsam, vel extra ipsam. Cadat primū intra, & ad rectam lineam OA , & ad

& ad punctum in ipsa A angulo qui ad L equalis fiat angulus OAP. cadet AP extra lineam AC, propterea quod tres anguli D G L reliqui sunt maiores. & ipsis AB AC æquales ponatur AX AO AP: iungaturq; BX. XO BO OP BP. Qm igitur duæ BA AP duabus BA AC sunt æquales; angulus aut BAP maior est angulo BAC; erit & BP basis basi AC maior. Sed ipsa BP maiores sunt BO OP. quare BO OP ipsa BC sunt multo maiores. suntq; BX XO maiores, quàm BO. ergo BX XO OP mul-

14. primi.

similiter.

to maiores sunt ipsa BC. atque est BX quidem equalis ipsi EF, quoniam & angulus BAX æqualis est angulo EDF; XO vero est equalis HK, & OP ipsi MN. quare EF HK MN ipsa BC multo maiores erunt. Sed recta linea, quæ cum AX continet angulum æqualem angulo G cadat in ipsam AC, ut in secunda figura: & BX XC CP iungantur. Itaque quoniam BX XC ipsa BC maiores sunt, & sunt BX XC CP æquales ipsis EF HK MN, erunt EF HK MN ipsa BC multo maiores. Denique recta linea AO, quæ cum AX continet angulum angulo G æqualem, cadat extra AC, ut in tertia figura: ponaturq; æqualis ipsi AP: & iungantur BP BO OP BX XO. Quoniam

4. primi:

similiter.

similiter.

similiter.

similiter.

igitur duæ BA AP duabus BA AC æquales sunt; angulus autem BAP maior est angulo BAC; erit BP quàm BC maior. Rursus quoniam BO OP maiores sunt quàm BP; & BX XO maiores quàm BO; erunt BX XO OP quàm BP multo maiores. Sed BP est maior BC. quare BX XO OP multo maiores sunt ipsa BC: sūtq; BX XO OP ipsis EF HK MN æquales. ergo EF HK MN ipsa BC multo maiores sunt. Et quoniam tres reliqua maiores sunt, quomodocumque sumptæ, fieri potest, ut ex ipsis quadrilaterum ipsam constitutur.

14. primi.

PROPOSITIO II.

Si in aliquod planū a quodam sublimi puncto æquales rectæ lineæ cadant, in circuli erunt circumferentia, & quæ a dicto puncto ad centrum circuli ducitur ad circumulum perpendicularis erit.

Ecc A puncto

E V C L I D . E L E M E N T .

A puncto enim A in subiectum planum æ-
 quales rectæ lineæ cadāt AB AC AD AE ad
 puncta B C D E Quidam ex punctis in circuli
 circumferentia esse. Iungantur enim in subie-
 cto plano BC CD DE EB, & circa BCD trian-
 gulum circulus describatur B C D F. ergo pun-
 cta B C D in circuli circumferentia sunt. Dico
 etiam ipsum E in circumferētia esse. non enim,
 sed si fieri potest, vel extra vel intra cadat. &
 primum cadat extra, & sumpto circuli centro
 G, ab eo ad puncta B C D E rectæ lineæ duc-
 untur GB GC GD GE, vt GE circulum in
 puncto F secet, & iungantur AE AG. Quoniā
 igitur AB ipsi AC est æqualis, est autem & BG
 æqualis CG: duæ AB BG duabus AC CG æ-
 quales sunt, & basis AG est vtrique communis.
 3. primi. angulus igitur ABG angulo ACG est æqualis,
 triangulumq; triangulo, & reliqui anguli reliquis angulis æquales. ergo angulus
 AGB æqualis est angulo AGC. Eadem ratione & angulus AGC angulo AGD æ-
 qualis erit. Quod cum AG ad plures quā duas rectas lineas in eodem existentes
 4. huius. plano rectos angulos efficiat, ad planum quod per ipsas ducitur perpendicularis
 erit. quare ad circulum ipsum. Itaque quoniam GD ipsi GF est æqualis, communis
 4. primi. autem & ad rectos angulos GA; erit basis AD basi AF æqualis. ergo & vnaquęque
 16. primi. ipsarum AB AC AE æqualis est ipsi AF. Et quoniam angulus AFE maior est recto
 19. primi. AGF, quod exterior sit, erit angulus AEF recto minor. trianguli igitur AEF an-
 gulus qui est ad F maior est angulo qui ad E. quare & latus AE maius est latere AF.
 sed & ostensum est æquale. quod est absurdum. non igitur punctum E extra circuli
 circumferentiam cadit. similiter ostendemus neque cadere intra. ducentes enim ad
 ipsum rectam lineam, & ad circumferentiam protendentes, rursusq; ab A ad dictū
 punctum rectam lineam iungentes, ostēdemus ipsam & æqualem esse, & minorem.
 quod est absurdum. At si neque extra cadit, neq; intra; relinquitur vt in ipsam cir-
 cumferentiam cadat. ergo AB AC AD AE in circuli sunt circumferentia, & AG
 ad ipsum circulum est perpendicularis. quod demonstrare oportebat.

C O R O L L A R I U M .

*Ex hoc manifestum est omnis anguli solidi, qui æquicruribus planis
 continetur, basim ipsam in circulo describi.*

P R O P O S I T I O I I I .

*Ex planis quotlibet datis angulis, quorum uno reliqui sint maiores
 quomodoq; sumpti, soli-
 dū angulū cōstituere opor-
 tet aut datos angulos quat-
 tuor rectis esse minores.*

Sint dicti anguli BAC ED
 FHGK MLN. oportet ex an-
 gulis qui sunt ad puncta A D
 G L solidum angulum consti-
 tuere. sumantur æquales rectæ

lineæ

lineæ, quæ ipsos angulos continent, & iungantur BC EF HK MN. æquicruria igitur sunt triangula, quæ vno quouis angulo reliquos maiores habent, quomodocumque sumptos. ergo BC EF HK MN quadrilaterum efficiet. si at & sit XO P R. Et quoniã oportet ex æquicruris triangulis B AC EDF HGK MLN solidum angulum constituere: omnis autem solidi

Ex corol. an
secedenti.

anguli, qui æquicruris triangulis continetur basim circumscribit circulus; & anguli solidi contenti triangulis BAC EDF HGK MLN, basim circulus circumscribet. dicti vero anguli basim constat ex basibus ipsorum triangulorum, videlicet XO PR. ergo quadrilaterum XOPR circulus circumscribit. Et deinceps eadem construens ijs, quæ dicta sunt in angulo solido pro basi triangulum habente propositum efficiemus.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXIII.

Si solidum parallelis planis contineatur, opposita ipsius plana, & æqualia & parallelogramma erunt.

Solidum enim CDGH parallelis planis AC GF AH DF FB AE contineatur. Dico opposita eius plana, & æqualia & parallelogramma esse. Quoniam enim duo plana parallela BG CE, à plano AC secantur, communes ipsorum sectiones parallelae sunt. ergo AB ipsi CD est parallela. Rursus quoniam duo plana parallela BF AE secantur à plano AC, communes ipsorum sectiones parallelae sunt. parallela igitur est AD ipsi BC: ostensa autem est & AB parallela CD. ergo AC parallelogrammum erit, similiter demonstrabimus, & vnumquodque ipsorum DF FG GB BF AE parallelogrammum esse. Iungantur AH DF. Et quoniam parallela est AB quidem ipsi DC; BH vero ipsi CF, erunt due AB BC se se tangentes duabus DC CF se se tangentibus parallela; & non in eodem plano. quare æquales angulos continebunt. angulus igitur ABH an-

is. huius.

Angulus
æquus est
angulo

re. huius.

Ecc 2 gulo

EVCLID. ELEMENT.

34. primi.

4. primi.

41. primi.

gulo DCF est equalis. Et quoniam duæ AB
BH duabus DC CF æquales sunt, & angu-
lus ABH æqualis angulo DCF, erit basis A
H basi DF æqualis: & ABH triângulum æqua-
le triângulo DCF. Quòd cum ipsius quidem
ABH triânguli duplū sit BG parallelogrāmū;
ipsum vero DCF triânguli duplum paralle-
logrāmū CE: erit BG parallelogrāmū æqua-
le parallelogrāmo CE. similiter demonstra-
bimus & AC parallelo grammum parallelo-
grammo GF, & parallelogrammum AE pa-
rallelogrammo BF æquale esse. Si igitur soli-
dum parallelis planis contineatur, opposita
ipsius plana, & æqualia & parallelogramma
sunt, quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIUS.

COROLLARIUM.

Ex iam demonstratis constat, si solidum parallelis planis contineatur opposita
v. diffi. sexti. ipsius plana, & æqualia esse, & similia, quippe quæ & singulos angulos æquales, & cir-
ca æquales angulos latera proportionalia habeant.

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXV.

Si solidum parallelepipedum plano secetur oppositis planis
parallelo, erit vt basis ad basim, ita solidum ad solidum.

Solidū enim pa-
rallelepipedum AB
CD plano YE sece-
tur, oppositis pla-
nis RA DH paral-
lelo. Dico vt AEF
basis ad basim EH
CF, ita esse ABFY
solidum ad solidū E
GCD. producat
enim AH ex vtraq;
parte, & ponantur
ipsi quidem EH æ-
quales quotcumque HM MN; ipsi uero AE æquales quotcumque AK KL, & com-
pleantur parallelogramma LO K P HX MS, & solida LP KR DM MT. Quoniā
igitur æquales inter se sunt LK KA AE rectæ lineæ; erunt & parallelogramma LO
K P AF inter se æqualia: itemq; æqualia inter se parallelogramma KX KB AC, &
adhuc parallelogramma Lr KP AR inter se æqualia; opposita enim sunt. Eadem
ratione & parallelogramma EC HX MS æqualia inter se; itemq; parallelogrāma
HG HI IN inter se æqualia: & insuper parallelogramma DH Mq NT. tria igitur
plana solidorum LP KR AY tribus planis æqualia sunt. sed tria tribus oppo-
sitis sunt æqualia. ergo tria solida LP KR AY inter se æqualia erunt. Eadem ratione
& tria solida ED DM MT sunt æqualia inter se. quotuplex igitur est basis LF ip-
sius AF basis, totuplex est & LY solidum solidi AY. Et eadem ratione quotuplex est
NF basis ipsius basis HF, totuplex est & solidum NY ipsius HY solidi: & si basis LF
est

v. sexti.

Ex antecede-
nte.

est æqualis basi NF, & solidum LY solido NY æquale erit. & si basis LF superat NF basim, & LY solidum solidum NY superabit, & si minor, minus. quattuor igitur magnitudinibus existentibus, duabus scilicet basibus AF FH, & duobus solidis AY YH sumpta sunt æque multiplicia, basis quidem AF, & AY solidi, videlicet basis LF, & solidum LY: basis vero HF, & HY solidi, nempe basis NF & solidum NY. & demonstratum est si basis LF superat basim NF, & LY solidum solidum NY superare, & si æqualis æquale, & si minor minus. est igitur ut AF basis ad basim FH, ita AY solidū ad solidum YH. Quare si solidum parallelepipedum plano secetur, oppositis planis parallelo; erit ut basis ad basim, ita solidū ad solidū. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIUS.

Quod si solidum parallelepipedum secetur plano basibus parallelo; erit solidum ad solidum, ut altitudo ad altitudinem.

Hoc enim nos demonstrauimus in libro de centro gravitatis solidorum propositione XVIIII.

PROBLEMA IIII. PROPOSITIO. XXVI.

Ad datam rectam lineam, & ad datum in ipsa punctum dato angulo solido æqualem solidum angulum constituere.

Sit data quidem recta linea AB, datum autem in ipsa punctum A, & datus solidus angulus ad D, qui EDC EDF FDC angulis planis contineatur. oportet ad datam rectam lineam AB, & ad datum in ipsa punctum A, dato angulo solido ad D æquale solidum angulum constituere. sumatur enim in linea DF quod vis punctum F, à quo ad planum per ED DC transiens ducatur perpendicularis FG, & plano in puncto G occurrat; iungaturq; DG, & ad rectam lineam AB, & ad datum in ipsa punctum A, angulo quidem EDC æqualis angulus constituatur BAL; angulo autem EDG constituatur æqualis BAK. deinde ipsi DG ponatur equalis AK, & à puncto K plano per BAL ad rectos angulos erigatur KH; ponaturq; ipsi GF equalis KH, & HA iungatur. Dico angulum solidum ad A, qui angulus BAL BAH HAL continetur, æqualem esse solido angulo ad D angulis EDC EDF FDC contento. sumantur enim æquales rectæ lineæ AB DE, & iungantur HB KB FE GE. Quoniam igitur FG perpendicularis est ad subiectū planum; & ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt, suntq; in subiecto plano rectos faciet angulos. Vterque igitur angulorum FGA FGD rectus est. Eadē ratione, & uterq; ipsorum HKA HKB est rectus. Et quoniam dñæ KA AB duabus GD DE æquales sunt altera alteri, & angulos æquales continent; erit basis BK basi EG equalis. est autem & KH equalis GF, atque angulos rectos continent. equalis igitur et HB ipsi FE. Rursus quoniam duæ AK KH duabus DG GF æquales sunt, et rectos continent angulos; erit basis AH basi DF æqualis: estq; AB æqualis DE. duæ igitur HA AB duabus FD DE sunt æquales; et basis HB est equalis basi FE. ergo angulus BAH angulo EDF equalis erit. Eadem ratione et angulus HAL angulo FDC est æqualis, quandoquidem si assumamus æquales AL DC, et iungamus KL HL GC FC, quoniam torus BAL est æqualis

11. huius.
13. primi:

12. huius.

13. diff.

4. primi.

4. primi.

8. primi.

æqualis toti EDC, quo-
rum BAK ipsi EDG po-
natur æqualis; erit reli-
quus KAL æqualis reli-
quo GDC. Et quoniā
duæ KA AL duabus G
D DC æquales sunt, et
angulos æquales conti-
nent; basis KL basi GC
æqualis erit. est autem
et KH æqualis GF. duæ
igitur LK KH duabus
DC GF sunt æquales;
angulosq; rectos conti-
nent. ergo basis HL æqualis est basi FC. Rursus quoniam duæ HA AL duabus FD
DC æquales sunt, & basis HL æqualis basi FC; erit angulus HAL æqualis angulo F
DC. atque est angulus BAL angulo EDC æqualis. Ad datam igitur rectam lineam,
& ad datum in ipsa punctum dato angulo solido æqualis angulus solidus constitu-
tus est. quod facere oportebat.

4. primi.

8. primi.

PROBLEMA V. PROPOSITIO XXVII.

A data recta linea dato solido parallelepipedo simile & simili-
ter positum solidum parallelepipedum describere.

Sit recta quidē linea
AB; datum vero solidū
parallelepipedum CD.
oportet a data recta li-
nea AB dato solido pa-
rallelepipedo CD simi-
le, & similiter positū soli-
dum parallelepipedum
describere. constituatur
enim ad rectam lineam
AB, & ad datum in ipsa
punctum A angulo soli-
do ad C æqualis angu-
lus, qui angulis BAH HAK KAB contineatur, ita ut angulus quidem BAH æqua-
lis sit angulo ECF, angulus vero BAK angulo ECG, & adhuc angulus KAH angulo
GCF, & fiat ut EC ad CG, ita BA ad AK, ut autem GC ad CF, ita KA ad AH. er-
go ex equali ut EC ad CF, ita erit BA ad AH. compleatur parallelogrammum BH,
& AL solidum. Quoniam igitur est ut EC ad CG, ita BA ad AK, & circa æquales an-
gulos ECG BAK latera sunt proportionalia; erit parallelogrammum KB paral-
lelogrammo GE simile. Eadem quoque ratione parallelogrammum KH simile est pa-
rallelogrammo GF, & parallelogrammum HB parallelogrammo FE. tria igitur pa-
rallelogramma solidi AL tribus parallelogrammis solidi CD similia sunt. sed tria tri-
bus oppositis sunt æqualia, & similia. Ergo totū AL solidum toti solido CD simile
erit. A data igitur recta linea AB dato solido parallelepipedo CD simile, & simili-
ter positum solidum parallelepipedum AL descriptum est. quod facere oportebat.

Ex ante-
cedente.

12. sexti.

1. diffi. sexti.

24. huius.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXVIII.

Si solidum parallelepipedum plano secetur per diagonales op-
positorum

positorum planorum ab ipso plano bifariam secabitur.

Solidum enim parallelepipedum AB plano CDEF fecetur per diagonales oppositorum planorum, videlicet CF DE. Dico solidum AB a plano CDEF bifariam secari. Quoniam enim æquale est CGF triangulum triangulo CBF, triangulum vero ADE triangulo DEH; est autem & CA parallelogrammum parallelogrammo BE æquale, oppositum enim est, & parallelogrammum GE æquale parallelogrammo CH: erit prisma contentum duobus triangulis CFG ADE, & tribus parallelogrammis GE AC CE æquale prismati, quod continetur duobus triangulis CBF DEH, & tribus parallelogrammis CH BE CE; etenim equalibus planis, & numero & magnitudine continentur: ergo totum AB solidum a plano CDEF bifariam secatur, quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXIX.

Solida parallelepipeda, quæ in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia.

Sint enim in eadem basi AB solida parallelepipeda CM CN & eadem altitudine, quorum stantes A F AG LM LN CD CE BH BK sint in eisdem rectis lineis FN DK. Dico solidum CM solido CN æquale esse. Quoniam enim parallelogrammum est utrumque ipsorum CH CK; erit CB utrique ipsarum DH EK æqualis, ergo &

DH est æqualis EK. communis auferatur EH. reliqua igitur DE æqualis est reliquæ HK. quare & DEC triangulum est æquale triangulo HKB. parallelogrammum autem DG est æquale parallelogrammo HN. Eadem ratione & AFG triangulum æquale est triangulo LMN. est autem parallelogrammum CF parallelogrammo BM, & parallelogrammum CG parallelogrammo BN æquale: opposita enim sunt. ergo & prisma contentum duobus triangulis AFG DEC, & tribus parallelogrammis AD DG GC est æquale prismati, quod duobus triangulis LMN HBK, & tribus parallelogrammis BM NH BN continetur. commune apponatur solidum, cuius basis quidem parallelogrammum AB, oppositum autem ipsi GEHM. ergo totum CM solidum parallelepipedum toti solido parallelepipedo CN est æquale. solida igitur parallelepipeda, quæ in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia. quod demonstrare oportebat.

34. primi.

1. sexti.

24. huius.

THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXX.

Solida parallelepipeda, quæ in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia.

Sint

EVCLID. ELEMENT.

Sint in eadem basi AB solida parallelepipedum CMCN, & eadem altitudine, quorum stantes AF AG LM LN CD CE BH BK non sunt in eisdem rectis lineis. Dico solidum CM solido CN æquale esse, producatur enim NK DH & GE, FM, cōueniantq; inter se in punctis RX, & adhuc producatur FM GE ad O P puncta: & AX LO CP BR iungantur. solidum CM, cuius basis quidē ACBL parallelogrammum, oppositum autem ipsi FDHM est æquale solido CO, cuius basis parallelogrammum ACBL, & ei oppositū X P R O; in eadem enim sunt basi ACBL, & ipsorum stantes AF AX LM LO CD CP BH BR sunt in eisdem rectis lineis I O DR. Sed solidum CO, cuius basis quidem parallelogrammum ACBL, oppositum autem ipsi XPRO est æquale solido CN, cuius basis ACBL parallelogrammum, & ipsi oppositum GE KN. etenim in eadem sunt basi ACBL, & eorum stantes AG AX CE CP LN LO BK BR sunt in eisdem rectis lineis GP NR. quare & CM solidum solido CN æquale erit. Solida igitur parallelepipedā, quæ in eadē sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdē rectis lineis, inter se sunt æqualia, quod demonstrare oportebat.

Ex antea
de casu.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO. XXXI.

Solida parallelepipedā, quæ in æqualibus sunt basibus, & eadē altitudine inter se sunt æqualia.

ex primi.

s. diffi. sexti.

Sint in æqualibus basibus AB CD solida parallelepipedā AE CF, & eadē altitudine. Dico solidum AE solido CF æquale esse. sint autem primum stantes HK BE AG LM OP DF CE RS ad rectos angulos basibus AB CD: angulus autem ALB angulo CRD sit in æqualis, & producatur ipsi CR in directum RT: constituaturq; ad rectam lineam RT, & ad punctum in ipsa R, angulo ALB æqualis angulus RTY: & ponatur ipsi quidem AL æqualis RT, ipsi vero LB æqualis RY, & ad punctum Y ipsi RT parallela ducatur XY, compleaturq; basis RX, & TY solidum. quoniam igitur duæ TR RY duabus AL LB æquales sunt, & angulos continent æquales, erit parallelogrammum RX æquale & simile parallelogrammo HL. Et quoniam rursus AL est æqualis RT, & LM ipsi RS, angulosq; æquales continet, parallelogrammum RT parallelogrammo AM æquale & simile erit. Eadem ratione LE parallelogrammum ipsi SY æquale est & simile: tria igitur parallelogramma solidi AE tribus parallelogrammis solidi TY æqualia & similia sunt. Sed & tria tri-

bua

bus opposita & æqualia sunt & similia. totum igitur ΔE solidum parallelepipedum toti solido parallelepipedo τY est æquale. producantur DR XY , cõueniantq; inter se in pũcto Ω , & per T ipsi $D \Omega$ parallela ducatur TQ , & producatur TQ OD , & cõueniant in V , compleanturq; solida $\Omega \tau RI$. solidum igitur $\Phi \Omega$ cuius basis est $R\tau$ parallelogrammum, oppositum autem ipsi $\Omega \tau$ est æquale solido τY , cuius basis est $R\tau$ parallelogrammum, & oppositum ipsi $T\Phi$, in eadem enim sunt basi $R\tau$, & eadem altitudine, & eorum stantes $R\Omega$ RY TQ TX SZ SN $\Phi \tau$ Φ in eisdem sunt rectis lineis $\Omega XZ\Phi$. Sed solidum τY æquale est solido ΔE . ergo & $\tau \Omega$ solido ΔE est

æquale. præterea quoniam parallelogrammum $RYXT$ est æquale parallelogrammo ΩT , etenim in eadem est basi RT , & in eisdem parallelis RT ΩX . Sed parallelogrammum $RYXT$ parallelogrammo CD est æquale, quoniam & ipsi AB ; parallelogrammumq; ΩT æquale parallelogrammo CD : aliud autem parallelogrammum DT . est igitur vt CD basis ad basim $D T$, ita ΩT ad ipsam $D T$: Et quoniam solidum parallelepipedum CI plano RF secatur planis oppositis parallelo; erit vt CD basis ad basim DT , ita solidum CF ad RI solidum. Eadem ratione quoniam solidum parallelepipedum ΩI secatur plano $R \tau$ oppositis planis parallelo, vt ΩT basis ad basim CD , ita erit solidum $\Omega \tau$ ad RI solidum. sed vt CD basis ad basim $D T$, ita basis ΩT ad ipsam $T D$. Vt igitur solidum CF ad RI solidum, ita solidum $\Omega \tau$ ad solidum RI . Quod cum vtrumque solidorum CF $\Omega \tau$ ad solidum RI eandem habeat proportionem, solidum CF solido $\Omega \tau$ est æquale. solidum autem $\Omega \tau$ ostensum est æquale solido ΔE . ergo & ΔE ipsi CF æquale erit. sed non sunt stantes AG HK BE LM CN OP DF RS ad rectos angulos ipsis AB CD basibus. Dico rursum solidum ΔE æquale esse solido CF . Ducatur à punctis K E G M P F N S ad subiectum planum perpendiculares K E T G Y M Φ PX $F\tau$ $N\Omega$ SI , & plano in punctis E T Y Φ X τ Ω I occurrat, & iungantur E T $Y\Phi$ XY $T\Phi$ $X\tau$ $\Omega \tau$ HI . æquale igitur est $K\Phi$ solidum solido PI ; in æqualibus enim sunt basibus KM PS , & eadem altitudine; quorum stantes ad rectos angulos sunt basibus. sed $K\Phi$ solidum solido ΔE est æquale: solidum vero PI æquale solido CF . si quidem in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis. ergo & solidum ΔE solido CF æquale erit. Solida igitur parallelepipeda, que in æqualibus sunt basibus, & eadem altitudine, inter se sunt æqualia. quod demonstrare oportebat.

Ex proxima
demonstratis.
30. quins.

EVCLID. ELEMENT.

THEOREMA XXVII. PROPOSITIO. XXXII.

Solida parallelepipeda, quæ eandem habent altitudinem inter se sunt vt bases.

Sint solida parallelepipeda AB CD, quæ eandem altitudinem habeant. Dico inter se esse vt bases. hoc est vt AE basis ad basim CF, ita solidum AB ad CD solidum. applicetur enim ad rectam lineam FG parallelogrammo AE

Ex antecedente
25. huius.

æquale FH, & à basi FH eadem altitudine ipsi CD solidum parallelepipedum GK compleatur. solidum igitur AB solido GK est æquale; in æqualibus enim sunt basibus AE FH, & eadem altitudine. Itaque quoniam solidum parallelepipedum CK plano DG secatur, oppositis planis parallelo; erit vt HF basis ad basim FC, ita solidum HD ad DC solidum, atque est basis quidem FH basi AE æqualis: solidum vero GK æquale solido AB, est igitur & vt AE basis ad basim CF, ita solidum AB ad solidum CD. Quare solida parallelepipeda, quæ eandem habent altitudinem inter se sunt vt bases. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIUS.

Constat etiam solida parallelepipeda in eadem basi, vel in æqualibus basibus constituta eam inter se proportionem habere, quam altitudines.

Quod nos demonstrauimus in libro de centro grauitatis solidorum, propositione XIX.

COROLLARIUM.

Ex his igitur & iam demonstratis sequitur prismata triangulares bases habentia, quæ vel in eisdem, vel æqualibus basibus constituuntur, & eadem altitudine inter se æqualia esse. Et insuper quæ eandem habent altitudinem inter se esse, vt bases. Et quæ vel in eisdem vel æqualibus basibus constituuntur, inter se esse, vt altitudines.

28. huius.

Sunt enim ea solidorum parallelepipedorum dimidia. per bases autem prismatis intelligimus non quascumque, sed alterum dumtaxat oppositorum planorum similium & parallelorum, vt nunc in prisma triangularem basim habente, alterum triangulum, alioquin obstarent, quæ in ultima propositione huius traduntur.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO XXXIII.

Similia solida parallelepipeda inter se sunt in tripla proportione homologorum laterum.

Sint similia solida parallelepipeda AB CD; latus autem AE homologum lateri CF. Dico solidum AB ad CD solidum triplam proportionem habere eius, quæ habet AE ad CF. producantur enim EK EL EM in directum ipsis AB GE HE: & ipsi quidem CF æqualis ponatur EK, ipsi vero FN æqualis EL; & adhuc ipsi FR æqualis EM, & KL parallelogrammum, & KO solidum compleatur. Quoniam igitur duæ KE EL duabus CF FN æquales sunt; sed & angulus KEL angulo CFN est æqualis; quod & angulus AEG ipsi CFN ob similitudinem solidorum AB CD: erit & KL parallelogrammum simile parallelogrammo CN. Eadem ratione & parallelogrammum

mum KM æquale est & simile parallelogrammo CR, & adhuc parallelogrammum OE ipsi DF parallelogrammo. tria igitur parallelogramma solidi KO tribus parallelogrammis CD solidi æqualia & similia sunt. Sed tria tribus oppositis æqualia sūt & similia. totum igitur KO solidum æquale est & simile toti solido CD. compleatur GK parallelogrammū; & a basibus quidē GK KL parallelogrammīs, altitudine vero eadē ipsi AB solida cōpleatur AX LP. Et qm ob similitudinē solidorū AB CD est vt AE ad CF, ita EG ad FN, & EH ad FR; equalis autē FC ipsi EK, & FN ipsi EL, & FR ipsi EM: erit vt AE ad EK, ita GE ad EL, & HE ad EM. sed vt AE quidē ad EK, ita AG parallelogrammum ad parallelogrammum GK: vt autem GE ad EL, ita CK ad KL: & vt HE ad EM, ita PE ad KM. & vt igitur AG parallelogrammum ad parallelogrammum GK, ita CK ad KL, & PE ad KM. sed vt AG quidē ad GK, ita AB solidum ad solidū EX: vt autem GK ad KL, ita solidum XE ad PL solidum: & vt PE ad KM, ita PL solidum ad solidum KO. & vt igitur solidum AB ad solidum EX, ita EX ad PL, & PL ad KO. si autem quattuor sint magnitudines deinceps proportionales prima ad quartam triplam proportionem habet eius, quam ad secundam: ergo & AB solidum ad solidum KO triplam habet proportionem eius, quam AB ad EX. sed vt AB ad EX, ita AG parallelogrammum ad parallelogrammum GK; & AE recta linea ad ipsam EK. quare & AB solidum ad solidum KO triplam proportionem habebit eius, quā AE habet ad EK. æquale autem est solidum KO solido CD, & recta linea EK rectæ CF est æqualis. ergo & AB solidum ad solidum CD triplam habet proportionē eius, quam latus ipsius homologum AE habet ad CF homologum latus. quod demonstrare oportebat.

Ex ante cedente.
Ex antecedente.
Ex antecedente.
Ex antecedente.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum est, si quattuor rectæ lineæ proportionales fuerint, vt prima ad quartam, ita esse solidum parallelepipedum, quod fit à prima ad solidum, quod à secunda simile, & similiter descriptum; quoniam & prima ad quartam triplam proportionē habet eius, quam ad secundam.

COMMENTARIUS.

Ex proxime demonstratis, sequitur prismata similia, quæ triangulares bases habent in tripla esse proportionē homologorum laterum.

Sint similia prismata triangulares bases habentia, & similiter posita AF GN, & prismatis quidē AF basis sit triangulum ABC, & quod ipsi opponitur DEF: prismatis uero GN basis sit triangulum GHI, & ipsi oppositum LMN. Sit autem latus AB homologum lateri GH. Di eo prismata AF ad prismata GN triplam habere proportionem eius, quam habet AB ad GH. Com-

pleantur

9. diff. huius
34. huius.

pleantur enim solida parallelepipedum, & sit solidi quiddam parallelepipedum AF basis quadrilaterum ABCO, & ipsi oppositum quadrilaterum DEFP solidi vero parallelepipedum GN basis sit quadrilaterum GHKO, & quod ipsi opponitur LM NR. Itaque quia prisma AF ponitur simile prismati GN, erit parallelogrammum ABED simile parallelogrammo GHML. quare & ipsi oppositum parallelogrammum OCFP simile erit parallelogrammo QKNR. & eadem ratione demonstrabitur parallelogrammum AOPD simile ipsi GQRL. Solidum igitur parallelepipedum AF simile est solidum parallelepipedo GN. similia autem solida parallelepipedum in tripla sunt proportionem homologorum laterum. quare & ipsorum dimidia in eadem proportionem erunt. prisma igitur AF ad prisma GN tripla proportio ne habebit eius, quam habet AB ad GH. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XXXIX.
PROPOSITIO XXXIII.

Aequalium solidorum parallelepipedorum bases ex contraria parte altitudinibus respondent: & quorum solidorum parallelepipedorum bases ex contraria parte altitudinibus respondent, ea inter se sunt aequalia.

Sint aequalia solida parallelepipedum AB CD. Dico ipsorum bases ex contraria parte altitudinibus respondere: hoc est ut EH basis ad basim NP, ita esse altitudinem solidi CD ad solidi AB altitudinem. Sint enim primũ tantes AG EF LB HK CM NX OD PR ad rectos angulos basibus ipsi. Dico ut EH basis ad basim NP, ita esse CM ad AG. Si igitur

basis EH basi NP sit equalis, est autem & AB solidum æquale solidum CD; erit & CM æqualis ipsi AG, si enim basibus EH NP æqualibus existentibus non sint AG CM altitudines æquales, neque AB solidum solidum CD æquale erit. ponitur autem æqualis. non igitur inæqualis est altitudo CM altitudini AG, ergo æqualis sit necesse est; ac propterea ut EH basis ad basim NP; ita erit CM ad AG, ex quibus constat solidorum parallelepipedorum AB CD bases ex contraria parte altitudinibus respondere. At vero non sit basis EH æqualis basi NP. Sed EH sit maior. est autem & AB solidum solidum CD æquale, ergo maior est CM ipsa AG; alioqui rursus sequeretur solida AB CD æqualia non esse, quæ ponuntur æqualia. Itaque ponatur CT æqualis ipsi AG: & à basi quidem NP, altitudine autem CT solidum parallelepipedum VC compleatur. Quoniam igitur solidum AB solidum CD est æquale, aliud autem aliud quod est VC, & æqualia ad idem eandem habent proportionem; erit ut AB solidum ad solidum CV, ita CD solidum ad solidum CV. sed ut AB solidum ad solidum CV, ita basis EH ad NP basim æqualis enim sunt AB CV solida. Ut autem solidum CD ad ipsum CV, ita MP basis ad basim PT, & MC ad CT. & ut igitur basis EH ad NP basim, ita MC ad CT. est autem CT æqualis AG; ergo & ut EH basis ad basim NP, ita

7. quini.
32. huius,
25 huius,
1. sexu.

NP, ita MC ad AG, quare solidorum parallelepipedorum AG CD bases ex contraria parte altitudinibus respondent. Rursus solidorum parallelepipedorum AB CD bases ex contraria parte respondeant altitudinibus: sitq; vt EH basis ad basim MP, ita solidi CD altitudo ad altitudinē solidi AB. Dico solidum AB solido CD æquale esse. Sint enim rursus stātes ad rectos angulos basibus, & si quidem basis EH sit æqualis basi NP, estq; vt EH basis ad basim NP, ita

altitudo solidi CD ad solidi AB altitudinem: erit solidi CD altitudo altitudini solidi AB æqualis, solida autem parallelepepida, quæ sunt in æqualibus basibus, & eadem altitudine inter se æqualia sunt, ergo solidum AB solido CD est æquale, sed nō sit EH basis æqualis basi NP, & sit EH maior, maior igitur est & solidi CD altitudo altitudine solidi AB, hoc est CM ipsa AG, ponatur ipsi AG æqualis rursus CT, & similiter solidum CV compleatur. Itaque quoniam est vt EH basis ad basim NP, ita MC ad ipsam AC, æqualis autem est AG ipsi CT: erit vt basis EH ad NP basim, ita MC ad CT, sed vt basis EH ad NP basim, ita AB solidum ad solidum CV; & æqualta enim sunt solida AB CA, vt autem MC ad CT, ita & MP basis ad basim PT, & solidum CD ad CV solidum & vt igitur solidum AB ad solidum CV, ita CD solidum ad solidum CV, Quod cum utrumque solidorum AB CD ad ipsum CV eandē proportionē habeat, erit AB solidū solido CD æquale, quod demonstrare oportebat.

Non sunt autem stātes FE

BE GA KH XN DOM

C RP ad rectos angulos basibus ipsorum, & a punctis F G B K X M D R ad plana basium EH NP ducantur perpendiculares, quæ planis in punctis S T Y V Q Z occurrant & cōpleantur solida FVXQ. Dico & sic æqualibus existentibus solidis AB CD,

bases ex contraria parte altitudinibus respondere, & vt EH basis ad basim NP, ita ef se altitudinem solidi CD ad solidi AB altitudinem. Quoniam enim solidum AB solido CD est æquale, solido autem AB æquale est solidum BT, in eadem namq; sunt basi FK, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis, & solidum DC est æquale solido DZ, quod in eadem sunt basi XR, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis, erit & solidum BT solido DZ æquale, æqualium autem solidorum parallelepipedorum, quorum altitudines basibus ipsorum sunt ad rectos angulos; bases altitudinibus ex contraria parte respondent, est igitur vt FK basis ad basim XR, ita solidi DZ altitudo ad altitudinem solidi BT, atque est basis quidem FK basi EH æqualis, basis vero XR æqualis basi NP, quare vt EH basis ad basim NP, ita est altitudo solidi DZ ad solidi BT altitudinem, eadem autem sunt altitudines solidorum DZ BT, itēq; solidorum DC BA, est igitur vt EH basis ad basim NP, ita solidi DC altitudo ad altitudinem solidi AB, ergo solidorum parallelepipedorum AB CD bases ex contraria parte altitudinibus respondent. Rursus solidorum parallelepipedorum AB CD bases ex contraria parte respondent altitudinibus: sitq; vt EH basis ad basim NP, ita altitudo solidi CD ad solidi AB altitudinem, Dico solidum AB solido CD æquale esse. Eisdem namque constr-

se huius.

se huius.

Ex ante demonstratis.

etis,

Etis, quoniam ut EH basis ad basim NP, ita solidi C D altitudo ad altitudinē solidi AB; & basis quidem EH est æqualis basi FK; NP vero ipsi XR: erit ut F K basis ad basim XR, ita altitudo solidi CD ad solidi AB altitudinem. eadē autem sunt altitudines solidorum AB CD, & ipsorū BT DZ. est igitur ut FK

basis ad basim XR, ita solidi DZ altitudo ad altitudinem solidi BT. quare solidorū BT DZ parallelepipedorū bases ex contraria parte respondent altitudinibus; quorum autem solidorum parallelepipedorum altitudines sunt ad rectos angulos basis ipsorum, & bases ex contraria parte altitudinibus respondent, ea inter se sunt æqualia. ergo BT solidum DZ est æquale. sed solidū quidem BT æquale est solidō BA, etenim in eadem sunt basi FK, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis: solidum vero DZ est æquale solidō D C, si quidem in eadem sunt basi XR, & eadem altitudine, & non in eisdem rectis lineis. ergo & solidū AB solidō CD est æquale. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIUS.

Ex his, quæ ante dicta sunt, illud etiam demonstrari potest.

Æqualium prismatum & triangulares bases habentium bases ex contraria parte altitudinibus respondent: & quorum prismatum triangulares bases habentium, bases ex contraria parte altitudinibus respondent, ea inter se sunt equalia.

Sint prismata, quæ triangulares bases habent AF GN inter se æqualia. Dico bases ex contraria parte altitudinibus respondere, hoc est ut triangulum ABC ad triangulum G HK, ita esse prismatis GN altitudinem ad altitudinem prismatis AF. Compleantur enim solida parallelepipeda, quæ etiam inter se æqualia erūt, cum sint prismatum dupla: equalium autem solidorum parallelepipedorum bases ex contraria parte altitudinibus respondent, ergo ut solidi parallelepipedi AF basis ad basim solidi parallelepipedi GN, hoc est ut quadrilaterum ABCO ad quadrilaterum GHKQ, ita est solidi parallelepipedi GN altitudo ad altitudinem solidi parallelepipedi AF, sed ut quadrilaterum ABCO ad quadrilaterum GHKQ, ita triangulum ABC ad triangulum GHK. Ut igitur triangulum ABC ad triangulum GHK, ita altitudo solidi parallelepipedi GN ad altitudinem solidi parallelepipedi AF, hoc est ita prismatis GN altitudo ad altitudinem prismatis AF. Rursus prismatum AF GN bases ex contraria parte respondeant altitudinibus, hoc est ut triangulum ABC ad triangulum GHK, ita sit prismatis GN altitudo ad altitudinem prismatis AF. Dico prismata AF GN inter se æqualia esse. compleantur enim rursus solida parallelepipeda, erit quadrilaterum ABCO ad quadrilaterum GHKQ, & triangulum ABC

14. quinci.

ad triagulum GHR . quare ut solidi parallelepipedi AF basis ad basim solidi parallelepipedi GN , ita erit prismatis GN altitudo ad altitudinē prismatis AF , hoc est, ita solidi parallelepipedi GN altitudo ad altitudinem solidi parallelepipedi AF . quorum autem solidorum parallelepipedorum bases ex contraria parte altitudinibus respondent, ea inter se sunt equalia. ergo et equalia erunt eorum dimidia. prisma igitur AF prismati GN est equalē. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XX. PROPOSITIO XXXV.

Si sint duo anguli plani æquales, & in verticibus ipsorum sublimes rectæ lineæ constituentur, quæ cum rectis lineis à principio positis angulos contineant æquales, alterum alteri; in sublimibus autem sumantur quævis puncta, atque ab ipsis ad plana in quibus sunt anguli primi perpendiculares ducantur; & à punctis, quæ à perpendicularibus fiunt in planis ad primos angulos iungantur rectæ lineæ: cum sublimibus æquales angulos continebunt.

Sint duo anguli rectilinei æquales BAC EDF : & à punctis AD sublimes rectæ lineæ AG DM constituentur, quæ cum rectis lineis à principio positis æquales angulos contineant, alterum alteri: angulum quidem MDE æqualem angulo GAB , angulum vero MDF angulo GAC æqualem: & sumantur in ipsis AG DM

quævis puncta G M , à quibus ad plana per BAC EDF ducantur perpendiculares $GLMN$, occurrentes planis in punctis L N ; & LA ND iungantur. Dico angulum GAL angulo MDN equalem esse. ponatur ipsi DM equalis AH , & per H ipsi GL parallela ducatur HK . est autem GL perpendicularis ad planum per BAC . ergo & HK ad planum per BAC perpendicularis erit. Ducantur à punctis K N ad rectas lineas AB AC DE DF perpendiculares KC NF KB NE , & HC CB MF FE iungantur. Quoniam igitur quadratum ex HA æquale est quadratis ex HK KA ; quadrato autem ex HA æqualia sunt ex KC CA quadrata; erit quadratum ex HA quadratis ex HK KC CA æquale. quadratis autem ex HK KC æquale est quadratum ex H C . quadratum igitur ex HA quadratis ex HC CA æquale erit: & idcirco angulus HCA est rectus. Eadem ratione & angulus DFM rectus est. ergo angulus A CH ipsi DFM est equalis. est autem & HAC angulus equalis angulo MDF . duo igitur triacula sunt MDF HAC duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, & unum latus vni lateri æquale, quod vni equalium angulorum subtenditur, videlicet HA ipsi DM . ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, alterum alteri. quare AC est equalis DF . Similiter demonstrabimus & AB ipsi DE æquale esse, iungantur HB ME . Et quoniam quadratum ex AH est æquale quadratis ex AK KH ; quadrato autem ex AK æqualia sunt quadrata ex AB BK : erunt quadrata ex AB BK KH quadrato ex AH æqualia. Sed quadratis

s. huius.

47. primi.

47. primi.

48. primi.

16. primi.

- dratis ex BK KH æquale est ex BH quadratum; rectus enim angulus est HKB, propterea quod & HK perpendicularis est ad subiectum planum. quadratum igitur ex AH æquale est quadratis ex AB BH. quare angulus ABH rectus est. Eadem ratione & angulus DEM est rectus. est autem & BAH angulus æqualis angulo EDM, ita enim ponitur: atque est AH æqualis DM. ergo & AB ipsi DE est æqualis. Quoniam igitur AC quidem est æqualis DF, AB vero ipsi DE; erunt duæ CA AB duabus FD DE æquales. Sed & angulus BAC angulo FDE est æqualis. basis igitur BC basi EF, & triangulum triangulo, & reliqui anguli reliquis æquales sunt. ergo angulus ACB angulo DFE. est autem & rectus ACK æqualis recto DFN. quare & reliquus BCK reliquo EFN æqualis. Eadem ratione & CBK angulus est æqualis angulo FEN. Itaque duo triacula sunt BCK EFN duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, & unum latus vni lateri æquale, quod est ad æquales angulos, videlicet BC ipsi EF. ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt. æqualis igitur est CK ipsi FN. est autem & AC ipsi DF æqualis. quare duæ AC, CK duabus DF FN æquales sunt, & rectos continent angulos. basis igitur AK est æqualis basi DN. Et cum AH sit æqualis DM, erit & quod sit ex AH quadratum quadrato ex DM æquale. Sed quadrato ex AH æqualia sunt ex AK KH quadrata; etenim rectus est angulus AKH. quadrato autem ex DM æqualia sunt quadrata ex DN, NM, quod angulus DNM rectus sit. quadrata igitur ex AK KH quadratis ex DN NM sunt æqualia; quorum quadratum, ex AK æquale est quadrato ex DN. ergo reliquum ex KH quadratum reliquo quadrato ex NM est æquale. & ideo recta linea HK ipsi MN æqualis. quod cum duæ HA AK duabus MD DN æquales sint, altera alteri, & basis HK basi NM ostensa sit æqualis; angulus HAK angulo MDN æqualis. erit. quod oportebat demonstrare.

C O R O L L A R I U M .

Ex hoc manifestum est, si sint duo anguli plani rectilinei æquales, ab ipsis autem constituentur sublimes rectæ lineæ æquales, quæ cum rectis lineis à principio positis æquales contineant angulos, alterum alteri; perpendiculares, quæ ab ipsis ad plana in quibus sunt primi anguli ducantur, inter se æquales esse.

T H E O R E M A XXXI. P R O P O S I T I O XXXVI.

Si tres rectæ lineæ proportionales sint, solidum parallelepipedum, quod à tribus fit æquale est solido parallelepipedo, quod fit à media, æquilatere quidem, æquiangulo autem antedicto.

Sint tres rectæ lineæ proportionales A B C, sitq; vt A ad B, ita B ad C. Dico fo-
lidum, quod fit ex ipsis ABC æquale esse folido, quod fit ex B, æquilatèro quidem,
æquiungulo autem antedicto. Exponatur solidus angulus ad E contentus tribus an-

gulis planis DEG GEF FED; & ipsi quidem B ponatur æqualis vnaquæque ipsa-
rum DE GE EF, & solidum parallelepipedum EK compleatur: ipsi vero A ponatur
equalis LM; & ad rectam lineam LM, & ad punctum in ipsa L constituitur angu-
lo folido ad E æqualis angulus contentus NLX XLM MLN, & ponatur ipsi quidẽ
B æqualis LX, ipsi vero C æqualis LN. Quoniam igitur est vt A ad B, ita B ad C, æ-
qualis autem est A ipsi LM, & B vnicuique ipsarum LX EF EG ED, & C ipsi LN;
erit vt LM ad EF, ita DE ad LN; & circum æquales angulos MLN DEF, latera ex cõ-
traria parte sibi ipsis respondent. ergo MN parallelogrammum parallelogrammo
DF est æquale. Et quoniam duo anguli plani rectilinei æquales sunt DEF NLM, &
in ipsis sublimes rectæ lineæ constituuntur LX EG æquales inter se, & cum rectis li-
nes à principio positis æquales continentes angulos, alterum alteri gerunt perpendi-
culares, quæ à punctis G X ad plana per NLM DEF ducuntur, inter se æquales. er-
go solida LH EK eadem sunt altitudine. Quæ vero in æqualibus basibus sunt solida
parallelepipeda, & eadem altitudine inter se sunt æqualia. ergo solidum HL æ-
quale est folido EK: atque est solidum quidem HL, quod fit à tribus ABC, solidum
vero EK quod fit ex B. Si igitur tres rectæ lineæ proportionales sint, solidum paralle-
lepipedum, quod à tribus fit æquale est folido parallelepipedo, quod fit à media, æ-
quilatèro quidem, æquiungulo autem antedicto, quod demonstrare oportebat.

26. huius.

14. sexti.

Ex ante-
cedenti.

31. huius.

THEOREMA XXXII. PROPOSITIO. XXXVII.

Si quattuor rectæ lineæ proportionales sint, & quæ ab ipsis fiunt
solida parallelepipeda similia & similiter descripta proportiona-
lia erunt. Et si quæ ab ip-
sis fiunt solida parallelepi-
peda similia & similiter de-
scripta pportionalia sint;
& ipsæ rectæ lineæ propor-
tionales erunt.

Sint quattuor rectæ lineæ propor-
tionales A B C D E F G H,
fitque vt A B ad C D, ita E F G
H, & describatur ab ipsis A B C D
E F G H similia & similiter posi-
ta solida parallelepipeda K A L
C M E N G. Dico vt K A ad
L C, ita esse M E ad N G. Quo-

Ggg niam

33. huius.

niam enim solidum parallelepipedum KA simile est ipsi LC, habebit KA ad LC triplam proportionem eius, quam AB habet ad CD. Eadē ratione & solidum ME ad ipsum NG triplam proportionem habebit eius, quam habet EF ad GH: atque est ut AB ad CD, ita EF ad GH. Ut igitur AK ad LC, ita ME ad NG. Sed sit ut solidum AK ad solidum LC, ita ME solidum ad solidum NG. Dico ut recta linea AB ad rectam CD, ita esse rectam EF ad ipsam GH. Quoniam enim rursus AK ad LC triplam proportionem habet eius, quam AB habet ad CD; habet autem & ME ad NG triplam proportionem eius, quam EF ad GH; atque ut AK ad LC, ita ME ad NG: erit ut AB ad CD, ita EF ad GH. Si igitur quattuor rectæ lineæ proportionales sint & reliqua. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XXXVIII.

Si planum ad planum rectum sit, & ab aliquo puncto eorum, quæ sunt in uno plano ad alterum planum perpendicularis ducatur, ea in communem planorum sectionem cadet.

Planum enim CD ad planum AB rectum sit; cōis aut eorum sectio sit AD; & in ipso CD plano quod uis punctum E sumatur. Dico perpendicularē, quæ à puncto E ad planum AB ducitur, cadere in ipsam AD. Non enim, sed si fieri potest, cadat extra, ut EF; & plano AB in puncto F occurrat: à puncto autem F ad DA in plano AB perpendicularis ducatur FG, quæ quidem & plano CD ad rectos angulos erit; & EG iungatur. quoniam igitur F G plano CD est ad rectos angulos; contingit autem ipsam recta linea EG, quæ est in eodem CD plano: erit angulus FGE rectus. sed & EF plano AB ad rectos angulos est. rectus igitur est angulus EFG. quare trianguli EFG duo anguli duobus rectis sunt æquales; quod est absurdum. non igitur à puncto E ad AB planum perpendicularis ducta extra rectam lineam DA cadet. ergo in ipsam cadat necesse est. Si igitur planum ad planum rectum sit, & reliqua. quod oportebat demonstrare.

27. primi.

F. C. COMMENTARIUS.

Possimus et recta demonstratione uti hoc modo.

Sit rursus CD planum ad planum AB rectum: communis autem ipsorum sectio sit AD; & in plano CD quod uis punctum E sumatur. Dico perpendicularē, quæ à puncto E ad planum AB ducitur, cadere in rectam lineam AD. Ducatur à puncto E ad ipsam AD perpendicularis EF. Quoniam igitur planum CD ad planum AB rectum est, & commu-

ni planorum

ni planorum sectioni ad rectos angulos in vno plano CD ducta est EF; erit EF reliquo plano AB ad rectos angulos. Quare à puncto E ad AB perpendicularis ducta in communem planorum sectionem AD cadit. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XXXIX.

Si in solido parallelepipedo oppositorum planorum latera secetur bifariam, per sectiones verò plana ducantur, cōis planorum sectio, & solidi parallelepipedi diameter sese bifariam secabunt.

In solido enim parallelepipedo AF oppositorum planorum CF AH latera bifariam secantur in punctis KLMNXPOR. & per sectiones plana ducantur KN, XR communis autem planorum sectio YS, & solidi parallelepipedi diameter sit DG. Dico YS DG sese bifariam secare, hoc est YT quidem ipsi TS DT vero ipsi TG æqualem esse. Iungantur enim DY YE BS SG. Quoniam igitur DX parallela est ipsi OE, alterni anguli DXY YOE inter se æquales sunt. Et quoniam DX quidem est æqualis OE XY vero ipsi YO, & angulos æquales continent; erit basis DY æqualis basi YE, & triangulum DXY triangulo YOE, & reliqui anguli reliquis angulis æquales. angulus igitur XYD est æqualis angulo OYE, & ob id recta linea est DYE. Eadem ratione & BSG recta est. atque est BS æqualis SG. Et quoniam CA ipsi DB æqualis est & parallela, sed CA est æqualis & parallela ipsi EG; erit & DB ipsi EG æqualis & parallela & ipsas coniungit rectæ lineæ DE GB. parallela igitur est DE ipsi BG. & sumpta sunt in vtraque ipsarum quævis puncta DYGS, & iunctæ sunt DG YS. ergo DG YS in vno sunt plano. Quod cum DE sit parallela BG, erit & EDT angulus angulo BGT æqualis, alterni enim sunt. est autem & DTY angulus æqualis ipsi GTS. duo igitur sunt trianguula DTY GTS duos angulos duobus angulis æquales habentia, & unum latus uni lateri æquale, quod uni æqualium angulorum subtenditur, videlicet DY ipsi GS: dimidia enim sunt ipsorum DE BG. ergo & reliquos angulos reliquis angulis æquales habebunt. quare DT quidem est æqualis TG, YT vero ipsi TS. Si igitur in solido parallelepipedo, & reliqua. quod oportebat demonstrare.

29. primi.

4. primi.

14. primi.

9. huius.

33. primi.

7. huius.

29. primi.

15. primi.

16. primi.

THEOREMA XXXV. PROPOSITIO. XL.

Si sint duo prismata æquealta, quorū vnū quidē basim habeat parallelogrammū; alterum vero triangulū, & parallelogrammū duplum sit trianguli; ea inter se æqualia erunt.

Sint prismata æquealta ABCDEF GHKLMN, &

Cgg 2 unum

VNDECIMI LIBRI FINIS.

Si fuerit prima species, quod vni quoque datum habere

[illegible]

E V C L I D I S E L E M E N T O R V M

LIBER DVODECIMVS

ET SOLIDORVM SECVNDVS.

CVM SCHOLIIS ANTIQVIS

ET COMMENTARIIS.

Federici Commandini Vrbinatis.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

SIMILIA polygona, quæ in circulis describuntur, inter se sunt, vt diametro- rum quadrata.

Sint circuli $ABCDE$ $FGHKL$, & in ipsis similia polygona $ABCDE$ $FGHKL$; diametri autem circulorum sint BM GN . Dico vt quadratum ex BM ad quadratum ex GN , ita esse $ABCDE$ polygonum ad polygonum $FGHKL$. Iungantur enim BE AM GL FN . Et quoniam polygonum $ABCDE$ simile est polygono $FGHKL$; & BAE angulus angulo GFL

est æqualis: atque est ut BA ad AE , ita GF ad FL . duo igitur triacula sunt BAE angulo GFL vnum angulum vni angulo æqualẽ habentia, videlicet angulum BAE angulo GFL : circa æquales

autẽ angulos latera proportionalia. quare triangulum ABE triangulo FGL æquiangulum est; ac propterea angulus AEB æqualis est angulo FLG . Sed angulus quidem AEB angulo AMB est æqualis; in ea

dem enim circumferentia consistit. angulus autem FLG æqualis est angulo FNG . ergo & AMB angulus est æqualis angulo FNG . est autem & rectus angulus BAM æqualis recto GFN . quare & reliquis reliquo æqualis. æquiangulum igitur est triangulum AMB triangulo FGN . ergo vt BM ad GN ita BA ad GF . Sed proportionis quidem BM ad GN dupla est proportio quadrati ex BM ad quadratum ex GN ; proportionis vero BA ad GF dupla est proportio $ABCDE$ polygoni ad polygonum $FGHKL$: & vt igitur quadratum ex BM ad quadratum ex GN , ita polygonum $ABCDE$ ad $FGHKL$ polygonum. Quare similia polygona, quæ in circulis describuntur, inter se sunt, vt diametrum quadrata.

et. et. et.

et. et. et.

THEO-

EVCLID. ELEMENT.
THEOREMA II. PROPOSITIO. II.

Circuli inter se sunt vt diametrorum quadrata.

Sint circuli ABCD EFGH : diametri autem ipsorū sint BD FH. Dico vt quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita esse circulum ABCD ad EFGH circulum. Si enim non ita est; erit vt quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita circulus ABCD vel ad spaciū aliquod minus circulo EFGH, vel ad maius. Sit primum ad minus quod sit S: & in circulo EFGH describatur quadratum EFGH. Itaque descriptum in circulo quadratum

maius est dimidio circuli EFGH; quoniam si per puncta EFGH contingentes circulum ducamus, erit descripti circa circulum quadrati dimidium quadratum EFGH, descripto autem circa circulum quadrato minor est circulus. ergo quadratum EFGH maius est dimidio circuli EFGH. secetur bifariam circumferentiā EF FG GH HE in punctis KLMN: & EK KF FL LG GM MH HN NE iungantur. Vnum quodque igitur triangulorum EKF FLG GMH HNE maius est dimidio portionis circuli in qua consistit, quoniam si per puncta KLMN contingentes circulum ducamus, & parallelogramma, quę sunt in rectis lineis EF FG GH HE cōpleamus; erit vnumquodque triangulorum EKF FLG GMH HNE dimidium parallelogrammi, quod ad ipsum est: sed portio minor est parallelogrammo. quare vnumquodque triangulorum EKF FLG GMH HNE maius est dimidio portionis circuli, in qua consistit. reliquas igitur circumferentias bifariam, secantes, & iungentes rectas lineas: atque hoc semper facientes relin-

quemus tandē quasdā circuli portiones, quę minores erūt excessu, quo circulus EF GH ipsum S spaciū superat, etenim ostensum est in primo theoremate decimi libri, duabus magnitudinibus inaequalibus expositis si a maiori auferatur maiusquā dimidium, & ab eo, quod relinquitur, rursus maiusquā dimidium, & hoc semper fiat; reliqui tandem magnitudinem aliquā, quę minori magnitudine exposita sit minor. Itaque relictae sint portiones circuli EFGH in rectis lineis EK KF FL LG GM MH HN NE, quę maiores sint excessu, quo circulus EFGH ipsum S spaciū

superat. ergo reliquum EKFLGMHN polygonum maius erit spacio S. Describatur etiam in circulo ABCD polygono EKFLGMHN simile polygonum AXBOCPDR, est igitur vt quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita polygonum AXBOCPDR ad EKFLGMHN polygonum. sed & vt quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita ABCD circulus ad spaciū S. ergo & vt circulus ABCD ad spaciū S, ita polygonum AXBOCPDE ad EKFLGMHN polygonum; & permutando vt circulus ABCD ad polygonum, quod in ipso est, ita spaciū S ad polygonum EKFLGMHN. maior autem est circulus ABCD eo, quod in ipso est polygonum. quare & spaciū S maius est polygono EKFLGMHN. sed & minus, quod fieri non potest. Non igitur est vt quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita ABCD circulus ad spaciū aliquod minus circulo EFGH. similiter ostendemus neque esse vt quadratum ex FH ad quadratum ex BD, ita circulus EFGH ad aliquod spaciū minus circulo ABCD. Dico igitur neque esse vt quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita circulus ABCD ad aliquod spaciū maius circulo EFGH. si enim fieri potest, sit ad maius spaciū S. erit igitur conuertendo ut quadratum ex FH ad quadratum est BD, ita spaciū S ad ABCD circulum. sed vt spaciū S ad ABCD circulum, ita circulus EFGH ad aliquod spaciū minus circulo ABCD, vt demonstrabitur. ergo & vt quadratum

Ex antecedenti

II. quinti.

ex FH ad quadratum ex BD, ita EF
GH circulus ad aliquod spacium mi-
nus circulo ABCD, quod fieri non
posse ostensum est. Nō igitur ut qua-
dratum ex BD ad quadratū ex FH,
ita est circulus ABCD ad spacium
aliquod maius EFGH circulo. osten-
sum autem est neque ad minus. quare
ut quadratum ex BD ad quadra-
tum ex FH, ita erit ABCD circulus
ad circulum EFGH. Circuli igitur
inter se sunt, ut diametrorum qua-
drata. quod ostendere oportebat.

L E M M A

Itaque dico si spacium S sit maius circulo EFGH, esse ut spacium S
ad circulum ABCD, ita circulum EFGH ad spacium aliquod circulo A
BCD minus.

Fiat enim, ut spacium S ad circulum ABCD, ita EFGH circulus ad spacium T. Di-
co spacium T circulo ABCD minus esse. Quoniam enim est ut spacium S ad circulum
ABCD, ita EFGH circulus ad spacium T, erit permutando ut spacium S ad cir-
culum EFGH, ita ABCD circulus ad spacium T. maius autem est spacium S circulo
EFGH, ergo & ABCD circulus spacio T est maior; ac propterea ut spaciū S ad cir-
culum ABCD, ita est EFGH circulus ad spacium aliquod circulo ABCD minus.

F. C. COMMENTARIUS.

Erit descripti circa circulum quadrati dimidium quadratum EFGH

Describatur circa circulum EFGH quadratum TVZY, nempe
ductis per EFGH puncta rectis lineis, quae circulum contingant,
ut ex 9. quarti libri apparet. erit TV ipsius TE dupla. Iungan-
tur enim EG FH se se in puncto Q secantes, quae circuli diametri
erunt: atque erit Q circuli cētrum. angulus igitur QEV est rectus.
sed & rectus EQH; si quidē duae FQ QE aequales sunt duabus
HQ QE; & basis EF aequalis basi EH. ergo angulus FQE angu-
lo HQE est aequalis: & ob id uterque rectus. ex quibus sequitur
rectam lineam TEV ipsi FQH parallelam esse. & eadem ratione ostenduntur TFY, VHZ paral-
lelae ipsi EQG: & inter se se. parallelogramma igitur sunt FF' VG FE EH. Quod cum FQ sit
aequalis QH, erit et TE ipsi EV aequalis: ideoq; TV est dupla ipsius TE. similiter demonstabi-
mus & TY ipsius TF duplam. cumq; TY TV aequales sint, erunt & earum dimidia FT TE g-
quales. Et quoniam TV dupla est ipsius TE, quadratum ex TV quadrati ex TE quadrupli erit. si
miles enim rectilineae figurs in dupla sunt proportionē homologorū laterū. sed quadratū ex EF
est aequale quadratis ex FT TE, quae quidem sunt dupla quadrati ex TE. ergo quadratum ex
EF, hoc est quadratum EFGH quadrati TVZY dimidium erit. quod oportebat demonstrare.

Erit vnum quodque triangulorum CKF FLG GMH HNE dimidium paralle-
logrammi, quod ad ipsum est [Ex 41 primi.

A

18. tertij.

3. primi.
18. primi.

34. primi.

Col. 10 scx-
ti.

47. primi.

B

S C H O L I V M.

Describatur etiam in circulo ABCD polygono EKFLGMHN simile poly- C
gonum AXBOCPDR.

In

In dato circulo , descripto in circulo polygono simile polygonum describere .

Sint duo circuli, quorū centra FG, & in circulo A B C D E polygonū quoduis describatur ABCDE, iungaturq; AF BF CF DF EF: in altero autem circulo ducatur à cētro G quēdam recta linea utcunque GH: & angulo quidem A FB cōstituitur æqualis angulus HGK; angulo autem BFC angulus KGL, & angulo CFD angulus LGM, denique angulo DFE æqualis angulus MGN cōstituitur. ergo reliquis AFE reliquo HGN est æqualis, & iungantur HK KL LM MN NH. est autem vt AF ad FB, ita HG ad GK; similia enim sunt AFB LCK trianguła, quod ostensum est in theoremate sexto sexti libri elementorum. Vt igitur semidiameter circuli ad circuli semidiametrum, ita BA ad HK. similiter ostendemus & vnamquamque ipsarū BC CD DE EA ad vnamquamque KL, LM MN NH eandem habere proportionem. & sūt æquales anguli polygonorum, quoniam & triangulorum anguli æquales sunt. polygonā igitur ABCDE HKLMN singulos angulos singulis angulis æquales habet: & circa æquales angulos latera proportionalia, ergo polygonū ABCDE simile est polygono HKLMN. In dato igitur circulo HKLMN polygono ABCDE simile polygonum descriptum est. quod facere oportebat.

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

Omnis pyramis triangularem habens basim diuiditur in duas pyramides, æquales & similes inter se, quæ triangulares bases habent, similesq; toti; & in duo prismata æqualia, quæ quidem prismata dimidio totius pyramidis sunt maiora.

Sit pyramis, cuius basis quidem ABC triangulum; vertex autem punctum D. Dico pyramidem ABCD diuidi in duas pyramides æquales & similes inter se, triangularesq; bases habentes, & similes toti, & in duo prismata æqualia; & duo prismata dimidio totius pyramidis esse maiora. secantur enim AB BC CA AD DB DC bifariam in punctis E F G H K L, & EH EG GH HK KL LH EK KF FG iungantur. Quoniam igitur AE quidem est æqualis EB, AH vero ipsi HD; erit EH ipsi DB parallela. Eadem ratione & HK est parallela ipsi AB. parallelogrammum igitur est HEBK. quare HK est æqualis EB. Sed EB ipsi A E est æqualis. ergo & A E ipsi H K æqualis erit. est autē & AH æqualis HD. duę igitur AE AH duabus KH HD æquales sunt, altera alteri, & angulus E A H æqualis angulo KHD. basis igitur EH basi KD est æqualis. quare triangulum AEH æquale est & simile triangulo HKD. Eadem ratione & triangulum AHG triangulo HLD æquale est & simile. Et quoniam duę rectę lineę se se tangentes EH HG duabus rectis lineis se se tangentibus KD DL parallelę sunt, non autem in eodē plano, æquales angulos continebunt. ergo angulus EHG est æqualis angulo KDL.

KDL. Rursus quoniam duæ rectæ lineæ EH HC duabus KD DL æquales sunt, altera alteri, & angulus EHG est æqualis angulo KDL; erit basis EG basi KI. æqualis. 4. primi.
 æquale igitur est & simile triangulum EHG triangulo KDL. Eadem ratione & AEG triangulum est æquale & simile triangulo HKL. quare pyramis, cuius basis quidē est AEG triangulum, vertex autem punctum H æqualis & similis est pyramidi, cuius basis est triangulum HKL & vertex D punctum. Et quoniam vni laterum trianguli ADB, videlicet ipsi AB parallela ducta est HK; erit triagulum ADB triagulo DH K equiagulum, & latera habet proportionalia. Simile igitur est ADB triagulum triagulo DHK: & eadē ratione triagulum quidē DBC simile est, triangulo DKL; triagulum vero ADC triangulo DHL. quod cum duæ rectæ lineæ se se tangentes BA AC duabus rectis lineis se se tangentibus KH HL parallele sint, non existentes in eodem plano, æquales angulos continebunt. angulus igitur BAC angulo KHL est æqualis: atque est ut BA ad AC, ita KH ad HL. ergo ABC triangulum simile est triangulo HKL; ideoq; pyramis, cuius basis quidem triangulum ABC, vertex autem punctum D similis est pyramidi, cuius basis triangulum HKL, & vertex punctum D. sed pyramis cuius basis quidem HKL triangulum, vertex autem punctum D, ostensa est similis pyramidi, cuius basis triangulum AEG, & vertex H punctum. Quare & pyramis cuius basis triangulum ABC & vertex punctum D similis est pyramidi, cuius basis AEG triangulum, & vertex punctum H. Vraque igitur ipsarum AEG H HKLD pyramidum similis est toti pyramidi ABCD. Et quoniam BF est æqualis FC, erit ECFG parallelogrammum duplum triaguli GFC. & quoniam duo prismata æqualia sunt, quorum vnum quidem basim habet parallelogrammum, alterum vero triangulum, estq; parallelogrammum duplum triaguli; erunt ea prismata inter se æqualia. ergo prisma contentum duobus triangulis BKF EHG, & tribus parallelogramis EBFG EBKH KHFG est æquale prismati, quod duobus triangulis GFC HKL, & tribus parallelogrammis KFCL LCGH HKFG continetur. & manifestum est vtrumque ipsorum prismatum, & cuius basis est EBFG parallelogrammum, opposita autem ipsi HK recta linea: & cuius basis est GFC triangulum, & oppositum ipsi triangulum KLH, maius esse vtraque pyramidum, quarum bases quidem AEG HKL triagula, vertices autem puncta H D; quoniam si iungamus EF EH rectas lineas, prisma quidem, cuius basis est EBFG parallelogrammum, & opposita ipsi recta linea HK maius est pyramide, cuius basis EBF triangulum, vertex autem punctum K. sed pyramis, cuius basis triangulum EBF, & vertex K punctum est æqualis pyramidi, cuius basis AEG triangulum, & vertex punctum H; equalibus enim & similibus planis continentur. quare & prisma, cuius basis parallelogrammum EBFG, opposita autē ipsi recta linea HK maius est pyramide, cuius basis AEG triagulum, & vertex punctum H. prisma vero cuius basis parallelogrammum EBFG & opposita ipsi recta linea HK est æquale prismati, cuius basis GFC triangulum, & ipsi oppositum triangulum HKL: & pyramis cuius basis triangulum AEG, vertex autem H punctum, est æqualis pyramidi, cuius basis HKL triangulum, & vertex punctum D. ergo duo prismata de quibus dictum est, sunt maiora duabus dictis pyramidibus quorum bases triagula AEG HKL, vertices autem H D puncta. tota igitur pyramis cuius basis ABC triangulum, vertex autem punctum D, diuisa est in duas pyramides æquales, & similes inter se, & similes toti: & in duo prismata æqualia: suntq; duo prismata diuideo totius pyramidis maiora. quod ostendere oportebat.

P. C. COMMENTARIUS.

Et quoniam BF est æqualis FC, erit EBFG parallelogrammum duplum triaguli GFC. Iuncta enim EF quoniam BF est æqualis FC, & EG parallela ipsi EC, erit triangulum BEF æquale triagulo FGC. sed parallelogrammum EBFG duplum est triaguli BEF. ergo & ipsius FGC triaguli duplum erit.

Erunt in prismata inter se æqualia. Ex vlt. vndecimi libri.

Hbb Prisma

E V C L I D . E L E M E N T .

C Prisma quidē cuius basis est E B F G parallelogramū. & opposita ipsi recta linea H K, maius est pyramide, cuius basis E B F triangulum, vertex autem pūctum K] *Vel ut totum est sua parte maius; est enim pyramis ipsius prismatis pars quedam. sed inferius ex ijs, quae in 7. huius demonstrantur, apparebit tertiam partē esse, etiam sit tertia pars prismatis, cuius basis G F C triangulum, & oppositum ipsi triangulum K L H.*

T H E O R E M A I I I I . P R O P O S I T I O I I I I .

Si sint duæ pyramides æquealtæ, quæ triangulares bases habeant, diuidatur autem vtraque ipsarum, & in duas pyramides æquales inter se, similesq; toti, & in duo prismata æqualia, & factarum pyramidum vtraque eodem modo diuidatur, atque hoc semper fiat. erit vt vnus pyramidis basis ad basim alterius, ita & in vna pyramide prismata omnia ad prismata omnia in altera pyramidem, altitudine æqualia.

Sint duæ pyramides æquealtæ, quæ triangulares bases habeant A B C D E F, uertices autem sint pūcta G H, & diuidatur vtraque ipsarum in duas pyramides æquales inter se, similesq; toti, & in duo prismata æqualia, & factarum pyramidum vtraque eodem modo diuisa intelligatur: atq; hoc sēper fiat. Dico vt A B C basis ad basim D E F ita esse prismata oīa, quæ sunt in pyramide A B C ad prismata omnia, quæ in pyramide D E F multitudine æqualia. Quoniam enim B X quidem est æqualis X C, A L vero æqualis L C; erit X L ipsi A B parallela, & triangulum A B C

1. secū.

22. secū.

21. quīntū.

triangulo L X C simile. Eadem ratione & triangulum D E F simile est triangulo R Q F. Et quoniam B C quidem est dupla C X; E F vero dupla ipsius F Q, vt B C ad C X, ita erit E F ad F Q, & descripta sunt ab ipsis B C C X similia & similiter posita rectilinea A B C L X C; ab ipsis vero E F F Q similia & similiter posita rectilinea D E F R Q F, est igitur ut B A C triangulum ad triangulum L X C, ita triangulum D E F ad R Q F triangulum; & permutando ut triangulum A B C ad triangulum D E F, ita L X C triangulum ad triangulum R Q F. sed ut L X C triangulum ad triangulum R Q F, ita prisma cuius basis est triangulum L X C, oppositum autem ipsi O M N ad prisma cuius basis R Q F triangulum, & oppositum ipsi S T Y. & ut igitur A B C triangulum ad triangulum D E F, ita prisma, cuius basis est triangulum L X C, oppositum autem ipsi O M N ad prisma, cuius basis R Q F triangulum, & oppositum ipsi S T Y. Et quoniam duo prismata, quæ in pyramide A B C G inter se æqualia sunt, sed & quæ in pyramide D E F H prismata inter se sunt æqualia; erit ut prisma, cuius basis parallelogrammum K L X B, opposita vero ipsi recta linea M O ad prisma cuius basis L X C triangulum, & oppositum ipsi O M N, ita prisma cuius basis parallelogrammum E P R Q & opposita ipsi recta linea S T ad prisma cuius basis R Q F triangulum, oppositum uero ipsi S T Y. quare cōponēdo vt prismata K B X L M O L X C M N O ad prisma L X C M N O, ita prismata P E Q R S T R Q F S T Y ad prisma R Q F S T Y. & permutando ut prismata K B X L M N L X C O M N ad prismata P E Q R S T R Q F S T Y, ita prisma L X C M N O

MNO ad prismā RQFSTY. Vt autem prismā LXC MNO ad prismā RQFSTY, ita ostensa est basis LXC ad RQF basim, & ABC basis ad basim DEF. ergo & ut triangulum ABC ad triangulum DEF, ita quæ in pyramide ABCG duo prismata ad duo prismata, quæ in pyramide DEFH. similiter autē & si factas pyramides diuidamus eodem modo velut OMNG STYH, erit ut OMN basis ad basim STY, ita quæ in pyramide OMNG duo prismata ad duo prismata, quæ in pyramide STYH. sed ut OMN basis ad basim STY, ita basis ABC ad DEF basim. & ut igitur ABC basis ad basim DEF, ita quæ in pyramide ABCG duo prismata ad duo prismata quæ in pyramide DEFH; & quæ in pyramide OMNG duo prismata ad duo prismata, quæ in pyramide STYH; & quattuor ad quattuor. eadem autem ostenduntur & in factis prismatibus ex diuisione pyramidum AKLO, & DEFS & omnium simpliciter multitudine æqualium.

L E M M A.

At vero vt LXC triangulum ad triangulum RQF, ita esse prismā, cuius basis triangulum LXC, oppositum autem ipsi OMN ad prismā, cuius basis RQF triangulum, & oppositum ipsi STY, hoc modo ostendemus.

In eadē enim figura intelligatur ab ipsis G H punctis perpendiculares ductæ ad ABC DEF triangulorū plana, quæ inter se æquales erunt; propterea quod pyramides ipsæ æquealte ponuntur. Et quoniam duæ rectæ lineæ GC, & perpendicularis à puncto G ducta secantur à parallelis planis ABC OMN, in eadēdem proportionēs secabuntur, & secatur GC bifariam à plano OMN in puncto N. ergo & à puncto G ducta perpendicularis ad ABC planum bifariam secabitur à plano OMN. Eadē ratione & quæ à puncto H ducitur perpendicularis ad DEF planum à plano STY bifariam secabitur, & sunt æquales perpendiculares, quæ ab ipsis GH ducuntur ad plana ABC DEF. ergo & æquales quæ à triangulis OMN STY ad ipsa ABC DEF perpendiculares ducuntur. æquealta igitur sunt prismata, quorum bases triangula LXC RQF opposita autem ipsis OMN STY. quare & solida parallelepipeda, quæ à dictis prismatibus describuntur æquealta, inter se sunt ut bases, & eorū dimidia ut LXC basis ad basim RQF, ita inter se dicta prismata erūt. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIUS.

Sed ut LXC triangulum ad triangulum RQF, ita prismā cuius basis est triangulum LXC, oppositum autem ipsi OMN ad prismā cuius basis RQF triangulum & oppositum ipsi STY. Hoc ēt cōstare pōt ex corollario, quod nos ad 32 vndecimū conscripsimus.

THEOREMA V. PROPOSITIO. V.

Pyramides, quæ eadem sunt altitudine, & triangulares bases habent, inter se sunt vt bases.

Sint enim eadem altitudine pyramides, quarum bases quidem triagula ABC DEF, uertices autem puncta G H. Dico ut ABC basis ad basim DEF, sic esse pyramidem ABCG ad DEFH pyramidem. Si enim non ita sit, erit ut ABC basis ad basim DEF, sic ABCG pyramis, uel ad solidum minus pyramide DEFH, uel ad maius. Si primum ad solidum minus, sitq; Z: & diuidatur pyramis DEFH in duas pyramides æquales inter se, & similes toti, & in duo prismata æqualia. sunt igitur duo prismata dimidio totius pyramidis maiora. & rursus pyramides ex diuisione factæ similiter diuidantur, atque hoc semper fiat, quo ad sumantur quædam pyramides à pyramide DEFH,

Hbb 2 de DEFH,

EVCLID. ELEMENT.

de DEFH, quæ sint minores excessu, quo pyramis DEFH solidum Z superat. Itaque sumantur, & sint exempli. caussa pyramides DPRS STYH. erunt igitur reliqua in

Ex ante
ostendi.

pyramide DEFH prismata solido Z maiora. Diuidatur etiam ABCG pyramis in totid. m partes similiter pyramidi DEFH. ergo vt ABC basis ad basim DEF, ita quæ in pyramide ABCG prismata ad prismata quæ in pyramide DEFH; sed vt ABC basis ad basim DEF, ita pyramis ABCG ad solidum Z. & ut igitur ABCG pyramis ad solidum Z, ita quæ in pyramide ABCG prismata ad prismata, quæ in pyramide DEFH: & permutando ut ABCG pyramis ad prismata, quæ in ipsa sunt, ita solidum Z ad prismata, quæ in pyramide DEFH. maior autem est pyramis ABCG prismatibus, quæ in ipsa sunt. ergo & solidum Z prismatibus, quæ sunt in pyramide DEFH est maius. sed & minus, quod fieri non potest. Non igitur vt ABC basis ad basim DEF, ita est pyramis ABCG ad solidum aliquod minus pyramide DEFH. similiter ostendemus neque ut DEF basis ad basim ABC, ita esse pyramidem DEFH ad solidum aliquod pyramide ABCG minus. Dico igitur neque esse vt ABC basis ad basim DEF, ita ABCG pyramidem ad aliquod solidum maius pyramide DEFH. si enim fieri potest, sit ad maius, uidelicet ad solidum I. erit igitur conuertendo vt DEF basis ad basim ABC, ita solidum I ad ABCG pyramidem. Vt autem solidum I ad ABCG pyramidem, ita DEFH pyramis ad solidum aliquod minus pyramide ABCG, vt proxime ostensum fuit. & ut igitur DEF basis ad basim ABC, ita pyramis DEFH ad solidum aliquod pyramide ABCG minus. quod est absurdum. non igitur ut ABC basis ad basim DEF, ita est ABCG pyramis ad solidum aliquod maius pyramide DEFH. ostensum autem est, neque ad minus. quare vt ABC basis ad basim DEF, ita est pyramis ABCG ad DEFH pyramidem. Pyramides igitur, quæ eadem sunt altitudinis, & triangulares bases habent inter se sunt vt bases. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

Pyramides, quæ eadem sunt altitudinē, & multiangulas bases habent, inter se sunt, vt bases.

Sint eadem altitudine pyramides, quæ multiangulas bases habeant ABCDE FGHKL: uertices autem MN puncta. Dico vt ABCDE basis ad basim FGHKL, ita esse ABCDEM pyramidem ad pyramidem FGHKLM. Diuidatur enim basis quidem ABCDE in triangula ABC ACD ADE; basis uero FGHKL diuidatur in triangula FGH FHK FKL. et in uno quoque triangulo intelligantur pyramides æquales; ac pyramides, quæ à principio. Quoniam igitur est ut triangulum ABC ad triangu

lum

lum ACD , ita $ABCM$ pyramis ad pyramidē $ACDM$: & componendo ut $ABCD$ trapeziū ad triangulum ACD , ita $ABCDM$ pyramis ad pyramidē $ACDM$. sed & ut ACD triangulum ad triangulum ADE , ita pyramis ACD M ad $ADEM$ pyrami-

dem. ergo ex equali ut $ABCD$ basis ad basim ADE , ita $ABCDM$ pyramis ad pyramidem $ADEM$: & rursus componendo ut $ABCDE$ basis ad basim ADE , ita $ABCD$ EM pyramis ad pyramidem $ADEM$. Eadem ratione & ut $FGHKL$ basis ad basim FKL , ita & $FGHKL$ pyramis ad pyramidē $FKLN$ pyramidem: & quoniam duæ pyramides sunt $ADEM$ $FKLN$, quæ triangulares bases habent & eadem sunt altitudine; erit ut ADE basis ad basim FKL , ita $ADEM$ pyramides ad pyramidem $FKLN$. Quod cū sit ut $ABCDE$ basis ad basim ADE , ita $ABCD$ EM pyramis ad pyramidē $ADEM$; ut aut ADE basis ad basim FKL , ita $ADEM$ pyramis ad pyramidē $FKLN$: erit ex equali ut basis $ABCDE$ ad FKL basim, ita $ABCD$ EM pyramis ad pyramidem $FKLN$. sed et ut FKL basis ad basim $FGHKL$, ita erat et $FKLN$ pyramis ad pyramidem $FGHKL$. quare rursus ex equali ut $ABCDE$ basis ad basim $FGHKL$, ita est $ABCD$ EM pyramis ad pyramidē $FGHKL$. Pyramides igitur, quæ eadem sunt altitudine, et multangulas bases habent inter se sunt, ut bases. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIUS.

Idem etiam demonstrabitur, si bases inequalibus numero lateribus contineantur. Sint enim pyramides aequales $ABCDL$ $EFGHKM$, sitq; pyramidis $ABCDL$ basis quadrilaterum $ABCD$, & vertex L ; pyramidis vero $EFGHKM$ basis sit pentagonum $EFGHK$, & vertex M . Dico ut quadrilaterum $ABCD$ ad pentagonum $EFGHK$, ita esse $ABCDL$ pyramidem ad pyramidem $EFGHKM$. Inveniantur

AC EG IH . erit quadrilaterum $ABCD$ divisum in duo triacula ABC ACD , & pentagonum divisum in tria triacula EFG EGH EHK . Itaque intelliguntur ab unoquoque triangulo pyramides aequales primis pyramidibus. Et quoniam est ut triangulum ABC ad triangulum ACD , ita pyramis $ABCL$ ad pyramidem $ACDL$; erit componendo ut quadrilaterum $ABCD$ ad triangulum ACD , ita pyramis $ABCDL$ ad pyramidem $ACDL$. Eadem ratione demonstrabimus in altera pyramide ut quadrilaterum $EFGH$ ad triangulum EGH , ita esse pyramidem $EFGHM$ ad pyramidem $EGHM$: ut autem triangulum EGH ad triangulum EHK , ita est pyramis $EGHM$ ad pyramidem $EHKM$. quare ex equali ut quadrilaterum $EFGH$ ad triangulum EHK , ita est pyramis $EFGHM$ ad pyramidem $EHKM$: & rursus componendo ut pentagonum $EFGHK$ ad triangulum EHK , ita tota pyramis $EFGHKM$ ad pyramidem $EHKM$: convertendoq; ut triangulum EHK ad pentagonum $EFGHK$, ita pyramis $EHKM$ ad totam pyramidem $EFGHKM$. Sed ut triangulum ACD ad triangulum EHK , ita est pyramis $ACDL$ ad pyramidem $EHKM$. erat autem ut quadrilaterum $ABCD$ ad triangulum ACD ita pyramis $ABCDL$ ad pyramidem $ACDL$. Quare rursus ex equali ut quadrilaterum $ABCD$ ad pentagonum $EFGHK$, ita erit pyramis $ABCDL$ ad pyramidem $EFGHKM$.

Ex anteceden-
tibus.Ex anteceden-
tibus.

BCDL

EVLID. ELEMENT.

BCDL ad pyramidem EFGH KM. Et eodem modo in alijs demonstrabitur, quotcumque lateribus bases earum continentur.

THEOREMA VII. PROPOSITIO. VII.

Omne prisma triangularem habens basim diuiditur in tres pyramides æquales inter se, quæ triangulares bases habent.

34. primi.

g. huius.

Sit prisma cuius basis quidem triangulum ABC, oppositum autem ipsi DEF. Dico prisma ABCDEF diuidi in tres pyramides æquales inter se, quæ triangulares bases habent. Iungantur enim BD EC CD. Et quoniam parallelogrammum est ABED, cuius diameter BD, erit ABD triangulum triangulo EBD æquale. ergo pyramis cuius basis triangulum ABD, vertex autem punctum C aqualis est pyramidi, cuius basis EDB triangulum & vertex punctum C, eadem est pyramidi, cuius basis triangulum EBC, & vertex D punctum, ijdem enim planis continentur. Ergo & pyramis cuius basis triangulū ABD, vertex autem punctū C aqualis est pyramidi, cuius basis EBC triangulum, & vertex punctum D. Rursus quoniam FCBE parallelogrammum est, cuius diameter CE, triangulum ECF triangulo CBE est æquale. ergo & pyramis, cuius basis BEC triangulum, vertex autem punctum D aqualis est pyramidi, cuius basis triangulum ECF, & vertex punctum D. Sed pyramis, cuius basis quidem BCE triangulum, vertex autem punctum D ostensa est aqualis pyramidi, cuius basis triangulum ABD, & vertex C punctum. quare & pyramis cuius basis triangulum CEF, & vertex punctum D, aqualis est pyramidi cuius basis triangulum ABD, & vertex C punctum. Prisma igitur ABCDEF diuiditur in tres pyramides inter se æquales, quæ triangulares bases habent. Et quoniam pyramis, cuius basis ABD triangulum, vertex autem punctum C, eadem est pyramidi, cuius basis triangulum CAB, & vertex D punctum, ijdem namque planis continentur: pyramis aut, cuius basis triangulum ABD, & vertex punctum C, tertia pars ostensa est prismatis, cuius basis ABC triangulum, & oppositum ipsi DEF. & pyramis igitur, cuius basis triangulum ABC, vertex autem D punctum tertia pars est prismatis eandem basim habentis, videlicet ABC triangulum, & oppositum ipsi triangulum DEF.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum est omnem pyramidem tertiam partem esse prismatis basim habentis eandem, & altitudinem æquale; quoniam etiam si basis prismatis aliam quandam figuram rectilineam obtineat, & oppositam ipsi eandem, diuiditur in prismata, quæ triangulares bases habent, & quæ ipsis opponuntur.

F. C. COMMENTARIUS.

Ex hoc corollario, & antecedentibus sequitur prismata omnia, quæ eadem sunt altitudine inter se esse, ut bases sunt enim ea pyramidum eiusdem altitudinis tripla.

Sed hæc uera sint, quæ nos demonstrauimus in libro de centro grauitatis solidorum propositione. XX. & XXI.

Prismata omnia, & pyramides, quæ in eisdem, vel equalibus basibus constituuntur eam inter se proportionem habent, quam altitudines.

Et

Et insuper prismata omnia & pyramides inter se proportionem habent compo-
tam ex proportionem basium & proportionem altitudinum.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

Similes pyramides, quæ triangulares bases habent in tripla sũt
proportionem homologorum laterum.

Sint similes, & similiter po-
sitæ pyramides, quarum ba-
ses quidem triangula ABC
DEF, vertex autem GH
puncta. Dico ABCCG pyra-
midem ad pyramidem DEFH
triplam proportionem habe-
re eius, quam BC habet ad
EF. compleatur enim BGML
EHFO solida parallelepipe-
da. Et quoniam pyramis AB

CG similis est pyramidi DEFH, erit angulus ABC angulo DEF æqualis, angu-
lusq; GBC æqualis angulo HEF, & angulus ABG angulo DEH. atque est vt A B
ad DE, ita BC ad EF, & BG ad EH. Quoniam igitur est vt A B ad DE, ita BC ad
EF, & circum æquales angulos latera sunt proportionalia, parallelogrammum BM
parallelogrammo EP simile erit. Eadem ratione & parallelogrammum BN simile
est parallelogrammo ER, & parallelogrammum BK ipsi EX parallelogrammo. Tria
igitur parallelogramma BM KB BN, tribus EP EX ER sunt similia. Sed tria qui-
dem MB BK BN tribus oppositis equalia, & similia sunt, tria vero EP EX ER tri-
bus oppositis equalia, & similia. quare solida BGML EHFO similibus planis & nu-
mero æqualibus continentur; ac propterea simile est BGML solidum solido EHP
O. Similia autem solida parallelepipedum in tripla sunt proportionem homologorum
laterum. ergo solidum BGML ad solidum EHFO triplam habet proportionem eius,
quam habet latus homologum BC ad EF homologum latus. sed vt BGML solidum
ad solidum EHFO, ita ABCCG pyramis ad pyramidem DEFH; pyramis enim sexta
pars est ipsius solidi, cum prisma quod est dimidium solidi parallelepipedum, sit pyra-
midis triplum. quare & pyramis ABCCG ad pyramidem DEFH triplam proportio-
nem habebit eius, quam BC habet ad EF.

9. diffi. Vn-
decimi.
1. diffi. sexti.

24. Vndeci-
mi.

COROLLARIUM.

Ex hoc perspicuum est, & similes pyramides, quæ multiangu-
las bases habent inter se esse in tripla proportionem homologorum
laterum. ipsis enim diuisis in pyramides triangulares bases habē-
tes, quoniam & similia polygonæ, quæ sunt in basibus in similia
triangula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis; erit
vt vna pyramis in altera pyramide triangularem habens basim
ad pyramidem in altera triangularem basim habentem, ita & om-
nes pyramides in pyramide altera triangulares habentes bases ad
omnes in altera triangulares bases habentes; hoc est ita pyramis
ipsa multiangulam habens basim ad pyramidem, quæ multiangu-
lam basim habet. Sed pyramis triangularem habens basim ad py-
ramidem

E V C L I D . E L E M E N T .

ramidem, quæ triangularem basim habet est in tripla proportione homologorum laterum. & pyramis igitur multiangulam habes basim ad pyramidem similem basim habentem, triplam proportionem habebit eius, quam latus homologam habet ad homologum latus.

F. C. COMMENTARIUS.

Sint enim pyramides similes & similiter posita, quæ pro basibus pentagona habeant $ABCDEM$ $FGHKL$, sit $pyramidis$ quidem $ABCDEM$ basis pentagonum $ABCDE$, & uertex punctum M , pyramidis vero $FGHKL$ basis pentagonum $FGHKL$, & uertex punctum N . Etiam, & sit latus AB homologum lateri FG . Dico pyramidem $ABCDEM$ ad pyramidem $FGHKL$ triplam proportionem habere eius, quam habet AB ad FG . Iungantur enim AC C E FH HL . & quoniam polygonum similia in similia triangula diuiduntur, numeroꝝ æqualia, & homologa totis, erit triangulum ABC simile triangulo F

p. diff. und. CH triangulumq; ACE triangulo FHL simile, & triangulum CDE triangulo HKL est autem ob pyramidum similitudinem triangulum AMB simile triangulo FNG . quare ut MA ad AB , ita N F ad FG , ut autem BA ad AC , ita GF ad FH , ex æquali igitur ut MA ad AC , ita LF ad FH . non aliter demonstrabitur ut MC ad CA , ita NH ad HF . ergo triangulum MAC simile est triangulo NH . est autem & triangulum MBC simile triangulo NGH ob similitudinem pyramidum. pyramis igitur, cuius basis triangulum ABC & uertex punctum M punctum, similis est pyramidi, cuius basis triangulum FGH , & uertex punctum N : quippe quod similibus triangulis continentur. Ea dem ratione demonstrabitur pyramis $ACEM$ similis pyramidi $FHLN$, & pyramis $CDEM$ pyramidi HKL . sed pyramis quidem $ABCM$ ad pyramidem $FGHN$ triplam habet proportionem eius, quam habet AB ad FG , & pyramis $ACEM$ ad pyramidem $FHLN$ triplam proportionem habet eius, quam AC habet ad FL , hoc est quam AB habet ad FG , est enim ut PA ad AE , ita G F ad FL , & permutatio ut PA ad GF , ita AE ad FL . pyramis autem $CDEM$ ad pyramidem HKL triplam proportionem habet eius, quam CD ad HK , hoc est quam AB ad FG . Quoniam enim ut AB ad BC , ita est FG ad CH , ut autem BC ad CD , ita CH ad HK ; erit ex æquali ut AB ad C D , ita FG ad HK , & permutatio ut AB ad FG , ita CD ad HK . Ut igitur una antecedentium ad rnam consequentium, hoc est pyramis $ABCM$ ad pyramidem $FGHN$, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes, hoc est ita tota pyramis $ABCDEM$ ad totam pyramidem $FGHKL$. ergo & pyramis $ABCDEM$ ad pyramidem $FGHKL$ triplam habebit proportionem eius, quam habet AB ad FG . quod demonstrare oportebat.

C O R O L L A R I U M .

Ex his colligitur pyramides similes, quæ multiangulas bases habent diuidi in pyramides triangulares bases habentes similes, & numero æquales & homologas totis.

Sed quod Euclides demonstravit in pyramidibus similibus, nos etiam in similibus prismatibus demonstrare aggrediemur. & quamquam in antecedente libro à nobis demonstratū sit prismata similia, quæ triangulares bases habent in tripla esse proportionem homologorum laterum, tamen hoc loco placuit illud etiam aliter demonstrare in hunc modum.

THEOREMA. I.

Prismata similia, quæ triangulares bases habent in pyramides similes, numeroq; æquales diuiduntur, & prismata ad prismata triplam habet proportionem eius, quam latus homologum habet ad homologum latus.

Sint prismata similia, & similiter posita AE GM & prismatis quidem AE basis sit triangulum ABC , & quod ipsi opponitur triangulum DEF : prismatis vero GM basis sit GHK triangulum & oppositum ipsi LMN : sitq; latus AB lateri CH homologum. Dico prismata AE GM diuidi in pyramides similes, numeroq; æquales, & prismata AE ad prismata GM triplā habere proportionem eius, quam habet AB ad GH . Iunguntur enim BD LC CD HL MK KL . erit ex iam demonstratis prismata AE diuisum in tres pyramides æquales inter se, & prismata GM similiter diuisum in totidem pyramides æquales, quæ pyramidibus prismatis AE similes erunt. Quoniam enim ob prismatum similitudinem parallelogrammum $ABED$ simile est parallelogrammo $GHML$, erit ut DA ad AB , ita LG ad GH : atque est angulus DAB æqualis angulo LGH , triangulum igitur DAB triangulo LGH est simile. Eadem ratione & triangulum DEB triangulo LMH , & alia triangula, quæ sunt parallelogrammorum dimidia alijs triangulis, quibus respondent similia demonstrabuntur. Et quoniam ut DC ad CA , ita est LK ad KG ; ut autem AC ad CB , ita GK ad KH : erit ex æquali ut DC ad CB , ita LK ad LH . Et similiter demonstrabitur ut DB ad BC , ita esse LH ad HK . quare triangulum DBC simile est triangulo LHK . Quod cum triangulum DAB simile sit triangulo LGH , triangulumq; DBC simile triangulo LHK , & triangulum DAC ipsi LGK ; erit pyramis cuius basis triangulum ABC , vertex autem D punctum simile pyramididi, cuius basis triangulum GHK , & uertex punctum L . Eandem ob causam erit pyramis cuius basis triangulum EBC , & vertex D punctum, similis pyramididi cuius basis MHK triangulum, uertex autem punctum L , & adhuc pyramis, cuius basis triangulum ECF , & uertex punctum D similis pyramididi, cuius basis triangulum MKN , & uertex L punctum. Quoniam igitur pyramis $ABCD$ similis est pyramididi GHL , similes autem pyramides sunt in tripla proportionem homologorum laterum; habebit pyramis $ABCD$ ad pyramidem GHL triplam proportionem eius, quam habet AB ad GH . Pyramis autem $EBCD$ ad pyramidem MHL triplam habet proportionem eius, quam BC habet ad HK , hoc est quam AB habet ad GH ; est enim ut A B ad BC , ita GH ad HK ; & permutando ut AB ad GH , ita BC ad HK . & similiter pyramis ECF ad pyramidem $MKNL$ proportionem habet triplam eius, quam EF habet ad MN , hoc est EC ad HK , hoc est AB ad GH . Ut igitur unam antecedentium ad unam consequentium, ita omnia antecedentia ad omnia consequentia. Quare ut pyramis $ABCD$ ad pyramidem GHL , ita totum prismata AE ad totum prismata GM . sed pyramis $ABCD$ ad pyramidem GHL triplam habet proportionem eius, quam habet AB ad GH . Ergo & prismata AE ad prismata GM triplam proportionem habebit eius, quam AB ad GH .

ALITER. Quoniam igitur pyramis $ABCD$ similis est pyramididi GHL ; similes autem pyramides sunt in tripla proportionem homologorum laterum: habebit pyramis $ABCD$ ad pyramidem GHL triplam proportionem eius, quam AB habet ad GH . sed ut pyramis $ABCD$ ad pyramidem GHL , ita prismata AE ad prismata GM , sunt enim prismata pyramidum tripla, ergo & prismata AE

9. diff. unde
cimi.

6. sexti.

9. diff. unde
cimi.

9. diff. unde
cimi.

12. quinti.

ad prismā GM triplam proportionem habebit eius, quam habet AB ad GH. Prismata igitur similia, quae triangulares bases habent, diuiduntur in pyramides similes, numeroꝝ æquales, & prismā ad prismā triplam habet proportionem eius, quam latus homologum habet ad homologum latus, quod demonstrare oportebat.

T H E O R E M A. I I.

Prismata similia, quæ multiangulas habent bases in similia prismata triangulares bases habentia diuiduntur, numeroꝝ æqualia, & homologa totis: & prismā ad prismā triplam proportionem habet eius, quam latus homologum habet ad homologum latus.

Sint duo prismata similia, & similiter posita AK MV, & prismatis quidem AK basis sit pentagonum ABCDE, & ipsi oppositum FGHL; prismatis uero MV basis sit pentagonum MNOPQ, & oppositum ipsi RSTVX: sitq; latus AB lateri MV homologum. Dico prismata AK MV diuidi in prismata, quae triangulares bases habent, similia & numero æqualia, & homologa totis; & prismā AK ad prismā MV triplam proportionem habere eius, quam habet AB ad MN. Iungantur EB EC LG LH QN QO XS XT. pentagonū igitur ABCDE diuisum erit in tria triangula ABE EBC ECD; pentagonūq; FGHL diuisum in tria triangula FGL LGH LHK: & similiter pentagonum MNOPQ diuisum erit in tria triangula MNQ QNO QOP: &

20. sexti.

9. diffi. unde
cimi
7. diffi. sexti.

34. primi.

pentagonum RSTVX in totidem triangula RSX XST XTV. Intelligatur unumquodque prismata AK MV diuisū in tria prismata triangulares bases habentia ductis planis per LG GB, perq; LH HC, & per XS SN, & per XT TO. Quoniam igitur similia polygona in similia triangula diuisuntur, numeroꝝ æqualia, & homologa totis; erunt triangula ABE FGL similia triangulis MNQ RSX, & triangula EBC LGH triangulis QNO XST, triangulaq; ECD LHK ipsis QOP XTV similia. Et quoniam prismā AK ponitur simile prismati MV, parallelogrammū ABGF simile erit parallelogrammū MNSR, & parallelogrammū AELF simile ipsis MQXR. quare ut LE ad EA, ita XQ ad QM: ut autē AE ad EB, ita MQ ad QN. ex equali igitur ut LE ad EB, ita XQ ad QN; ideoq; ut BG ad GL, ita NS ad SX, angulus autem LEB est æqualis angulo XQN ob similitudinem prismatum. si enim similibus existentibus prismatibus AK MV, angulus LEB non est æqualis angulo XQN, alter eorum maior erit. sit maior XQN, & ad rectam lineam BE, & ad punctum in ipsa E angulo NQX constituitur æqualis angulus BET, ut recta linea ET terminetur à plano pentagoni FGHEB in puncto Y; & iungantur FY YK. erit pentagonum FGHY simile pentagono RSTVX, sed & pentagonum FGHL ponitur eidem simile. pentagonum igitur FGHL simile est pentagono FGHY. quare angulus FLK æqualis est angulo FYK. sed & maior. quod fieri nō potest. Non igitur similibus existentibus prismatibus angulus LEB inæqualis est angulo XQN. quare necessarius est æqualis; & ob id angulus EBG æqualis est angulo QNS. ergo & qui ipsis opponuntur LGB GLE angulis XSN SXQ, sicut æquales. parallelogrammum igitur BELG simile est parallelogrammo NQXS. Eadem ratione demonstrabitur parallelogrammum LECH simile parallelogrammo XQOT. ergo prismā AL, cuius basis triangulum ABE, & ipsi oppositum FGL simile est prismati MX, cuius basis triangulum MNQ, & oppositum ipsi RSTVX; similibus enim planis continentur. est autem ob prismatum similitudinem, & parallelogrammum BCHG simile parallelogrammo NOTS, & parallelogrammum EDKL simile ipsi QP/X. ergo & prismā BH, cuius basis triangulum EBC, & ipsi oppositum LGH est simile prismati NT, cuius basis triangulum QNO, & ipsi oppositum XST, & denique prismā CL cuius basis triangulum ECD, & oppositum ipsi LSK, simile est prismati OX, cuius basis triangulum QOP, & quod ipsi opponitur XTV. similia autem, prismata

prismata, quæ triangulares bases habent sunt in tripla proportionē homologorum laterum, quod nos & ad 34. propositionem antecedentis libri, & proxime aliter demonstrauimus. prisma igitur AL ad prisma MX triplam proportionem habet eius, quam habet AB ad MN , & prisma BH ad prisma NT triplam habet proportionem eius, quam BC habet ad NO , hoc est AB ad MN . prisma autem CL ad prisma OX triplam proportionem habet eius, quam habet CD ad OP , hoc est AB ad MN ut supra demonstrauimus. homologa enim latera omnia inter se eandem habent proportionem. Quare ut vnum antecedentium ad vnum consequentium, ita omnia antecedētia ad omnia cōsequentia. Ut igitur prisma AL ad prisma MX , ita omnia prismata ad omnia prismata, hoc est totum prisma AK ad totum prisma MV . prisma autem AL ad prisma MX triplam habet proportionem eius, quam habet AB ad MN . ergo & prisma AK ad prisma MV triplam proportionem habebit eius, quam AB ad MN . Similia igitur prismata, quæ multiangulas bases in similia prismata triangulares bases habentia diuiduntur, numeroꝝ æqualia, & homologa totis, & prisma ad prisma triplam proportionem habet eius, quam habet latus homologum ad homologum latus. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA IX. PROPOSITIO. IX.

Aequalium pyramidum, & triangulares bases habentium bases ex contraria parte altitudinibus respondent: & quarum pyramidum triangulares bases habentium bases ex contraria parte altitudinibus respondent, illæ sunt æquales.

Sint enim pyramides equales, quæ triangulares bases habeant, ABC DEF, vertices vero G H puncta. Dico pyramidum ABCG DEFH bases ex contraria parte altitudinibus respondere, & vt ABC basis ad basim DEF, ita esse pyramidis DEFH altitudinem ad altitudinem pyramidis ABCG. Cõpleantur enim BG ML EHQ solida parallelepipeda. Et quoniam pyramis ABCG est equalis pyramidis DEFH, argue est pyramidis quidem ABCG sex

triplum BGML solidum, pyramidis vero DEFH sextuplum solidum EHFO; erit
 solidum BGML folido EHFO æquale. æqualium autem solidorum parallelepædo
 rum bases ex contraria parte altitudinibus respondent. est igitur ut BM basis ad ba
 sim EP, ita EHFO solidi altitudo ad altitudinem solidi BGML. Sed ut BM basis ad
 basim EP, ita ABC triangulum ad triangulum DEF. ergo & ut ABC triangulum
 ad triangulum DEF, ita solidi EHFO altitudo ad altitudinem solidi BGML. Sed so
 lidi quidem EHFO altitudo eadem est altitudini pyramidis DEFH; solidi ve
 ro BGML altitudo eadem est altitudini pyramidis ABCG. est igitur ut AB
 C basis ad basim DEF, ita pyramidis DEFH altitudo ad altitudinem pyrami
 dis ABCG, quare pyramidum ABCG DEFH bases ex contraria parte altitudini
 bus respondent. Sed pyramidum ABCG DEFH bases ex contraria parte respon
 deant altitudinibus, fitque ut ABC basis ad basim DEF, ita pyramidis DEFH altitu
 do ad altitudinem pyramidis ABCG. Dico ABCG pyramidem pyramidis DEFH
 æqualem esse. Iisdem enim constructis, quoniam ut ABC basis ad basim DEF, ita est
 DEFH pyramidis altitudo ad altitudinem pyramidis ABCG; ut autem ABC ba
 sis ad basim DEF, ita BM parallelogrammum ad parallelogrammum EP: erit & ut paralle
 logrammum EM ad EP parallelogrammum, ita pyramidis DEFH altitudo ad altitudinem pyra

១៩. ឧបនិស្សិត

34. unde
mi.

15. എയ്ഡ്

15. quinqu.

midis ABCG. Sed pyramidis quidē DEFH altitudo eadē est altitudinī solidi parallelepīdi EHPO; pyramidis vero ABCG altitudo eadem est altitudinī solidi parallelepīdi BGML. est igitur ut B M basis ad basim EP, ita EHP O solidi parallelepīdi altitudo ad altitudinem solidi parallelepīdi BGML. Quorum autem solidorum parallelepīdorum basēs ex contraria parte altitudinibus respondent, ea sunt aequalia. solidum igitur parallelepīdum BGML aequale est solido parallelepīdo EHPO atque est solidi quidem BGML sexta pars pyramis ABCG; solidi vero EHPO itidem sexta pars pyramis DEFH, ergo pyramis ABCG pyramidi DEFH est equalis. Aequalium igitur pyramidum, & triangulares basēs habentium, basēs ex contraria parte altitudinibus respondent, & quarum pyramidum triangulares basēs habentium basēs ex contraria parte altitudinibus respondent illae sunt aequales. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIUS.

Sed & in pyramidibus, quae multiangulas basēs habent idem demonstrabitur hoc modo. Aequalium pyramidum & multiangulas basēs habentium, basēs ex contraria parte altitudinibus respondent: & quarum pyramidum multiangulas basēs habentium basēs ex contraria parte altitudinibus respondent, illae sunt aequales.

Sint pyramides aequales A BCDL EFGHKM, & pyramidis quidem ABCDL basis sit quadrilaterum ABCD, & vertex punctum L; pyramidis vero EFGHKM sit basis pentagonum EFGHK, & vertex M. Dico basēs ex contraria parte altitudinibus respondere: hoc est quadrilaterum ABCD ad pentagonum EFGHK, ita esse ut pyramidis EFGHKM altitudo ad altitudinem pyramidis ABCDL. Fiat enim ex xxxv. sexti triangulum in quo N aequale quadrilatero ABCD: & rursus fiat aliud triangulum in quo O aequale pentagono EFGHK, et à triangulo N erigatur pyramis aequalis pyramidi ABCDL: à triangulo autem O erigatur alia pyramis aequalis pyramidi EFGHKM. erit igitur pyramis N aequalis pyramidi ABCDL: sunt enim in basibus aequalibus, & eandem habent altitudinem.

huius.

diem: & simili ratione pyramis O aequalis erit pyramidi EFGHKM. ergo pyramis N pyrami
di O est aequalis. aequalium autem pyr. in dum, & triangulares bases habentium, bases ex con
traria parte altitudinibus respondent. Ut igitur triangulum N ad triangulum O, ita pyramidis O
altitudo ad altitudinem pyramidis N. Sed ut triangulum N ad O triangulum, ita quadrilaterum
ABCD ad pentagonum EFGHK, utrumque enim utriusque est aequale. ergo ut quadrilaterum A
BCD ad pentagonum EFGHK, ita pyramidis O altitudo ad altitudinem pyramidis N; hoc est al
titudo pyramidis EFGHKM ad pyramidis ABCDL altitudinem. Sed isdem stantibus sit ut qua
drilaterum ABCD ad pentagonum EFGHK, ita pyramis EFGHKM altitudo ad altitudinem py
ramidis ABCDL. Dico pyramidem ABCDL pyramidi EFGHKM aequalem esse. est enim ut qua
drilaterum ABCD ad pentagonum EFGHK, ita triangulum N ad O triangulum. quare ut triangu
lum N ad triangulum O, ita pyramidis EFGHKM altitudo ad altitudinem pyramidis ABCDL,
hoc est ita pyramidis O altitudo ad altitudinem pyramidis N. quarum autem pyramidum trian
gulares bases habentium, bases ex contraria parte altitudinibus respondent, illae sunt aequales.
aequalis igitur est pyramis N pyramidi O; ac propterea pyramis ABCDL pyramidi EFGHKM
est aequalis. Aequalium igitur pyramidum & multiangulas bases habentium, & reliqua. quod
demonstrare oportebat.

COROLLARIUM.

Ex praedictis colligitur prismatum omnium equalium bases ex contraria parte
altitudinibus respondere: & quorum prismatum bases ex contraria parte altitudi
nibus respondent, ea esse aequalia; prismata enim in eisdem basibus constituta, & ea
dem altitudine sunt pyramidum tripla.

THEOREMA X. PROPOSITIO. X.

Omnis conus tertia pars est cylindri, qui eandem basim habet
& altitudinem aequalem.

Habeat enim conus eandem basim, quam cy
lindrus, videlicet circulum ABCD, & altitudi
nem aequalem. Dico conum tertiam partem esse
cylindri, hoc est cylindrum coni triplum esse. Si
enim cylindrus non sit triplus coni, vel maior erit,
quam triplus, vel minor. Sit primū maior quam
triplus; & describatur in ABCD circulo quadra
tum ABCD. ergo quadratum ABCD maius est,
quam dimidium ABCD circuli. & a quadrato
ABCD erigatur prisma aequalit cylindro, quod
quidem prisma maius erit, quam cylindri dimi
dium; quoniam si circa circulum ABCD quadratum describatur, erit inscriptum
quadratum dimidium circumscripti: & sunt ab eisdem basibus erecta solida paral
lelepipeda aequalia, nimirum prismata ipsa. quare prismata inter se sunt ut bases,
& prisma igitur erectum a quadrato ABCD dimidium est prismatis erecti a qua
drato quod circa circulum ABCD describitur, atque est cylindrus minor prismate ere
cto a quadrato quod describitur circa circulum ABCD. prisma igitur erectum a qua
drato ABCD aequalit cylindro dimidio cylindri est maius. fecerunt circiferentia
AB BC CD DA bisariam in punctis EFGH; & AE EB BF FC CG GD DH HA
iungantur. Vnūquodque igitur triangulorum AEB BFC CGD DHA maius est dimi
dio portionis circuli ABCD, in qua consistit, ut superius demonstratum est. erigantur
ab unoquoque triangulorum AEB BFC CGD DHA prisma aequalia cylindro. ergo
& vnumquodque eorum prismatum maius est dimidio portionis cylindri
quae ad ipsum est, quoniam si per puncta EFGH parallele ipsi AB BC CD DA
ducatur, & compleatur in ipsis AB BO CD DA parallelogramma: a quibus solida
parallele-

Ex coroll 7.
huius.

parallelepipeda æqualta cylindro erigantur: erunt vnusquisque eorum dimidia prismata ea, quæ sunt in triangulis AEB BFC CGD DHA. & sunt cylindri portiones erectis solidis parallelepipedis minores. ergo & prismata quæ in triangulis AEB BFC CGD DHA maiora sunt dimidio portionum cylindri, qui ad ipsa sunt. Itaque reliquas circumferentiâs secantes bifariam, iungentesq; rectas lineas, & ab vnoquoque triangulorum erigentes prismata æqualta cylindro, & hoc semper facientes quoad tandem relinquuntur quadam portiones cylindri, quæ sint minores excessu, quo cylindrus ipse coni triplum superat, reliquantur iam & sint AE EB BF FC CG GD DH HA. reliquum igitur prisma, cuius basis quidem polygonum AEBFCGDH, altitudo autem eadem, quæ

Ex i. decim.

Ex corol. 7. huius.

cylindri, maius est, quàm triplum coni. Sed prisma cuius basis AEBFCGDH polygonum, & altitudo eadem, quæ cylindri, triplum est pyramidis, cuius basis polygonum AEBFCGDH, uertex autem idem, qui coni, & pyramis igitur, cuius basis polygonum AEBFCGDH, uertex autem idem qui coni, maior est cono, qui basim habet ABCD circum. Sed & minor, ab ipso enim comprehenditur, quod fieri non potest. Non igitur cylindrus maior erit, quàm triplus coni. Dico insuper neq; cylindrum minorem esse, quàm triplum coni, si enim fieri potest, sit cylindrus minor, quàm triplus coni. erit conuertendo conus maior, quàm tertia pars cylindri. Describatur in ABCD circulo quadratum ABCD, ergo quadratum ABCD maius est quàm dimidiu ABCD circuli; & à quadrato ABCD erigatur pyramis, uerticem habens eundem quæ conus, pyramis igitur erecta maior est quàm coni dimidium: quoniam, ut ante demonstraui, si circa circum quadratum describatur, erit quadratum ABCD dimidium eius, quod circa circum descriptum est: & si à quadratis erigantur solida parallelepipeda æqualta cono, quæ & prismata appellantur, erit quod à quadrato ABCD erigitur dimidium

5. quinti.

eius, quod erectum est à quadrato circa circum descripto, etenim inter se sunt ut bases. quare & tertia partes ipsarum. pyramis igitur, cuius basis quadratum ABCD, dimidia est eius pyramidis, quæ à quadrato circa circum descripto erigitur. Sed pyramis erecta à quadrato descripto circa circum, maior est cono, ipsum namque comprehendit. ergo pyramis cuius basis ABCD quadratum, vertex autem idem qui coni, maior est, quàm coni dimidium. secantur circumferentiæ AB BC CD DA bifariam in punctis EFCH. & iungatur AE EB BF FC CG GD DH HA. & vnum quod quæ igitur triangulorum AEB BFC CGD DHA maius est, quàm dimidium portionis circuli ABCD, in qua consistit. erigantur ab vnoquoque triangulorum AEB BFC CGD DHA pyramides verticem habentes eundem, quem conus. ergo & vnaquæque pyramidum eodem modo erectarum, maior est, quàm dimidiu coni portionis, quæ est ad ipsam. Itaque reliquas circumferentiâs secantes bifariam, iungentesq; rectas lineas, & ab vnoquoque triangulorum erigentes pyramidem uerticem habentem eundem, quem conus, & hoc semper facientes, relinquemus tandem quosdam coni portiones, quæ maiores erunt excessu, quo conus tertiam cylindri partem superat. Relinquantur & sint, quæ in ipsis AE EB BF FC CG GD DH HA: reliqua igitur pyramis cuius basis polygonum AEBFCGDH, & uertex idem qui coni, maior est, quàm tertia cylindri pars. sed pyramis cuius basis polygonum AEBFCGDH, uertex autem idem qui coni, tertia pars est prismatis, cuius basis polygonum AEBFCGDH, altitudo autem eadem quæ cylindri. prisma igitur, cuius basis AEBFCGDH polygonum, & altitudo eadem, quæ cylindri, maius est cylindro, cuius basis

est

est circulus ABCD. sed & minus, ab ipso enim comprehenditur, quod fieri non potest. Non igitur cylindrus minor est, quam triplus coni. ostensum autem est neque maiorem esse, quam triplum. ergo cylindrus coni triplus sit necesse est; ac propterea conus est tertia pars cylindri. Omnis igitur conus tertia pars est cylindri, eadē, quam ipse basim habentis, & altitudinem æqualem. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIUS.

Eodem modo illud etiam demonstrabitur in conis & cylindris scalenis.

COROLLARIUM.

Ex quibus constat omnem conum siue rectum, siue scalenum tertiam partem esse cylindri siue recti siue scaleni, qui eandem basim habet, & æqualem altitudinem.

THEOREMA XI. PROPOSITIO XI.

Coni & cylindri, qui eandem habent altitudinem inter se sunt vt bases.

Sint eadem altitudine coni, & cylindri, quorum bases circuli ABCD EFGH axes autem KL MN, & diametri basium AC EG. Dico vt ABCD circulus ad circulum EFGH, ita esse conum AL ad EN conum. si enim non ita sit; erit vt ABCD circulus ad circulum EFGH, ita conus AL ad aliquod solidum minus cono EN, vel ad maius. sit primum ad minus, quod sit X, & quo minus est solidum X cono EN, ei æquale sit I solidum. conus igitur EN, ipsis solidis X I est æqualis. Describatur in EFGH circulo quadratum EFGH. ergo quadratum maius est, quam dimidium circuli. erigatur à quadrato EFGH pyramis æque alta cono. pyramis igitur erecta maior est, quam coni dimidium; nam si circa circulum quadratum describamus, & ab ipso erigamus pyramidem æque altam cono; erit inscripta pyramis pyramidis circumscriptæ dimidia; etenim inter se sunt vt bases: conus autem circumscripta pyramide est minor. ergo pyramis, cuius basis quadratum EFGH, uertex autem

autem idem qui conus, maior est quam conus dimidium. secantur circumferentia EF FG GH HE bifariam in punctis OPRS; & OE EP FF FR RG GS SH iungantur. Vnumquodque igitur triangulorum HOE EPF FRG GSH maius est, quam dimidium portionis circuli, in qua consistit. erigatur ab unoquoque triangulorum HOE EPF FRG GSH pyramis aequalta cono. ergo & unaquaeque erectarum pyramidum maior est, quam dimidium portionis conus, quae est ad ipsam. Itaque reliquas circumferentias secantes, bifariam; & iungentes rectas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes pyramides aequaltas cono, atque hoc semper facientes, relinquentur tandem aliquas portiones conus, quae solido I minores erunt. relinquantur & sint quae in ipsis HO OE EP FF FR RG GS SH. reliqua igitur pyramis, cuius basis polygonum HOEPFRGS, altitudo autem eadem, quae conus, maior est solido X. Describatur in circulo ABCD polygonum HOEPFRGS simile & similiter positum polygonum DTAYBQCV, & ab ipso erigatur pyramis aequalta cono AL. Quoniam igitur est ut quadratum ex AC ad quadratum ex EG ita DTAYBQCV polygonum ad polygonum HOEPFRGS; ut autem quadratum ex AC ad quadratum ex EG, ita ABCD circulus ad circulum EFGH; erit ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita polygonum DTAYBQCV ad polygonum HOEPFRGS. sed ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita conus AL ad X solidum; & ut polygonum DTAYBQCV ad polygonum HOEPFRGS, ita pyramis cuius basis DTAYBQCV polygonum, vertex autem punctum L ad pyramidem, cuius basis polygonum HOEPFRGS, & vertex punctum N. Ut igitur conus AL ad X solidum, ita pyramis, cuius basis polygonum DTAYBQCV, & vertex punctum L ad pyramidem, cuius basis polygonum HOEPFRGS, & vertex N punctum. quare permutando ut conus AL ad pyramidem, quae in ipso est, ita solidum X ad pyramidem, quae in cono EN, conus autem AL maior est pyramide, quae in ipso. maius igitur est solidum X pyramide, quae in cono EN. sed & minus, quod fieri non potest. Non igitur ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita est AL conus ad solidum aliquod minus cono EN. Si similiter demonstrabitur neque ut EFGH circulus ad circulum ABCD, ita esse conum EN ad aliquod solidum minus cono AL. Dico praeterea neque esse ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita AL conum ad aliquod solidum maius cono EN. Si enim fieri posset, sit ad solidum maius, quod sit Z. ergo conuertendo ut EFGH circulus ad circulum ABCD, ita erit solidum Z ad AL conum. sed ut solidum Z ad AL conum, ita conus EN ad aliquod solidum minus cono AL. & ut igitur EFGH circulus ad circulum ABCD, ita conus EN ad aliquod solidum minus

v. huius.

z. huius.

minus cono AL, quod fieri non posse ostensum est. Non igitur ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita conus AL ad aliquod solidum maius cono EN, ostensum autem est neque esse ad minus, ergo ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita est conus AL ad EN conum, sed ut conus ad conum, ita est cylindrus ad cylindrum, est enim uterque utriusque triplus, & ut igitur ABCD circulus ad circulum EFGH, ita in ipsis cylindri æquealti conis, ergo conī & cylindri quī eandem habent altitudinē inter se sunt ut bases, quod demonstrare oportebat.

15. quint.
Ex antecede-
ntibus.

F. C. COMMENTARIUS.

Et hoc in conis & cylindris scalenis similiter demonstrabitur.

THEOREMA XII. PROPOSITIO. XII.

Similes conī & cylindri inter se sunt in tripla proportione diametrorum, quæ sunt in basibus.

Sint similes conī & cylindri, quorum bases quidem circuli ABCD EFGH, diametri vero basium BD FH: & axes conorum, vel cylindrorum HK MN. Dico conū cuius basis ABCD circulus, vertex autē punctum L ad conū, cuius basis circulus EFGH, vertex autem N punctum, triplam habere proportionē eius, quā habet BD ad FH. Si enim non habet conus ABCDL ad conum EFGHN triplam proportionem eius, quam BD habet ad FH, habebit ABCDL conus ad ali- quod solidum minus cono EFGHN triplam proportionem, uel ad maius. habeat primum ad minus, quod sit X; & describatur in EFGH circulo quadratum EFGH. quadratum igitur EFGH maius est, quā dimidium EFCH circuli, & erigatur à quadrato EFGH pyramis æquealta cono, ergo erecta pyramis maior est, quā conī dimidia. Itaque secetur EF

FG GH HE circumferentiæ bifariam in punctis OPRS & iungatur EO OF FP PG GR RH HS SE. Vnumquodque igitur triangulorū EOF FPG GRH HSE maius est quā dimidium portionis circuli EFGH, in qua consistit. & eriga-

tur ab vnoquoque triangulorum EOF FPG GRH HSE pyramis eundem verticē habēs, quem conus, ergo & vnaquæque erectarum pyramidum maior est quā dimidia portionis conī, quæ est ad ipsam, secantes igitur reliquas circumferentiās bifariam, tūgentesq; rectas lineas, & ab vnoquoque triangulorum erigentes pyramides eundem habentes verticem, quem conus; atque hoc semper facientes eadem relinquemus quasdam conī portiones, quæ minores erūt excessu, quo conus EFGHN ipsum X solidum superat. Relinquatur & sint quæ in ipsis EO OF FP PG GR RH

KKK HS SE.

HS SE. Reliqua igitur pyramis, cuius basis quidem polygonum EOFGGRHS, uer-
tex autem N punctum, maior est solido X. Describatur etiam in circulo ABCD po-
lygono EOFGGRHS simile, & similiter positum polygonum ATBYCVDQ: à quo
erigatur pyramis eundem verticem habens, quem conus; & triangulorum continē-
tium pyramidem, cuius basis quidem est polygonum ATBYCVDQ, vertex autem
punctum L, vnū sit LBT; triangulorū vero, continentīū pyramidem, cuius basis
EOFGGRHS polygonū,
& vertex punctū N, vnū sit NFO, & iungatur KT, M
O. Quoniam igitur conus ABC
D similis est cono EFGH,
erit vt BD ad FH, ita KL
axis ad axē MN, vt autē BD
ad FH, ita BK ad FM, ergo
& ut B K, ad F M, ita KL
ad MN, & permūtando vt
BK ad KL, ita FM ad MN.
perpendicularis enim vtra-
que est, & circa equales an-
gulos BKL FMN latera sūt
proportionalia. Simile igitur
est BKL triangulum triangulo FMN. Rursus quoniam est vt BK ad KT, ita F
M ad MO, & circa equales angulos BKT FMO latera sunt proportionalia; etenim
quę pars est angulus BKT quattuor rectorum, qui sunt ad K centrū, eadem est pars
& angulus FMO quattuor rectorum, qui sunt ad centrum M: erit triangulum BKT
triangulo FMO simile. Et quo-
niā ostensum est vt BK ad KL
ita esse FM ad MN; equalis autē
est BK ipsi KT, & FM ipsi MO:
erit vt TK ad KL, ita OM ad
MN: & circa equales angulos
TKL OMN latera sunt pro-
portionalia; recta enim sunt.
triangulum igitur LKT simi-
le est triangulo NMO. Quod
cum ob similitudinem trian-
gulorum BKL FMN, sit vt LB ad BK, ita NF ad FM; ob similitudinem uero triangu-
lorum BKT FMO, vt KB ad BT, ita MF ad FO: erit ex aequali vt LB ad BT, ita NF
ad FO. Rursus cum ob similitudinem triangulorum LTK NOM, sit vt LT ad TK,
ita NO ad OM; & ob similitudinem triangulorum KBT OMF, vt KT ad TB, ita
MO ad OF: ex aequali erit vt LT ad TB, ita NO ad OF. ostensum autem est & vt TB
ad BL, ita OF ad FN. quare rursus ex aequali vt TL ad LB, ita ON ad NF. triangulo-
rum igitur LTB NOF proportionalia sunt latera, ideoque aequalia sunt LTB
NOF trianguła, & inter se similia. quare & pyramis, cuius basis triangulum BKT,
uerter autem L punctum, similis est pyramidi, cuius basis FMO triangulum, & uer-
tex punctum N; similibus enim planis continentur, & multitudine aequalibus. pyra-
mides autem similes, & quę triangulares bases habent in tripla sunt proportione
homologorum laterum. ergo pyramis BKTL ad pyramidem FMON triplā habet
proportionem eīus, quam BK habet ad FM. Similiter à punctis quidem AQDV CY
ad K, à punctis uero ESHRGP ad M ducentes rectas lineas, & à triangulis erigentes
pyramides vertices eosdē habentes, quos coni, ostendemus & vnāquamque pyrami-
dū eiusdē ordinis ad vnāquāq; alterius ordinis triplā proportionē habere eius, quā
hēt BK latus homologū ad homologū latus FM, hoc est quā BD ad FH. Sed vt vnū
antecedentium ad vnū consequentium, ita omnia antecedentia ad omnia conse-
quentia

quantia est igitur & ut BKTL pyramis ad pyramidem FMON, ita tota pyramis, cuius basis ATBYCVDQ polygonum, uertex autem punctum L ad totam pyramidem cuius basis polygonum EOFPGRHS & uertex punctum N. quare & pyramis, cuius basis ATBYCVDQ polygonum, uertex autem punctum L ad pyramidem cuius basis polygonum EOFPGRHS & uertex punctum N, triplam proportionem habet eius, quam BD habet ad FH. ponitur autem conus, cuius basis circulus ABCD uertex autem punctum L ad solidum X triplam proportionem habere eius, quam BD ad FH. Ve igitur conus, cuius basis circulus ABCD, uertex autem punctum L ad solidum X, ita est pyramis, cuius basis ATBYCVDQ polygonum, uertex autem punctum L ad pyramidem, cuius basis polygonum EOFPGRHS & uertex punctum N, & permutando, ut conus, cuius basis circulus ABCD, uertex autem punctum L ad pyramidem, quæ in ipso est, cuius basis ATBYCVDQ polygonum, uertex autem punctum L, ita solidum X ad pyramidem, cuius basis polygonum EOFPGRHS, & uertex punctum N. dictus autem conus maior est pyramide, quæ in ipso; etenim eam comprehendit. maior igitur est & solidum X pyramide, cuius basis polygonum EOFPGRHS, uertex autem punctum N. sed & minus, quod fieri non potest. non igitur conus, cuius basis ABCD circulus, & uertex punctum L ad aliquod solidum minus cono, cuius basis circulus EFGH & uertex N punctum, triplam proportionem habet eius, quam BD habet ad FH. similiter demonstrabimus neque conum EFGHN ad aliquod solidum minus cono ABCDL triplam proportionem habere eius, quam habet FH ad BD. Itaque dico neque ABCDL conum ad solidum maius cono EFGHN triplam habere proportionem eius, quam BD habet ad FH. si enim fieri potest habeat ad aliquod solidum maius, quod sit Z. convertendo igitur solidum Z ad conum ABCDL triplam proportionem habet eius, quam FH ad BD: ut autem solidum Z ad conum ABCDL, ita EFGHN conus ad aliquod solidum minus cono ABCDL. ergo & conus EFGHN ad solidum aliquod minus cono ABCDL triplam proportionem habebit eius, quam FH habet ad BD, quod fieri non posse demonstratum est. non igitur ABCDL conus ad solidum aliquod maius cono EFGHN triplam proportionem habet eius, quam BD ad FH. ostensum autem est neque ad minus. quare conus ABCDL ad EFGHN conum triplam proportionem habet eius, quam BD ad FH. Ut autem conus ad conum, ita cylindrus ad cylindrum. cylindrus enim in eadem existens basi, in qua conus, & ipsi æqualeus coni triplum est. cum ostendimus sit omnem conum tertiam partem esse cylindri, eandem quam ipse basim habet, & æqualem altitudinem. ergo & cylindrus ad cylindrum triplam proportionem habebit eius, quam BD habet ad FH. similes igitur coni, & cylindri inter se sunt in tripla proportionem diametrorum, quæ sunt in basibus. quod demonstrare oportebat.

15. quia
10. huius.

F. C. COMMENTARIUS.

Precedens demonstratio in conis & cylindris tantum recti; congruit, quam nos uniuerse ad omnes tam rectos quam scalenos accommodabimus hoc passo.

Similes coni & cylindri omnes inter se in tripla sunt proportionem diametrorum, quæ sunt in basibus.

Sint similes coni & cylindri, quorum bases quidem circuli ABCD EFGH, et axes KL MN: & per axes ducantur plana ad rectos angulos basibus, quæ bases fecerint, sintq; eorum planorum & basium communes sectiones BD FH, quæ circulorum diametri erunt. Dico conum cuius basis ABCD circulus, et uertex punctum L ad conum cuius basis circulus EFGH, uertex autem N punctum triplam proportionem habere eius, quam habet BD ad FH. si enim non ita sit, habebit conus ABCDL ad aliquod solidum minus cono EFGHN triplam proportionem eius, quam BD habet ad FH, vel ad maius. Habeat primum ad solidum minus, quod sit X, & describatur in EFGH circulo quadratum EFGH. erit igitur quadratum EFGH maius, quam dimidium EFGH circuli. Erigatur ad quadrato EFGH pyramis æquealta cono, quæ maior erit, quam coni dimidia, & secetur EF FG GH HE circumferentiae bisariam in punctis OPRS, iunganturq; EO OF FP PG GR RH HS SE. Vnumquodque igitur triangularum EOF FPG GRH HSE maius est, quam

KKK 2 dimidium

dimidiū portionis cir-

culi EFGH, in qua cō-

sistit: & erigatur ab

unoquoque triangulo

ru EOF FPG GRH

HSE pyramis eun-

dem, quem conus ver-

titem habens. ergo et

unaqueque erectarū

pyramidū maior est,

quā dimidia coni por-

tionis, q. ac est ad ip-

sam secantes igitur re-

liquas circūferentias

bisariam, imgetesq; rectas lineas, & ab

unoquoq; triangulorum erigētes pyrami-

des, eundem habentes verticem, quem co-

nus: atque hoc semper facientes tandem

relinquemus quasdā coni portiones, que

minores erunt excessu, quo conus EFG

HN ipsum X solidum superat. relinqua-

tur, & sunt quae in ipsis EO OF FT. PG

GR RH HS SR. reliqua igitur pyramis,

cuius basis polygonum EOFPGRHS, ver-

tex autem punctum N. solido X est maior.

Describatur etiam in circulo ABCD ipsi EOFPGRHS polygono simile & similiter. positum po-

lygonum ATBYCVDQ. atque ab eo erigatur pyramis eundem, quem conus verticem habens:

& triangulorum quidem continentium pyramidem, cuius basis polygonum ATBYCVDQ; &

vertex punctum L, unum aliquod sit LBT: triangulorum vero continentium pyramidem, cuius basis

EOFPGRHS polygonum, & vertex punctum N, unum sit NFO: & KT MO iungantur. Quoniam

igitur conus ABCD similis est cono EFGH, erit ex diffinitione conorum similium, quā nos in prin-

cipio antecedentis libri attulimus, ut diameter BD ad diametrum FH, ita axis KL ad MN axē:

ut autem BD ad FH, ita BK ad FM. ergo & ut BK ad FM, ita KL ad MN; & permittendo ut B

K ad KL, ita FM ad MN. atque est angulus BKL aequalis angulo FMN ex eadem diffinitione co-

norum similium. cum igitur circa aequales angulos BKL FMN latera sint proportionalia; erit B

KL triangulum simile triangulo FMN. Et quoniam ut BK ad KT, ita est FM ad MO; angulus au-

tem BKT est aequalis angulo FMO: etenim quae pars est angulus BHT quattuor rectorū, qui sunt

ad centrum K, eadem est pars angulus FMO quattuor rectorū, qui sunt ad M centrum. rursus

erunt circa aequales angulos BKT FMO latera proportionalia. triangulum igitur BKT triangu-

lo FMO est simile. Itaque quoniam ostensum est ut BK ad KL, ita FM ad MN; aequalis autem est

BK ipsi KT, & FM ipsi MO: erit ut TK ad KL, ita OM ad MN: & sunt in conis rectis anguli TK

L OMN inter se aequales, quod recti sunt. ergo in ipsis cum circa aequales angulos TKL OMN

latera sint proportionalia; erit triangulum LKT simile triangulo NMO. At in conis scalenis hoc

modo demonstrabitur. Ducantur à verticibus eorum LN ad rectos angulos planis basium rectae li-

neae LQ NT, quae cadent in communes planorum & basium sectiones BD FH ex 38. antecedent-

is libri. & iungantur TQ OT. Cum igitur ex diffinitione conorum similium angulus LEQ sit e-

qualis angulo NMT, & anguli LQK NTM utrique recti: erit & reliquus LKQ reliquo MNT

aequalis, & triangulum LQK simile triangulo NTM. rursus cum angulus EKT sit equalis angulo

FMO; & reliquus ex duobus rectis TKQ aequalis erit reliquo OMT. est autem ob similitudinem

triangulorum LQK NTM, ut LQ ad KL, ita LQ ad MN; & ob similitudinem triangulorum BKL

FMN, ut LK ad KB, hoc est ad KT ipsi aequalem, ita NM ad MF, hoc est ad MO. ergo ex aequa-

li ut LQ ad KT, ita TM ad MO. & cum circa aequales angulos TKQ OMT latera sint proporti-

onalia, erit & triangulum KTQ simile. ergo ut LQ ad QK, ita NT ad TM: & ut LQ

ad QT, ita TM ad MO. quare ex aequali ut LQ ad QT, ita NT ad TO. & sunt anguli LQT NTO

inter

6. secti.

inter se aequales, quod utriusque recti ex diffinitione rectae lineae, quae ad planum recta est curvatur igitur circa aequales angulos $\angle P T N \angle O$ latera sunt proportionalia, sequitur triangula quoque $\triangle P T N$ $\triangle O T$ inter se similia esse, ideoque ut ET ad TQ , ita NO ad OT ; & ut TQ ad TK , ita OT ad OM . ex aequali igitur ut LT ad TK , ita est NO ad OM . demonstratum autem est ut LT ad TK , ita esse NM ad MO . quare convertendo ut TK ad KL , ita OM ad MN . rursus igitur ex aequali ut TL ad LK , ita est ON ad NM . quod cum triangula $\triangle LKT$ $\triangle NMO$ latera habeant proportionalia, aequiangula sunt, & ob inter se similia. Itaque quoniam ob similitudinem triangulorum $\triangle BKL$ $\triangle FMN$ est ut LB ad EK , ita NF ad FM , & ob similitudinem triangulorum $\triangle BKT$ $\triangle FMO$, ut KB ad BT , ita MF ad FO , erit ex aequali ut LB ad BT , ita NF ad FO ; & convertendo ut TB ad BL , ita OF ad FN . Rursus quoniam ob similitudinem triangulorum $\triangle LKT$ $\triangle NMO$, ut LT ad TK , ita est NO ad OM , & ob similitudinem triangulorum $\triangle KET$ $\triangle MFO$, ut KT ad TB , ita MO ad OF ; ex aequali erit ut LT ad TB , ita NO ad OF . ostensum autem est & ut TB ad BL , ita OF ad FN . rursus igitur ex aequali ut TL ad LB , ita erit ON ad NF . quare triangulorum $\triangle LTB$ $\triangle NOF$ latera sunt proportionalia, ob eandem causam & aequiangula & inter se similia erunt. pyramis igitur, cuius basis triangulum $\triangle BKT$, vertex autem punctum L similis est pyramidi, cuius basis triangulum $\triangle FMO$, & vertex N punctum, similibus enim planis continentur & numero aequalibus. pyramides autem similes in tripla sunt proportionem homologorum laterum. ergo pyramis $\triangle BKT$ ad pyramidem $\triangle FMO$ triplam habet proportionem eius, quam BK habet ad FM . Reliqua similiter ut in antecedente demonstrabimus.

THEOREMA XIII. PROPOSITIO. XIII.

Si cylindrus plano secetur oppositis planis parallelo, erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.

Cylindrus enim AD plano GH secetur oppositis planis AB CD parallelo, & occurrat axis EF in K puncto. Dico ut BC cylindrus ad cylindrum GD , ita esse EK axem ad axem KF . producat enim EF axis ex utraque parte ad puncta LM : & ipsi quidem EK axi exponantur aequales quotcumque EN NL ; ipsi vero EK aequales quotcumque FX XM : & per puncta $LNXM$ ducantur plana ipsi AB CD parallela; atque in planis per $LNXM$ circa centra $LNXM$ intelligantur circuli OP RS TY VQ aequales ipsi AB CD ; & cylindri PR RB DT TQ intelligantur. Quoniam igitur axes LN NE EK inter se sunt aequales, erunt cylindri PR RB BG inter se ut bases: bases autem aequales sunt. ergo & cylindri PR RB BG sunt aequales. Quod cum axes LN NE EK inter se aequales sint, itaque cylindri PR RB BG inter se aequales; sitque ipsorum LN NE EK multitudo aequalis multitudini ipsorum PR RB BG : quotuplex est axis KL ipsius EK axis, totuplex erit & PG cylindrus cylindri GB . Eadem ratione & quotuplex est MK axis ipsius axis KF , totuplex est & QG cylindrus cylindri GD . & si quidem axis LK sit aequalis axi KM , erit & PG cylindrus cylindro GQ aequalis. Si autem axis LK maior sit axe KM , & cylindrus PG maior erit cylindro GQ , & si minor minor. quattuor igitur existentibus magnitudinibus, videlicet axibus EK KF , & cylindris BG GD sumpta sunt aequemultiplicia, axis quidem EK & BG cylindri, nempe axis KL , & cylindrus PG ; axis vero KF , & cylindri GD equemultiplicia, axis scilicet KM , & GQ cylindrus, & demonstratum est si LK axis superat axem KM & PG cylindrum superare cylindrum GQ , & si aequalis aequalis, & si minor minor. est igitur axis EK ad axem KF , ut BG cylindrus ad cylindrum GD . Quare si cylindrus plano secetur oppositis planis parallelo, erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem, quod demonstrare oportebat.

Illud etiam contingit in cylindro scaleno, quod eadem ratione demonstrabitur.

Ex quibus constat si quilibet cylindrus secetur plano basi- bus parallelo, ut cy- lindrus ad cylindrum, ita esse altitudinem cylindri ad cylindri altitudinem.

In cylindris enim rectis illud perspicuum est, cum eorum altitudines ab axibus determinentur. in scalenis vero facili apparere debet ducta recta linea EL a puncto E ad basis planum perpendiculari, quae plano per GH ducto in M occurrat. Quo- niam enim duae rectae lineae EF EL secantur à pla- nis parallelis, in eadem proportionem secabuntur. quare ut EK ad KF, ita erit EM ad ML, ac pro- pterea ut EG cylindrus ad cylindrum GD, ita cylindri EG altitudo EM ad ML altitudinem cylindri GD, quod propositum fuerat demon- strandum.

THEOREMA XIII. PROPOSITIO. XIII.

In aequalibus basi- bus existentes coni, & cylindri inter se sunt ut altitudines.

Sint enim in aequalibus basi- bus AB CD cylin- dri EB FD. Dico ut EB cylindrus ad cylindrum FD, ita esse G H axem ad axem KL. producatu- enim KL axis ad punctum N; ponaturq; ipsi GH axi equalis LN; & circa axem LN intelligatur cy- lindrus CM. Quoniam igitur cylindri EB CM eandem habent altitudinem, inter se sunt ut ba- ses: bases autem sunt aequales: ergo & cylin- dri EB CM inter se aequales erunt. Et quoniam cylindrus FM plar secatur CD, oppositis planis parallelo, erit ut CM cylindrus ad cylindrum FD, ita axis LN ad KL axem. aqualis autem est cylin- drus quidem CM cylindro EB; axis vero LN axi GH. est igitur ut EB cylindrus ad cylindrum FD, ita axis GH ad KL axem: ut autem EB cylindrus ad cylindrum FD, ita ABC conus ad conum CDK; cylindri enim sunt conorum tripli. ergo & ut GH axis ad axem KL, ita est ABC co- nus ad conum CDK, & cylindrus EB ad FD cylindrum. In basi- bus igitur aquali- bus existentes coni & cylindri inter se sunt, ut altitudines. quod oportebat demon- strare.

Dico ut EB cylindrus ad cylindrum FD, ita esse GH axem ad axem KL. Hoc est ita esse altitudinem GH ad KL altitudinem. in rectis enim conis, de quibus Euclides loquitur, alti- tudo ipsa axis est, siue ab axe determinatur; in scalenis uero non item. sed tamen nihilominus de- monstrabitur conos & cylindros in aequalibus basi- bus constitutos inter se esse ut axes, & ob id, ut eorum altitudines ex his, quae nos proxime diximus.

THEOREMA XV. PROPOSITIO XV.

Aequalium conorum, & cylindrorum bases ex contraria parte altitudinibus

altitudinibus respondent, & quorum conorum & cylindrorū bases ex contraria parte altitudinibus respondent, illi inter se sunt æquales.

Sint æquales conī & cylindri, quorum bases quidem ABCD EFGH circuli, & diametri ipsorum AC EG; axes autem KL MN; qui quidem & conorum vel cylindrorum sunt altitudines. & compleantur cylindri AX EO. Dico cylindrorum AX EO bases ex contraria parte altitudinibus respondere, hoc est vt ABCD basis ad basim EFGH, ita esse altitudinē MN ad altitudinem KL. altitudo enim KL vel æqualis est altitudini MN, vel non æqualis. Sit primum æqualis: atque est AX cylindrus æqualis cylindro EO. qui autem eandem habent altitudinem conī, & cylindri inter se sunt vt bases. æqualis igitur est basis ABCD basi EFGH, ac propterea ex contraria parte sibi ipsis respondent. etq; vt basis ABCD ad EFGH basim, ita MN altitudo ad altitudinem KL.

Non sit autem altitudo KL altitudini MN æqualis, sed maior sit MN, & auferatur ab ipsa MN altitudini LK æqualis PM, & per P fecetur EO cylindrus plano TYS oppositis planis circulorum EFGH RO parallelo, intelligaturq; cylindrus ES, cuius basis quidem, EFGH circulus, altitudo autem PM. Quoniam igitur AX cylindrus æqualis est cylindro EO, alius autem aliquis est cylindrus ES; erit vt AX cylindrus ad cylindrū ES, ita cylindrus EO ad ES cylindrū. Sed ut AX cylindrus ad cylindrum ES, ita basis ABCD ad EFGH basim; cylindri enim AX ES eandem habent altitudinem. vt autem cylindrus EO ad ES cylindrū, ita MN altitudo ad altitudinē MP. nam cylindrus EO secatur plano TYS oppositis planis parallelo. est igitur vt ABCD basis ad basim EFGH, ita altitudo MN ad MP altitudinem. æqualis autē est MP altitudo altitudini KL. quare vt basis ABCD ad EFGH basim, ita MN altitudo ad altitudinem KL. æqualium igitur cylindrorum AX EO bases ex contraria parte altitudinibus respondent.

Sed cylindrorū AX EO bases ex contraria parte respondeant altitudinibus: sitq; ut ABCD basis ad basim EFGH, ita altitudo MN ad KL altitudinē. Dico AX cylindrū cylindro EO æqualē esse. ipsdē enim cōstruētis quoniā vt ABCD basis ad basim EFGH, ita altitudo MN ad KL altitudinem; altitudo autem KL æqualis est altitudini MP: erit vt ABCD basis ad basim EFGH, ita MN altitudo ad altitudinem MP. Sed vt ABCD basis ad basim EFGH, ita A X cylindrus ad cylindrum ES; eandem enim habent altitudinem. ut autem MN altitudo ad altitudinem MP, ita cylindrus EO ad ES cylindrum. est igitur vt A X cylindrus ad cylindrū ES, ita cylindrus EO ad ES cylindrum. cylindrus igitur AX cylindro EO est æqualis. similiter autem & in conis. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIUS.

Hoc in conis, & cylindris rectis tantum Euclides demonstrauit. Sed & in omnibus demonstrabitur hoc modo.

Sint æquales conī, & cylindri siue recti siue scaleni, quorum bases circuli ABCD EFGH: altitudines autem LK NM; & compleantur AX EO cylindri. Dico cylindrorum AX EO bases ex contraria parte altitudinibus respondere; hoc est vt ABCD basis ad basim EFGH, ita esse altitudinem NM ad LK altitudinem. Nam vel altitudines LK NM sint æquales vel inæquales: si æquales, conī æquales sint cylindri; erunt & bases æquales inter se: cylindri enim & conī qui eandem

7. huius

8. huius

13. huius.

96.

eandem habet altitudinem, inter se sunt ut bases. quare bases ex contraria parte altitudinibus respondent. Si vero altitudines non sunt aequales, Sit maior NM altitudo; à qua auferatur PM aequalis altitudini LK, & per P ducatur planum cylindrum secans, oppositis planis parallelum TTS, intelligaturq; cylindrus ES, cuius basis circulus EFGH; & altitudo PM. Itaque quoniam cylindrus AX est aequalis cylindro EO, & alius cylindrus est ES; erit ut AX cylindrus ad cylindrum ES, ita cylindrus EO ad ES cylindrum. Sed ut AX cylindrus ad cylindrum ES, ita basis ABCD ad EFGH basim, cum eandem habeant altitudinem. Ut autem cylindrus EO ad ES cylindrum, ita NM altitudo ad altitudinem MP; cylindrus enim EO secatur plano TTS oppositis planis parallelo. quare ut cylindrus EO ad cylindrum SE, ita est NP altitudo ad altitudinem PM: & componendo ut cylindrus EO ad ES cylindrum, ita NM altitudo ad altitudinem MP. Ut igitur basis ABCD ad EFGH basim, ita NM altitudo ad altitudinem MP. aequalis autem est altitudo MP altitudini LK. ergo ut ABCD basis ad basim EFGH, ita est altitudo NM ad LK altitudinem.

xx. huius.
xx. huius.

Sed cylindrorum AX EO bases ex contraria parte altitudinibus respondeant, sitq; ut ABCD basis ad basim EFGH, ita altitudo NM ad LK altitudinem. Dico cylindrum AX cylindro EO aequalem esse. isdem enim constructis quoniam ut ABCD basis ad basim EFGH, ita altitudo NM ad LK altitudinem, altitudo autem LK est aequalis ipsi PM altitudini; erit ut ABCD basis ad basim EFGH, ita NM altitudo ad altitudinem MP. Sed ut ABCD basis ad basim EFGH, ita cylindrus AX ad ES cylindrum, quod eandem altitudinem habeat: & ut NM altitudo ad altitudinem MP, ita EO cylindrus ad cylindrum ES. Ut igitur cylindrus AX ad ES cylindrum, ita cylindrus EO ad cylindrum ES. quare AX cylindrus cylindro EO est aequalis. similiter autem & in conis. Aequalium igitur conorum, & cylindrorum bases ex contraria parte altitudinibus respondent, & quorum conorum, & cylindrorum bases ex contraria parte altitudinibus respondent, illi inter se sunt aequales. quod demonstrare oportebat.

xx. huius.

Sed & illud verum est, quod nos demonstravimus in commentariis in librum Archimedis de conoidibus, & sphaeroidibus ad propositionem XI.

Cylindri omnes, et conii inter se proportionem habent compositam ex proportionibus basium & ex proportionibus altitudinum.

PROBLEMA I. PROPOSITIO. XVI.

Duobus circulis circa idem centrum existētibus in maiori polygono æqualium, & numero parium laterum describere, quod minorem circulum non tangat.

Sint dati duo circuli ABCD EFGH circa idem centrum K. oportet in maiori circulo ABCD polygonum æqualium, & numero parium laterum describere, non tangens minorem circulum EFGH. Ducatur enim per K centrum recta linea BD: atque à puncto G ipsi BD ad rectos angulos ducatur AG: & ad C producatur. ergo AC circulum EFGH tangit. Itaque circumferentiam BAD bifariam secantes, & eius dimidium rursus bifariam, & hoc semper facientes tandem reliquemus circumferentiam

circumferentiam minorem ipsa AB. Relinquatur, sitq; LD, & à puncto L ad BD perpendicularis agatur LM, & ad N producat, iunganturq; LD DN LN. ergo LD ipsi DN est æqualis. Et quoniam LN parallela est AC, & AC tangit circumulum EFGH; ipsa LN circumulum EFGH non tanget, & multo minus tanget circumulum EFGH recta linea LD DN. Quod si ipsi LD æquales deinceps circulo ABCD aptabimus, describetur in eo polygonum æqualium & numero parium laterum non tangens minorem circumulum EFGH. quod facere oportebat.

F. C. COMMENTARIIS.

Ergo LD ipsi DN est æqualis] Recta enim linea BD per centrum ducta rectam lineam quandam LN, non ductam per centrum ad rectos angulos secat, quare & bisariam ipsam secabit. atque erit LM æqualis MN. cum igitur duæ LM MD duabus NM MD æquales sint & angulos æquales contineant, nempe rectos: erit basis LD basi LN æqualis.

PROBLEMA II. PROPOSITIO XVII.

Duabus sphaeris circa idem centrum existentibus in maiori solidum polyhedrum describere, quod minoris sphaeræ superficiem non tangat.

Intelligantur duæ sphaeræ circa idem centrum A. oportet in maiori sphaera describere solidum polyhedrum minoris sphaeræ superficiem non tangens. secetur sphaeræ plano aliquo per centrum ducto. erunt sectiones circuli, quoniam diametro manente, & semicirculo circumducto. sphaera facta est. ergo in quacumque positione semicirculum intelligamus, quod per ipsum producit planum in superficie sphaeræ circumlunum efficit, & constat circumulum maximum esse, cum diam-

Ex anteceden-
te.

18. undecimi

18. undeci-
mi.

a. sexti.

6. undecimi.
11. primi.

ter sphaera, quæ & semicirculi, & circuli diameter est, maior sit omnibus rectis lineis, quæ in circulo vel sphaera ducuntur. sit igitur in maiori quidem sphaera circulus BCDE, in minori autem circulus FGH; & ducantur ipsorum duæ dimetri ad rectos inter se angulos BD CE: & duobus circulis circa idem centrum existentibus B CDE FGH, in maiori BCDE polygonum æqualium & parium numero laterum describatur, nõ tãgēs minorē circulū FGH; cuius latera sint in BE circuli quadrante BK KL LM ME: & iuncta KA producatur ad N: & à puncto A plano circuli BCD E ad rectos angulos cõstituatur AX; quæ superficiei sphaeræ in puncto X occurrat: & per AX, & vtramque ipsarum BD KN plana ducantur, quæ ex iam dictis efficiēt in superficie sphaeræ maximos circulos. Itaque efficiant, & sint in diametris BD KN eorum semicirculi BXD KXN. Quoniam igitur XA recta est ad planum circuli BCDE, erunt omnia plana, quæ per ipsam XA transeunt ad planum circuli BCDE recta. quare & semicirculi BXD KXN recti sunt ad idem planum. Et quoniam semicirculi BXD KXN æquales sunt, in æqualibus enim cõsistit BD KN diametris; erūt & eorū quadrantes BE BX KX inter se æquales. quot igitur latera polygoni sunt in quadrante BE, tot erunt & in quadrantibus BX KX æqualia ipsi BK KL LM ME. Describantur & sint BO OP PR RX KS ST TY YX: iunganturq; SO TP YR, & ab ipsis OS ad planum circuli BCDE perpendiculares ducantur. cadēt hæ in communes planorum sectiones BD KN, quoniam & plana semicirculorum BXD KXN ad planum circuli BCDE recta sunt. Itaque cadant, sintq; OVSQ: & VQ iungatur. Cum igitur in æqualibus semicirculis BXD KXN æquales circumferentiæ sumptæ sint BO KS, & ductæ perpendiculares OV SQ: erit OV quidem ipsi SQ æqualis, BV vero æqualis KQ, est autem & tota BA æqualis toti KA. ergo & reliqua VA reliquæ QA est æqualis. Vt igitur BV ad VA, ita KQ ad QA, ideòq; VQ ipsi EK parallela est. Quod cum vtraque ipsarum OV SQ recta sit ad circuli BCDE planū, erit OV ipsi SQ parallela. ostensa autem est & ipsi æqualis. ergo QV SO æquales

9. undecimi.

C

8. undecimi.

sunt & parallelæ. Et quoniam QV parallela est ipsi SO, sed & parallela ipsi KB; erit & SO ipsi KB parallela: & ipsas coniungunt BO KS. ergo & KBOS quadrilaterū est in uno plano: nã si duæ rectæ lineæ parallelæ sint, & in vtraque ipsarum quævis pũcta sumantur, quæ dicta pũcta coniungit recta linea in eodem est plano, in quo parallelæ. Et eadem ratione vtraque ipsorum quadrilaterorum SOPT TPRY in vno sunt plano. est autem in vno plano & triangulum YRX. Si igitur à pũctis OSPTRY ad A ductas rectas lineas intelligamus, constituetur quædam figura solida

solida polyhedra inter circumferentias BX KX, ex pyramidibus composita, quarum bases quidem KBOS SOPT TPRY quadrilatera, & triangulum YRX; vertex autem punctum A. quod si in vno quoque laterum KL LM ME, quemadmodum in K B eadem construamus, & in reliquis tribus quadratibus, & in reliquo hemisphærio constituetur figura quedam polyhedra in sphaera descripta, & composita ex pyramidibus, quarum bases sunt quadrilatera iam dicta, & YRX triangulum; & quæ eiusdem ordinis sunt; vertex autem A punctum. Dico dictam figuram polyhedram non tangere superficiem minoris sphaeræ, in qua est circulus FGH. Ducatur à puncto A ad planum quadrilateri KBOS perpendicularis AZ, cui in puncto Z occurrat, & BZ ZK iungantur. Itaque quoniam AZ recta est ad quadrilateri KBOS planum, et ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt, & in eodem sunt plano rectos angulos faciet. ergo AZ ad utramque ipsarum BZ ZK est perpendicularis. et quoniam AB est æqualis AK, erit et quadratum ex AB quadrato ex AK æquale, et sunt quadrato quidem ex AB æqualia quadrata ex AZ ZB; etenim angulus ad Z rectus est: quadrato autem ex AK æqualia ex AZ ZK quadrata. ergo quadrata ex AZ ZB quadratis ex AZ ZK æqualia sunt. commune auferatur quadratum ex AZ. reliquum igitur quod ex BZ reliquo quod ex ZK est æquale; ideoque recta linea BZ rectæ ZK æqualis. Similiter ostendimus, & quæ à puncto Z ad OS ducuntur vtrique ipsarum BZ ZK æquales esse. circulus igitur centro Z & intervallo vna ipsarum ZB ZK descriptus, etiam per puncta OS transibit, atque erit in circulo KBOS quadrilaterum. Et quoniam KB maior est, quam QV, æqualis autem QV ipsi SO, erit & KB, quam SO maior. Sed KB est æqualis vtrique ipsarum KS BO. ergo vtraque KS BO, quam SO est maior. cum igitur in circulo quadrilaterum sit KBOS, & æquales sint KB BO KS, & minor OS; sitque ex centro circuli BZ: erit quadratum ex KB maius, quam duplum quadrati ex BZ. Ducatur à puncto K ad BV perpendicularis KQ. Et quoniam BD minor est, quàm dupla ipsius DQ; atque est ut BD ad DQ, ita rectanguli contentu DB BQ ad rectangulum, quod DQ QB continetur, nempe descripto ex BQ quadrato, & completo parallelogramo in ipso QD. quare & rectanguli contentu DB BQ minus est, quàm duplum eius, quod DQ QB continetur: & iuncta KD, quod DB BQ continetur est æquale quadrato ex KB; & quod continetur DQ QB æquale quadrato ex KQ. quadratum igitur ex KB minus est, quàm duplum quadrati ex KQ. sed quadratum ex KB maius est, quàm duplum quadrati ex BZ. ergo quadratum ex KQ quadrato ex BZ est maius. Et quoniam BA est æqualis AK, erit quadratum ex BA quadrato ex AK æquale. & sunt quadrato quidem ex BA æqualia quadrata ex BZ ZA; quadrato autem ex AK æqualia quadrata ex KQ QA. quadrata igitur ex BZ ZA quadratis ex KQ QA sunt æqualia; quorum quadratum ex KQ maius est quadrato ex BZ. ergo reliquum ex QA quadratum quadrato ex ZA est minus; ac propterea recta linea AZ maior, quàm recta AQ. multo igitur maior est AZ, quàm AG: atque est AZ quidem ad vnam polyhedri basim, AG vero ad superficiem minoris sphaeræ. quare polyhedrum minoris sphaeræ superficiem non tangit.

Ostendendum autem aliter & expeditius, maiorem esse AZ, quàm AG. Ducatur à puncto G ipsi AG ad rectos angulos GL, & AL iungatur. Itaque circumferentiæ EB bifariam secantes, & dimidiam ipsius bifariam, atque hoc semper facientes tandem relinquemus quandam circumferentiam minorem circumferentia circuli BC D, quæ subtenditur æquali ipsi GL. relinquatur, sitque circumferentia KB. minor igitur est recta linea KB, quàm GL. Et quoniam in circulo est BKSO quadrilaterum, & sunt æquales OB BK KS, & minor OS; erit angulus BZK obtusus: ideoque BK maior, quàm BZ. sed GL quàm BK est maior. multo igitur maior est GL, quàm BZ, & quadratum ex AL quadrato ex BZ maius. & cum æqualis sit AL ipsi AB, erit quadratum ex AL quadrato ex AB æquale. sed quadrato quidem ex AL æqualia sunt quadrata ex AG GL; quadrato autem ex AB æqualia quadrata ex BZ ZA. quadrata igitur ex AG GL quadratis ex BZ ZA æqualia sunt; quorum quadratum ex BZ minus est quadrato ex GL. ergo reliquum ex ZA quadratum maius est quadrato ex AG: & ob id recta linea ZA, quàm recta AG est maior. Duabus igitur sphaeris circa idē

E V C L I D . E L E M E N T .

centrum existentibus, in maiori solidum polyhedrum. descriptum est, minoris sphaerae superficiem non tangens. quod facere oportebat.

C O R O L L A R I V M .

Quod si etiam in altera sphaera, solido polyhedro descripto in sphaera ABCDE simile solidum polyhedrum describatur, habebit solidum polyhedrum in sphaera BCDE ad solidum polyhedrum in altera sphaera triplam proportionem eius, quam diameter sphaerae BCDE habet ad alterius sphaerae diametrum. diuisis enim solidis in pyramides numero aequales, & eiusdem ordinis; erunt pyramides similes. similes autem pyramides inter se in tripla sunt proportionem homologorum laterum. ergo pyramis, cuius basis est KBOS quadrilaterum, vertex autem punctum A ad pyramidem in altera sphaera eiusdem ordinis triplam proportionem habet eius, quam latus homologum habet ad homologum latus; hoc est, quam habet AB ex centro sphaerae circa centrum A existentis ad eam, quae est ex centro alterius sphaerae. Similiter & vnaquaeque pyramis earum, quae sunt in sphaera circa centrum A ad vnamquamque pyramidem eiusdem ordinis, quae sunt in altera sphaera, triplam proportionem habebit eius, quam habet AB ad eam, quae est ex centro alterius sphaerae. Et ut vnus antecedentium ad vnus consequentium, ita antecedentia omnia ad omnia consequentia. quare totum solidum polyhedrum, quod est in sphaera circa centrum A ad totum solidum polyhedrum, quod in altera sphaera triplam proportionem habebit eius, quam habet AB ad eam, quae est ex centro alterius sphaerae, hoc est quam habet BD diameter ad alterius sphaerae diametrum.

F . C . C O M M E N T A R I V S .

A Erunt sectiones circuli. j Hoc vniuerse à Theodosio demonstratur in prima propositione sphaericorum, nempe quomodo cumque plano sphaera secetur, semper sectiones fieri circulos.

B Erit OV quidem ipsi S

Q aequalis. BV vero aequalis KQ j. Sint enim duo semicirculi aequales ABC DEF, sumanturq; aequales circumferentiae AB DE: & à punctis B E perpendiculares ducantur BG EH. Dico BG ipsi

EH, & AG ipsi DH aequalem esse. Quoniam enim circumferentia AB est aequalis circumferentiae DE, quae sunt aequalium circularum, erunt rectae lineae AB DE inter se aequales. & eadem ratione aequales BC EF. ergo & ut AB ad BC ita DE ad EF: atque est angulus ABC in semicirculo rectus aequalis recto DEF. cum igitur circa aequales angulos latera sint proportiona

Ita, erit triangulum ABC simile triangulo DEF . sed triangulum ABG est simile triangulo ABC , ergo & ipsi DEF , triangulum autem DEH est simile triangulo DEF , triangulum igitur ABG tri-
gulo DEH est simile, ergo ut AB ad BG , ita DE ad EH , & permutando ut AB ad DE , ita BG ad
 EH , aequalis autem est AB ipsi DE , ergo & BG ipsi EH est aequalis. & eodem modo demonstra-
bitur AG aequalis ipsi DH , quod demonstrare oportebat, sed & illud vniuerse in omnibus portio-
nibus demonstratur sequenti lemmate.

Sint æquales por-
tiones equaliū cir-
culorū ABC DE
 F , sumanturq; cir-
cumferentiæ equa-
les AB DE : & à
punctis BE ad AC
 DF , perpendiculara

res ducantur BG EH . Dico BG quidem ipsi EH æqualem esse; AC vero ipsi DH .

¶ Iungantur AB DE , & quoniam æquales sunt circumferentiæ AB DE , erunt & reliquæ B
 C EF inter se æquales, ergo & æquales anguli, qui in ipsis consistunt. quare angulus BAC est
æqualis angulo EDF , sed & recti sunt anguli, qui ad G H , duo igitur triagula sunt ABG DEH ,
quæ duos angulos duobus angulis æquales habent, alterum alteri, & vnum latus BA vni lateri
 DE æquale, quod vni æqualium angularum subtenditur, ergo omnia omnibus sunt æqualia. æ-
qualis igitur est AG ipsi DH , & BG ipsi EH , quod demonstrare oportebat.

¶ Nam si duæ rectæ lineæ parallelæ sint, & in vtraque ipsarum quatuor puncta sumā-
tur, quæ dicta puncta coniungit in eodem est plano in quo parallelæ] Ex VII.

¶ Et quoniam KB maior est, quam QV ¶ Est enim triangulum AQV triangulo AKB simi-
le, cum angulus ad A sit vtrique communis, angulusq; AQV angulo AKB , & angulus AQV an-
gulo ABK æqualis, ut igitur AK ad KB , ita AQ ad QV , & permutando ut AK ad AQ , ita K
 B ad QV , est autem AK maior, quam AQ , ergo & KB , quam QV maior erit.

Erit quadratum ex KB maius, quam duplum quadrati ex BZ . ¶ Nam cum rectæ li-
neæ KB BO KS æquales sint, & minor ipsis OS , erunt circumferentiæ, quas auferunt KB BO
 KS inter se æquales, & reliqua circumferentiæ OS maiores, quare & anguli KZS KZB BZO æ-
quales, & maiores angulo OZS . sunt autem quattuor anguli quattuor rectis æquales, ergo OZS
est minor recto, videlicet acutus; & vnusquisque reliquorum trium obtusus; ac propterea quadra-
tum quod fit ex KB maius est duobus quadratis, quæ ex KZ ZB , hoc est maius, quam dupli qua-
drati, quod ex BZ , sunt enim KZ ZB inter se æquales, ut demonstratum est, sed & hoc sequenti
lemmate planius demonstratur.

Sit in circulo quadrilaterum $KBOS$, cuius tria
latera SK KB BO , inter se sint æqualia: sitq; BO
maior, quam OS ; & sumpto circuli centro Z , iun-
gatur BZ . Dico quadratum ex KB quadrati ex B
 Z maius esse, quam duplum.

Iungantur enim OZ SZ KZ . Quoniam igitur BZ est
æqualis ZS , & communis ZO ; erunt duæ BZ ZO dua-
bus SZ ZO æquales, altera alteri, & basis BO basi OS
maior, angulus igitur BZO angulo OZS est maior. & quo-
nam angulus OZB vnicuique ipsorum BZK KZS est æ-
qualis; in æqualibus namque circumferentijs consistunt
 OB BK KS ; quod rectæ lineæ æquales sint: erit & vter-
que angularum BZK KZS maior angulo OZS , sed quat-
tuor anguli OZS SZK KZB BZO quattuor rectis sunt æquales; etenim circa vnum punctum
 Z consistunt. vnusquisque igitur angularum OZB BZK KZS est obtusus, ideoq; obtusiangulum est
triangulum BZO . At in obtusiangulis triangulis, quod à latere obtusum angulum subtendente fit
quadratum maius est quadratis, quæ à lateribus obtusum angulum continentibus fiunt, ergo quad-
ratum, quod ex BK maius est quadratis, quæ ex KZ ZB , sed quadrata ex KZ ZB dupla sunt qua-
drati

6. sexti.
8. sexti.
9. sexti.
14. quinti.

27. tertii.

6. primi.

C

D

28. primi.
4. sexti.

E

Cotol. 15. pri-
mi.

EVLID. ELEMENT.

drati ex BZ ; æqualis enim est KZ ipsi ZB . quadratū igitur ex KB , maius est, quàm duplū quadratū ex BZ . quod oportebat demonstrare.

F Et quoniam BD minor est quàm dupla ipsius $D\Omega$. Perpendicularis enim à puncto K ducta ad BD , cadit inter G & B , quod circumlū FGH non tangit, vt ex antecedente constat: & cum BD dupla sit ipsius $D\Omega$, erit ipsius $D\Omega$ minor, quàm dupla.

G Atque est vt BD ad $D\Omega$, ita rectangulū contentū DB $B\Omega$ ad rectangulū quod $D\Omega$ ΩB continetur. Describatur ex ΩB quadratū quod sit ΩBTZ , & compleatur DZ parallelogrammū. erit ut BD ad $D\Omega$, ita rectangulū DT ad rectangulū DZ . ex prima sexti, hoc est ita rectangulū, quod continetur DB $B\Omega$ ad rectangulū contentū $D\Omega$ ΩB .

H Et iuncta KD , quod DB $B\Omega$ continetur est æquale quadrato KB . Est enim angulus in semicirculo DKB rectus, & ab eo ad basim perpendicularis ducitur $K\Omega$. quare ex corollario octauæ sexti libri KB est proportionalis media inter DB $B\Omega$: & $K\Omega$ media inter $D\Omega$ ΩB : & ob id quadratū quidem ex KB æquale est rectangulo contentū DB $B\Omega$; quadratū uero ex $K\Omega$ æquale ei, quod $D\Omega$ ΩB continetur.

K Multo igitur maior est AZ quàm AG . Quoniam enim polygonū $BKLME$ in maiori circulo $BCDE$ descriptū est, non tangens minorem circumlū FGH , perpendicularis à puncto K ducta ad BD , videlicet $K\Omega$ circumferentiam eius non tanget ex ijs, quæ in antecedente demonstrata sunt. quare $A\Omega$ maior erit, quàm AG ; & idcirco AZ longe maior, quàm quæ à centro minoris spheræ ad eius superficiem pertinet.

L Et quoniam in circulo est $EKSQ$ quadrilaterū] Intelligatur enim descriptū quadrilaterū $BKSO$, vt in antecedentibus.

M Et sunt æquales OB BK KS , & minor OS . Hæc proxime demonstrata sunt.

N Et cum æqualis sit AL ipsi AB .] Sunt enim à centro ad circumferentiam maioris circuli $BCDE$.

THEOREMA XVI. PROPOSITIO. XVIII.

Sphæræ inter se in tripla sunt proportionē suarū diametrorū.

Intelligentur sphæræ ABC DEF ; quarū diametri BC EF . Dico ABC sphærā ad sphærā DEF triplam proportionem habere eius, quā habet BC ad EF . Si enim non ita est, sphæra ABC ad sphærā minorem ipsa DEF , vel ad maiorem triplam proportionem habebit eius, quam habet BC ad EF . Habeat primo ad minorem, videlicet ad GHI . & intelligatur sphæra DEF circa idem centrū, circa quod est sphæra GHI ; describaturq; in maiori sphæra DEF solidū polyhedrū non tangens minorem sphærā GHI in superficie; & in sphæra ABC describatur solidū polyhedrū simile ei, quod in sphæra DEF descriptū est. solidū igitur polyhedrū, quod in sphæra ABC ad solidū polyhedrū, quod in sphæra DEF triplam proportionem habet eius, quam BC ad EF . habet autem ABC sphæra ad sphærā GHI triplam proportionem eius, quam BC ad EF . ergo vt A B C sphæra ad sphærā GHI ,

Ex antecede-
deute.

Ex coroll an
tecedente.

HK,

HK, ita solidum polyhedrum in sphaera ABC ad solidum polyhedrum in sphaera DEF; & permutando, ut ABC sphaera ad solidum polyhedrum, quod in ipsa est, ita CHK sphaera ad solidum polyhedrum, quod in sphaera DEF. maior autem est sphaera ABC solido polyhedro, quod est in ipsa. ergo & GHK sphaerae polyhedro, quod in sphaera DEF est maior. sed & minor, ab ipso enim comprehenditur, quod fieri non potest. non igitur ABC sphaera ad sphaeram minorem ipsa DEF triplam proportionem habet eius, quam BC ad EF. similiter ostendemus neque DEF sphaera ad sphaeram minorem ipsa ABC triplam habere proportionem eius, quam habet EF ad BC. Dico insuper sphaeram ABC neque ad maiorem sphaeram ipsa DEF triplam proportionem habere eius, quam BC ad EF. Si enim fieri potest, habeat ad maiorem LMN. conuertendo igitur sphaera LMN ad ABC sphaeram triplam proportionem habet eius, quam diameter EF ad BC diametrum. Ut autem sphaera LMN ad ABC sphaeram, ita sphaera DEF ad sphaeram quamdam minorem ipsa ABC, ut ante demonstratum fuit; quoniam sphaera LMN maior est ipsa DEF. ergo & DEF sphaera ad sphaeram minorem ipsa ABC triplam proportionem habet eius, quam EF ad BC, quod fieri non posse ostensum est. non igitur ABC sphaera ad sphaeram maiorem ipsa DEF triplam proportionem habet eius, quam BE ad EF. ostensum autem est neque ad minorem. ergo ABC sphaera ad sphaeram DEF triplam proportionem habebit eius, quam BC ad EF. quod demonstrare oportebat.

DE VODECIMI LIBRI FINIS.

EVCLIDIS ELEMENTORVM

LIBER TERTIVSDECIMVS

ET SOLIDORVM TERTIVS.

CVM SCHOLIIS ANTIQVIS
ET COMMENTARIIS.

Federici Commandini Vrbinatis.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

I recta linea extrema, ac media ratione secta fuerit, maior portio assumens dimidia totius, quintuplum potest eius, quod à dimidia fit, quadrati.

Recta enim linea AB extrema, ac media ratione secetur in puncto C; & fit AC maior portio: producatur; in directum ipsi CA recta linea AD; & ponatur AD ipsius AB dimidia. Dico quadratum ex CD quadrati ex DA quintuplum esse. describantur ex AB DC quadrata AE DF, & in DF describatur figura, & FC ad G producatur. Itaque quoniam AB extrema, ac media ratione secatur in C, erit quod AB BC continetur aequale quadrato ex AC. atque est rectangulum quidem CE quod continetur AB BC: quadratum vero ex AC est FH. ergo rectangulum CE quadrato FH est aequale. & quoniam BA dupla est ipsius AD; & qualis autem BA ipsi AK; & DA ipsi AH: erit & KA ipsius AH dupla. ut autem KA ad AH, ita est rectangulum KC ad ipsum CH. duplum igitur est KC rectangulum rectanguli CH:

ascul.

& sunt rectangula LH HC ipsius CH dupla. ergo rectangulum KC rectangulis LH HC est aequale. ostensum autem est & rectangulum CE aequale quadrato FH. totum igitur AE quadratum est aequale gnomoni MNX. Rursus quoniam BA dupla est ipsius AD, erit quadratum ex BA quadrati ex ad quadruplum, hoc est quadratum AE quadrati DH. & quod id totum DF ipsius DH est quintuplum. atque est DF quidem quadratum ex CD, DH vero quadratum ex DA. quadratum igitur ex CD quadrati ex DA quintuplum erit. ergo si recta linea extrema, ac media ratione secta fuerit, maior portio assumens totius dimidiam quintuplum potest eius, quod à dimidia fit quadrati. quod demonstrare oportebat.

SCHOLIUM.

Resolutio est sumptio quaesiti tāquam concessi per ea, quae consequuntur in aliquod uerum concessum.

Compositio est sumptio concessi per ea, quae consequuntur in quaesiti conclusionem, seu deprehensionem.

Antecedentis theorematiss resolutio.

Recta enim linea quaedam AB extrema, ac media ratione secetur in C, sitque maior portio AC, & ponatur AD ipsius AB dimidia equalis. Dico quadratum ex CD quadrati ex DA quintuplū esse. Quo-

niam enim quintuplum est quadratum ex CD quadrati ex DA; quadrato autem ex CD aequalia sunt quadrata ex CA AD vnā cum eo, quod bis CA AD continetur: erunt quadrata ex CA AD vnā cum eo, quod bis CA AD continetur, quadrati ex AD quintupla. ergo diuidendo quadratum ex CA vnā cum eo, quod bis continetur CA AD quadruplum est quadrati ex AD. Sed ei quidem, quod bis CA AD continetur aequale est rectangulum BAC. est enim BA ipsius AD dupla. quadrato autem ex A C est aequale rectangulum ABC; namque AB extrema, ac media ratione secata est in C. rectangulum igitur BAC vnā cum rectangulo ABC quadruplum est quadrati ex AD. sed rectangulum BA C vnā cum rectangulo ABC est id, quod fit ex AB quadratum. ergo quadratum ex BA quadruplum est quadrati ex AD. quod quidem ita se habet. est enim BA ipsius AD dupla.

4. secundi.

2. secundi.
Cor. 20. sexti

Compositio.

Quoniam igitur quadruplum est quadratum ex BA quadrati ex AD; quadratū autem ex AB est rectangulum BAC vnā cum rectangulo ABC: erit rectangulum BAC vnā cum rectangulo ABC quadrati ex AD quadruplum. sed rectangulum quidem BAC est aequale ei, quod bis DA AC continentur; rectangulum autem ABC est aequale quadrato ex AC. ergo quadratum ex AC vnā cum eo, quod bis continetur DA AC quadruplum est quadrati ex DA; & ob id quadrata ex DA AC vnā cum eo, quod bis DA AC continentur quintuplum est quadrati ex DA. sed quadrata ex DA AC vnā cum eo, quod bis continetur DA AC est id, quod fit ex DC quadratum. quadratum igitur ex CD quadrati ex DA quintuplum erit. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIUS.

Recta enim linea AB extrema, ac media ratione secetur in puncto C] Quomodo hoc fiat, docuit in vndecima propositione secundi libri, & in 30 sexti.

Describantur ex AB DC quadrata AE DF, & in DF describatur figura] Sit ex B AB quadratum AKEB, & ex DC quadratum DLFC; & uncta DF, ducatur per A recta linea AH parallela alterutri ipsarum DL CF, quae diametrum DF in puncto H secet. rursus per H ducatur recta linea alterutri ipsarum LF DC parallela.

Et sunt rectangula LH HC ipsius HC dupla] Supplementa enim LH HC inter se sunt C aequalia ex 43 primi libri.

Erit quadratum ex BA quadrati ex AD quadruplum] Ex 20 sexti.

Quadrantur igitur ex CD quadrati ex DA quintuplum erit] Possimus etiam aliter, E & fortasse expeditius idem demonstrare in hunc modum.

M m m Sit

E VCLID. ELEMENT.

Sit recta linea AC, quae extrema, ac media ratione secetur in C, & ex AB fiat quadratū ADEB; sectaq; AD bifariam in F, & iuncta FB, producat F.A in G, ita ut FG ipsi FB sit aequalis, erit AG equalis AC ex demonstratis in vndecima secūdi libri. quare FG cōstat ex maiori portione, et ex dimidia totius AB. Dico quadratū ex FG quintuplū esse quadrati ex FA. Quoniam enim AB dupla est ipsius AF, erit quadratū ex AB quadrati ex AF quadruplū. sed quadratū ex FB est aequale quadratis ipsarum FA AB, ex 47 primi. quadratū igitur ex FB, hoc est quadratū ex FG quadrati ex FA quintuplū erit. quod oportebat demonstrare. sed & alia nonnulla demonstranda sunt, quae ad hanc sectioem attinent.

20. sexui.

PROPOSITIO I.

Data recta linea extrema, ac media ratione secta, & vtrūque ipsius portio data erit.

Sit data recta linea AB 10, quae extrema, ac media ratione secetur in C. Dico ipsas AC CB datas esse. Construantur enim eadem, quae supra. & quoniam AB est 10, erit eius dimidia AF 5, cuius quadratū est 25: quadratū aut ipsius AB est 100. ergo quadratū ex FB est 125, & ipsa FB, hoc est FG R 125. sed FA est 5. erit igitur AG, hoc est AC R 125 minus. Quod cum 5. sit ut BA ad AC, ita AC ad CB, rectangulum contentum AB BC, videlicet rectangulum CE aequale erit quadrato ex AC. quadratū autem ex AC, hoc est quadratū R 125 minus 5 est 150 minus R 12500. si igitur ad CH applicetur 150 minus R 12500 latitudinem facies CE, erit CB 15 minus R 125. ergo AC CB datae sunt, ut oportebat.

17. sexui.

Ex quibus manifestum est si recta linea rationalis, exposita rationali longitudine commensurabilis extrema ac media ratione secta fuerit, maiorem eius portionē apotomen esse quintam, & minorem esse apotomen primam.

Est enim quadratū ex AB quadrati ex AF quadruplū. ergo quadratū ex FB ad quadratū ex BA proportionem habet, quam 5 ad 4. & quoniam quadratū ex FB ad quadratū ex BA proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; erit FB ipsi BA longitudine incommensurabilis; ac propterea FB plus potest, quam FA quadrato rectae lineae sibi incommensurabilis longitudine. est autem AF, quae ipsi AG congruit, expositae rationali longitudine commensurabilis. quare AC est apotome quinta. At vero CB esse apotomen primam, manifestum constat; quadratū enim apotomes ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen primam ex 98 decimi libri.

9. decimi.

5. diffinitum.

PROPOSITIO II.

Data maiori portione, totam rectam lineam, quae extrema, ac media ratione secta sit, inuenire.

Sit maior portio AB, & exponantur rectae lineae CD E, ita ut CD sit ipsius E quintupla: inter CD vero, & E media proportionalis sit F: & ex CD abscindatur DG ipsi F aequalis; fiatq; ut CG ad GD, ita AB ad BH. erit igitur componendo ut CD ad DG hoc est ad F, ita AH ad HB. et quoniam tres rectae lineae CD F E deinceps proportionales sunt, erit ut CD ad E, ita quadratū ex CD ad quadratū ex F. est autem CD quintupla ipsius E. quadratū igitur ex CD quintuplū est quadrati ex F. ergo quadratū ex AH quadrati ex HB est quintuplū. estq; AB ma-

Cor. 10. sexui.

ior portio

tor portio rectae lineae, quae extrema, ac media ratione secatur, quae BH est totius dimidia, & dupla ipsius BH est tota recta linea, quam nobis inveniendam proposuimus.

Itaque constat, Data maiori portione rectae lineae, quae extrema, ac media ratio ne secetur, & maiorem portionem, & totam lineam datam esse.

Sit enim maior portio AB 4, sitq; CD 5, & E 1. erit F, hoc est GD R 5, & CG 5 minus R 5. fiat vt 5 minus R 5 ad R 5, ita 4 ad aliam. multiplicabimus igitur primum R 5 per 4, producet R 20. deinde multiplicabimus 5 minus R 5 per eam, quae ex binis nominibus ipsi respondet, videlicet per 5 plus R 5, producet R 20. & per eandem multiplicabimus R 20 fiet R 2000 plus R 400. quare si ad 20 applicabimus R 2000 plus R 400, latitudinem faciet R 5 plus 1, cuius duplum est R 20 plus 2. tota igitur recta linea est R 20 plus 2, & minor portio R 20 minus 2. & A minima ratio.

THEOREMA II. PROPOSITIO. II.

Si recta linea partis ipsius quintuplum possit, dupla dictae partis extrema, ac media ratione secta, maior portio reliqua pars est eius, quae à principio rectae lineae.

Recta enim linea AB partis ipsius AC quintuplum possit, & ipsius AC dupla sit CD. Dico si CD extrema, ac media ratione secetur, CB maiorem esse portionem. Describatur enim ex utraque ipsarum AB CD quadrata AF CG, & in AF signa descripta, producat FB in E. Quoniam igitur quadratum AF quintuplum est ipsius AH, erit MNX gnomon ipsius AH quadruplus, & quoniam DC dupla est CA, quadratum ex DC quadrati ex CA quadruplum est, videlicet quadratum CG quadruplum quadrati AH, ostensus est autem MNX gnomon quadruplus ipsius AH quadrati, ergo gnomon MNX quadrato CG est equalis. Rursum quoniam DC dupla est CA, equalis autem est DC ipsi CK, & AC ipsi CH, erit KC ipsius CH dupla. parallelogrammum igitur KB duplum est parallelogrammi BH, & sunt parallelogramma LH HB ipsius HB dupla. ergo KB aequale est ipsis LH HB, sed & totus MNX gnomon toti CG est aequalis, & reliquum igitur HF aequale est reliquo BG, atque est BG quidem quod CD DB continetur; etenim CD est equalis DG, ipsum vero HF est quadratum ipsius BC. ergo quod continetur CD DB quadrato ex CB est aequale, vt igitur DC ad CB, ita est CB ad BD; maior autem est DC, quam CB, ergo & CB quam BD est maior. Itaque recta linea C D extrema, ac media ratione secta, maior portio est CB. si igitur recta linea partis ipsius quintuplum possit, dupla dictae partis extrema, ac media ratione secta, maior portio reliqua pars est eius, quae à principio rectae lineae. quod demonstrare oportebat.

At vero duplam ipsius AC maiorem esse, quam CB, sic demonstrabitur.

Si enim nō, sit, si fieri potest, BC ipsius CA dupla. quadratum igitur ex BC quae duplum est quadrati ex CA, & ob id utrumque quadratorum, quae sunt ex BC C A quadrati ex CA quintuplum est, sed & quadratum ex BA quadrati ex AC quintuplum ponitur, ergo quadratum ex BA aequale est quadratis ex BC CA, quod fieri non potest, non igitur BC dupla est ipsius CA. similiter demonstrabimus neque minorem BC ipsius CA duplam esse, multo enim maius absurdum sequeretur, ergo ipsius AC dupla maior est quam BC, quod demonstrandum fuit.

Antecedentis theorematism resolutio.

Recta enim linea quadam CD
partis ipsius DA quintuplū pos-
sit, & ipsius DA dupla ponatur A
B. Dico AB extrema, ac media ra-

tione sectam esse in puncto C, & maiorem portionem esse AC, quæ quidem est reli-
qua pars eius, quæ à principio rectæ lineæ. Quoniam enim AB extrema, ac media ra-
tione secta est in C, & AC est maior portio; erit rectangulum ABC quadrato ex A
C æquale. est autem & rectangulum BAC æquale ei, quod bis DA AC continetur.
etenim BA ipsius AD est dupla, ergo rectangulum ABC vnā cum rectangulo BA
C, quod quidem est ipsius AB quadratū, æquale est ei, quod bis DA AC continetur
vnā cum quadrato ex AC. quadratum autem ex AB quadruplum est quadrati ex
AD, ergo quod bis DA AC continetur vnā quadrato ex AC quadruplum est eius,
quod fit ex AD quadrati. ergo & quadrata ex DA AC vnā cum eo, quod bis conti-
netur DA AC, hoc est quadratū ex CD, quintupla sunt quadrati ex AD. quod qui-
dem ita se habet.

2. secundi.

20. sexti.

4. secundi.

Compositio.

Quoniam igitur quadratū ex CD quintuplū est quadrati ex DA; quadrato autē ex CD
æqualia sunt quadrata ex DA AC vnā cū eo, quod bis DA AC cōtinetur; erūt qua-
drata ex DA, AC vnā cū eo, quod bis cōtinetur DA AC quintupla ipsius quadrati
ex DA. & diuidendo quod bis DA AC cōtinetur vnā cū quadrato ex AC quadru-
pla sūt quadrati ex AD. est autē & quadratū ex AB quadrati ex AD quadruplū. ergo
quod bis cōtinetur DA AC, quod est rectangulū BAC vnā cū quadrato ex AC est æ-
quale quadrato ex AB. sed quadratū ex AB est rectangulū ABC vnā cū rectangulo B
AC. rectangulū igitur BAC vnā cū rectangulo ABC est æquale rectangulo BAC vnā
cū quadrato ex AC. & ablato communi rectangulo BAC, erit reliquū rectangulū
ABC quadrato ex AC æquale. est igitur vt BA ad AC, ita AC ad CB. maior autem
est BA, quam AC. ergo & AC quam CB est maior. quare AB extrema, ac media ra-
tione secta est in C, & AC est maior portio. quod demonstrare oportebat.

2. secundi.

14. sexti.

F. C. COMMENTARIUS.

Recta enim linea AB partis ipsius AC quintuplum possit. Hoc est quadratum rectæ
lineæ AB quintuplum sit quadrati partis ipsius AC.

Maiores autem est DC, quam CB. Hoc est dupla ipsius AC maior est, quam B C, illud uero
ipse mox demonstrabit, sed & aliter idē demonstrari potest hoc pacto.

Recta enim linea AB partis ipsius BC quintuplum possit, & pro-
ducatur AB ad D, ita vt DC ipsius CB sit dupla. Dico si CD extre-
ma, ac media ratione secetur, maiorem eius portionem esse AC. fiat
enim ex AC CD quadrata ACEF CDGH, & BH iungatur. itaq;
quoniam DC, hoc est HC dupla est ipsius CB, erit quadratum ex HC
quadrati ex CB quadruplum. sed quadratum ex BH est æquale duo-
bus quadratis, quæ sunt ex HC CB. quadratum igitur ex BH quin-
tuplum est quadrati ex CB; ideoq; BH ipsi BA est æqualis. ergo ex
ijs, quæ demonstrata sunt in vndecima secundi libri recta linea CH
extrema, ac media ratione secatur in E, & CE est maior portio. est
autem CH ipsi CD æqualis, & CE æqualis ipsi CA. si igitur recta
linea partis ipsius quintuplum possit, & reliqua. quod oportebat
demonstrare.

THEO-

Si recta linea extrema, ac media ratione secta fuerit, portio minor affumens dimidiam maioris portionis quintuplu potest eius, quod à dimidia maioris portionis fit quadrati.

Recta enim linea quædā AB extrema, ac mē-
 dia ratione secetur in C; sitq; AC maior portio,
 & secetur bifariam in D. Dico quadratum ex B
 D quadrati ex DC quintuplū esse. Describatur
 enim ex AB quadratum AE, & figura compleat-
 ur. Quoniam igitur AC dupla est CD, erit qua-
 dratum ex AC quadrati ex CD quadruplum,
 hoc est quadratum RS quadrati tī FG. & quon-
 iā rectangulum, quod AB BC continetur est æqua-
 le quadrato ex AC, atque est rect. angulum qui-
 dem cōtētū AB BC ipsūm CE; quadratum ve-
 ro ex AC est RS: erit rectangulum CE quadra-
 to RS æquale: quadruplum autem est quadratū
 RS quadrati FG. ergo & CE rectangulum quadrati FG quadruplum est. rursus quo-
 niam AD æqualis est DC, erit & HK ipsi KF æqualis, id est; quadratum GF est æqua-
 le quadrato HL. æqualis igitur est GK ipsi KL, hoc est MN ipsi NE. ergo & paralle-
 logrammum MF parallelogrammo FE est æquale. sed MF est æquale CG. quare &
 CG ipsi FE æquale erit. commune apponatur CN. gnomon igitur XOP est æqualis
 parallelogrammo CE. ostensum autem est CE quadruplum GF quadrati. & gnom-
 on igitur XOP ipsius GF est quadruplus. & ob id quadratum DN quintuplū est
 ipsius GF. est autem quadratum quidem DN, quod fit ex DB; GF vero, quod ex D
 C. quadratum igitur ex BD quadrati ex DC est quintuplum: quod demonstrare
 oportebat.

SCHOLIUM.

Antecedentis theorematis resolutio.

Recta enim linea AB extrema, ac media ratione secetur in C: & sit AC maior portio, cuius dimidia CD. Dico quadratum ex BD quadrati ex DC quintuplum esse. Quoniam enim quadratum ex BD quintuplum est quadrati ex DC; quadratum autem ex BD est quod continetur AB BC vna cum quadrato ex DC, ergo quod AB BC continetur vna cum quadrato ex DC quintuplū est quadrati ex DC: & diuidendo quod AB BC continetur quadrati ex DC quadruplum est. Ei vero, quod continetur AB BC est equale quadratum ex AC; etenim AB extrema, ac media ratione secuta est in C. ergo quadratum ex AC quadrati ex CD quadruplum est. quod quidem ita se habet esse enim AC ipsius CD dupla.

Compositio.

Quoniam dupla est AC ipsius CD, erit quadratū ex AC quadratū ex CD quadruplum. sed quadratum ex AC est æquale ei, quod AB BC continetur. quod igitur AB BC continetur quadruplum est quadratū ex CD. & componendo quod continetur AB BC unā cum quadrato ex CD, quod quidem est quadratum ex BD, quintuplum est quadrati, quod fit ex DC. atque hoc est, quod demonstrare oportebat.

Etiam dictis & alia constare possumus. Data minori portione totam rectam lineam, quae extrema, ac media ratione secta sit, inuenire.

Sit minor portio AB: & exponantur rectae lineae CD E: sitq; CD ipsius E quintupla: & inter CD E media proportionalis sinatur F: & alia construuntur, quae ad modum superius dictum est in propositione secunda earum, quas nos ad primam huius apposimus. similiter demonstrabitur quadratum ex AH quadrati ex HB quintuplum esse: atque est AB minor portio rectae lineae, quae extrema, ac media ratione sectatur, ergo BH est maioris portionis dimidia, & eius dupla BK portio maior: tota igitur linea est AK, cuius maior portio KB, & minor BA.

Pater igitur data minori portione rectae lineae, quae extrema ac media ratione sectatur, & maiorem portionem & totam lineam datam esse.

Sit enim minor portio AB 4, & sit CD 5, & E 1. similiter, ut supra eodem in loco, demonstrabimus, maiorem portionem esse B 2 o plus 2 quare tota recta linea erit: 6 plus B 2 o.

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

Si recta linea extrema, ac media ratione secta fuerit, totius & minoris portionis utraq; quadrata tripla sunt quadrati eius, quod a maiori fit portione.

Sit recta linea AB, quae extrema, ac media ratione secetur in C, & sit AC maior portio. Dico quadrata ex AB BC quadrati ex AC tripla esse. Describatur enim ex AB quadratum ADE B, & figura compleatur: itaque quoniam AB extrema, ac media ratione secta est in C, & maior portio est AC; erit rectangulum contentum AB BC quadrato ex AC aequale, atque est rectangulum quidem AK, quod AB BC continetur: quadratum vero HG est quod fit ex AC. & quare igitur est AK ipsi HG, & quoniam rectangulum AF est aequale EE, commune apponatur CK, erit totum AK toti CE aequale. ergo rectangula CE AK ipsius AK sunt dupla. sed rectangula AK CE sunt gnomon LMN, & quadratum CK. gnomon igitur LMN, & quadratum CK dupla sunt ipsius AK. rectangulum autem AK ostensum est aequale quadrato HG. ergo gnomon LMN & quadratum CK ipsius HG sunt dupla: ac propterea gnomon LMN, & quadrata CK HG tripla sunt quadrati HG. & gnomon quidem LMN, & quadrata CK HG sunt totum AE quadratum, & quadratum CK, quae quidem sunt quadrata ex AB BC. quadratum autem GH est quod fit ex AC. quadrata igitur ex AB BC quadrata ex AC tripla. quod demonstrare oportebat.

SCHOLIUM.

Antecedentis theorematitis resolutio.

Recta enim linea AB extrema, ac media ratione secetur in C, & sit AC maior portio

portio. Dico quadrata ex AB BC tripla esse
quadrati ex AC. Quoniam enim quadrata ex
AB BC tripla sunt quadrati ex AC; suntque
quadrata ex AB BC equalia rectángulo, quod

bis AB BC continetur vñ cum quadrato ex AC: erit rectangulum, quod bis continetur AB BC vñ cum quadrato ex AC triplum quadrati ex AC: & diuidendo quod bis cōtinetur AB BC duplū quadrati ex AC. ergo quod semel AB BC continetur quadrato ex AC est æquale. quod quidem ita se habet. recta enim linea AB extrema, ac media ratione secta est in puncto C.

5802

Compositio.

Itaque quoniam AB extrema, ac media ratione secta est in C, atque est AC maior portio; erit rectangulum, quod AB BC continetur quadrato ex AC æquale. ergo quod bis continetur AB BC duplum est quadrati ex AC: & componendo quod bis continetur AB BC una cum quadrato ex AC triplum est quadrati ex AC. sed quod bis AB BC continetur una cum quadrato ex AC est æquale quadratis, quæ ex AB BC fiunt. quadrata igitur ex AB BC quadrati ex AC sunt tripla.

THEOREMA V. PROPOSITIO. V.

Si recta linea extrema, ac media ratione secetur, adjiciaturque ipsi æqualis maiori portioni; erit tota linea extrema, ac media ratione secta, & maior portio erit ea, quæ à principio posita est recta linea.

Restat enim linea AB extrema,
ac media ratione secetur in C, &
sit AC portio minor: ponaturq; ip-
si CA equalis AD. Dico restam li-
neam DB extrema, ac media ratio-
ne secari in puncto A: & maiorem
portionem esse AB, quæ à princi-
pio posita est. Describat enim ex
AB quadratum AE, & figura com-
pleteatur. Quoniam igitur AB extre-
ma, ac media ratione secata est
in C, erit rectangulum quod conti-
netur AB BC quadrato ex AC æ-

quale. & rectangulum quidem quod continetur AB BC est CE: quadratum vero ex AC est CH. ergo EC ipsi CH est æquale. sed CE est æquale EH, & CH ipsi HD. quare & DH ipsi HE æquale erit. cômune apponatur HB. totum igitur DK toti AE est æquale. atque est DK quidem, quod BD DA continetur; est enim AD æqualis DL: quadratû aut AE est quod fit ex AB. ergo quod BD DA cōtinetur est æquale quadrato ex AB, & ob id ut DB ad BA, ita est BA ad AD. sed BD est maior, quam BA. maior igitur est BA quam AD. ergo DB extrema, ac media ratione secta est in A, & AB est maior portio. quod demonstrare oportebat.

SCHOLIUM.

Antecedentis theorematis resolutio.

Recta .n. linea AB extrema, ac media ratione secetur in C : & sit maior portio A
C: pona-

EVLID. ELEMENT.

Conaturq; AD ipsi AC æqualis.
Dico DB extrema ac media ratio-
ne secari in puncto A: & BA maio-
rem esse portionem. Quoniã enim
DB extrema, ac media ratione secta est in A, & maior portio est AB; erit vt DB ad
BA, ita BA ad AD. a qualis autem est DA ipsi AC. vt igitur DB ad BA, ita BA ad A
C: & per conuersionem rationis vt BD ad DA, ita AB ad BC. quare diuidendo ut
BA ad AD, ita AC ad CB: a qualis autem est DA ipsi AC. est igitur vt BA ad AC,
ita AC ad CB. quod quidem ita se habet, etenim AB extrema, ac media ratione se-
catur in C puncto.

Compositio.

Itaque quoniam AB extrema, ac media ratione secatur in C, erit vt BA ad AC
ita AC ad CB, a qualis autem est CA ipsi AD. ergo ut BA ad AD, ita AC ad CB: cõ
ponendõque vt BD ad DA, ita AB ad BC; & per conuersionem rationis vt DB ad
BA, ita BA ad AC. atque est CA æqualis AD. est igitur vt DB ad BA, ita BA ad A
D. quare DB extrema, ac media ratione secatur in pũcto A, & BA est portio maior.

F. C. COMMENTARIUS.

Sed non inutile iussim est hoc loco demonstrare theorema aliud quo utitur Pappus in quinto li-
bro, quamquam eius demonstrationem nullam asserat.

Si recta linea extrema, ac media ratione secetur, abscindaturque à maiori portio-
ne linea, quę minori sit equalis; erit etiam ea extrema, ac media ratione secta, & ma-
ior portio erit quę abscissa est recta linea

Sit recta linea AB, quę extrema, ac media rōne secetur in
C, sitq; AC maior portio: & ab ipsa AC abscindatur CD, quę
ipsi CB sit equalis. Dico AC extrema, & media rōne secari
in D: & CD maiorem esse portionē. fiat enī ex AB quadratū
AE: & unita AE ducantur per CD rectę lineę CFK DL
ipsi BE parallelę, quę diametrum AE secant in punctis FL:
& per FL ducantur GFH ML parallelę ipsi AB. Itaque quo-
niam AB extrema, ac media ratione secatur in C; rectangulū,
quod AB BC continetur, hoc est rectangulum CE est æquale
quadrato AF. sed ipsi CE æquale est rectangulum GE; etenim supplementa CH GK inter se æ-
qualia sunt; & quadratum FE est commune utrique. ergo rectangulum GE quadrato AF est æ-
quale. si igitur à rectangulo GE auferatur FE quadratum; & à quadrato AF auferatur quadra-
tum LF, quod quidem est æquale quadrato FE, cum DE CB sint æquales, reliquum GK rectan-
gulum, hoc est rectangulum MF, hoc est ipsum DF gnomoni NXO æquale erit, à quibus sublato
communī LC, erit reliquū DG rectangulum æquale quadrato LF. at rectangulum quidem DG
est quod CA AD continetur: quadratum vero LF est quod fit ex DC. vt igitur AC ad CD, ita C
D ad D. sed AC maior est, quā CD. ergo & CD quā D. A maior erit. recta igitur linea AC
extrema, ac media rōne secta est in D, & maior eius portio est CD. quod demonstrare oportebat.

14. scilicet.

THEOREMA VI. PROPOSITIO. VI.

Si recta linea rationalis extrema, ac media ratione secta fuerit,
utraque portio irrationalis est, quę apotome appellatur.

Sit recta linea rationalis AB; & se-
cetur extrema, ac media ratione in C,
sitque AC maior portio. Dico utram
que portionem AC CB irrationalē

esse,

esse, quæ apotome appellatur. producat enim BA in D, & sit ipsius BA dimidia AD. Itaque quoniam recta linea AB extrema, ac media ratione secatur in C, & maiori portioni CA adijcitur AD, quæ est ipsius AB dimidia; erit quadratum ex CD quadrati ex DA quintuplum. quadratum igitur ex CD ad quadratum ex DA proportionem habet, quam numerus ad numerum; ideoque quadratum ex CD commensurabile est quadrato ex DA. rationale autem est quadratum ex DA; etenim DA est rationalis, cum sit ipsius AB rationalis dimidia. ergo & quadratum ex CD est rationale; ac propterea ipsa CD rationalis. & quoniam quadratum ex CD ad quadratum ex DA proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, recta linea CD ipsi DA incommensurabilis est longitudine. quare CD DA rationales sunt potentia solum commensurabiles; & idcirco AC apotome est. Rursus quoniam AB extrema, ac media ratione secta est, & maior portio est AC; erit ABC rectangulum æquale quadrato ex AC. quod igitur sit ex apotoma AG ad rationalem AB applicatum latitudinem facit BC. sed quadratum apotomes ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen primam. ergo BC est apotome prima. ostensa est autem & A C apotome. si igitur recta linea rationalis extrema, ac media ratione secta fuerit, utraque portio irrationalis est, quæ apotome appellatur. atque illud est, quod demonstrare oportebat.

ex 1. huius
6. decimi
6. dif. decimi
9. decimi
74. decimi
98. decimi

F. C. COMMENTARIUS.

Hoc nos supra etiam aliter demonstravimus. sed & alia ab his non abhorrentia demonstrare aggrediemur, quæ eiusmodi sunt.

PROPOSITIO I.

Si maior portio rectæ lineæ extrema, ac media ratione sectæ sit rationalis, expositæ rationali longitudine commensurabilis, erit minor portio apotome quinta, & tota ex binis nominibus quinta.

Sit recta linea AB, quæ extrema, ac media ratione secetur in C, & sit maior portio AC rationalis, expositæ rationali longitudine commensurabilis. Dico minorem portionē CB esse apotomen quintam, & totam ex binis nominibus quintam. Diuidatur enim AC bisariam in D. & quoniam A B extrema, ac media ratione secatur in C, & minori portioni BC adijcitur CD, quæ est dimidia portio minoris; quadratum ex BD quintuplum est quadrato ex DC; ac propterea ad ipsam proportionem habebit, quam numerus ad numerum, atque ipsi commensurabile erit. rationale autem est quadratum ex DC, quod ipsa AC rationalis ponitur. ergo & quadratum ex BD est rationale, & ipsa BD rationalis. cum igitur quadratum ex BD ad quadratum ex DC proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, recta linea BD ipsi DC incommensurabilis erit longitudine. quare BD DC rationales sunt potentia solum commensurabiles: ideoque CB apotome est. Dico & quintam esse. sit enim quadratum ex EF, quo quadratum ex BD superat quadratum ex DC. habebit quadratum ex BD ad quadratum ex EF proportionem eam, quam 5 ad 4. & cum proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, recta linea BD ipsi EF longitudine est incommensurabilis. quare BD plus potest, quam DC quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. atque est DC longitudine commensurabilis expositæ rationali AC. ergo CB est apotome quinta. rursus quoniam AB extrema, ac media ratione secatur in C; & AC est maior portio, erit rectangulum ABC æquale quadrato ex AC. quadratum igitur ex AC ad CB applicatum latitudinem faciet AB. sed quadratum rationalis ad apotomen applicatum latitudinem facit eā, quæ ex binis nominibus; & eundem ordinem habet, quem ipsa apotome ex 114 decimi. ergo AB ex binis nominibus est quinta. si igitur maior portio rectæ lineæ extrema, ac media ratione sectæ sit rationalis, expositæ rationali longitudine commensurabilis

3. huius:
6. decimi
6. dif. decimi
9. decimi
9. decimi
5. dif. tertium.

Non surabilis

EVCLID. ELEMENT.

mensurabilis, erit maior portio apotomē quinta, & tota ex binis nominibus quinta. quod demonstrare oportebat.

PROPOSITIO II.

Si minor portio rectae lineae extrema ac media ratione secta sit rationalis, exposita quoque rationali longitudine communisurabilis, erit maior portio ex binis nominibus quinta, & tota ex binis nominibus prima.

Sit recta linea AB, quae extrema, ac media ratione secetur in C, & sit minor portio CB rationalis, exposita quoque rationali longitudine communisurabilis. Dico maiorem portionē AC esse ex binis nominibus quintam; & totam AB ex binis nominibus primam. Secetur enim AC bisariam in D. Eadem ratione, qua supra, demonstrabitur quadratum ex ED quadrati ex DC quintuplum esse. itaque secetur DC in E, ita ut DE ad EC eandem proportionem habeat, quam ED ad DC. erit quadratum ex DE quadrati ex EC quintuplum, & ipsi communisurabile. & quoniam est ut tota BD ad totam DC, ita pars DE ad partem EC, erit & reliqua BE ad reliquam ED, ut ED ad DC, hoc est ut DE ad EC, ergo cum tres rectae lineae proportionales sint BE ED EC, erit BE ad E C, ut quadratum ex BE ad quadratum ex ED. sed quadratum ex BE quintuplum est quadrati ex ED: est enim BE ad ED, ut ED ad DC. quare BE ipsius

19. quinti

Cor. 10. sexti

6. dif. decimi

9. dif. decimi

9. decimi

17. decimi

9. decimi

quadratum ex DE superat quadratum ex EC. habebit quadratum ex DE ad quadratum ex FG proportionem eam, quam habet 5 ad 4. ergo FG ipsi DE longitudine est incommensurabilis. itaque quoniam DE plus potest quam EC quadrato rectae lineae sibi incommensurabilis longitudine, estque EC expositae rationali CB longitudine communisurabilis: erit DC ex binis nominibus quinta. est autem AC ipsius CD dupla. ergo & AE est quinta ex binis nominibus. recta enim linea communisurabilis ei, quae est ex binis nominibus, & ipsa ex binis nominibus est, atque ordine eadem ex 67 decimi libri. Et cum quadratum ex AC sit aequale rectangulo ABC, si ad rationalem BC applicetur, latitudinem faciet ipsam AB. ergo AB ex binis nominibus est prima. quadratum namque eius, quae ex binis nominibus ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus primam ex 98 decimi. si igitur minor portio rectae lineae extrema, ac media ratione sectae sit rationalis, expositae rationali longitudine communisurabilis, erit maior portio ex binis nominibus quinta, & tota ex binis nominibus prima. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

Si pentagoni equilateri tres anguli siue continuati, siue non continuati fuerint aequales, equiangulum erit pentagonum.

Pentagoni enim equilateri ABCDE tres anguli primum continui, qui ad puncta ABC aequales inter se sunt. Dico pentagonum ABCDE aequiangulum esse. Iungantur enim AC BE FD. & quoniam duae CB BA duabus BA AE aequales sunt, altera alteri, & angulus CBA est aequalis angulo BAE, erit basis AC aequalis basi BE, & triangulum ABC triangulo ABE aequale, & reliqui anguli reliquis angulis aequales, quibus aequalia latera

subtenduntur.

4. primi

subtenduntur. angulus quidem BCA angulo BEA, angulus vero ABE angulo CAB. quare & latus AF est æquale lateri BF. ostensa autem est & tota AC toti BE æqualis. ergo & reliqua FC est æqualis reliquæ FE. atque est CD æqualis DE. duæ igitur FC CD duabus FE ED æquales sunt, & basis ipsorum est communis FD. quare angulus FCD angulo FED est æqualis. ostensus autem est & angulus BCA æqualis angulo AEB. totus igitur BCD æqualis. est toti AED. sed angulus BCD positus est æqualis angulis, qui sunt ad puncta AB. ergo & AED angulus angulis, qui sunt ad AB æqualis erit. similiter demonstrabimus & angulum CDE angulis, qui sunt ad AB esse æqualem. æquiangulum igitur est ABCDE pentagonum. sed non sint anguli continuati sibi ipsis æquales, sed qui sunt ad puncta ACD. Dico & sic æquiangulum esse ABCDE pentagonum. Iungatur enim BD. & quoniam duæ BA AE duabus BC CD æquales sunt, & angulos æquales continent; erit basis BE æqualis basi BD, & ABE triangulum triângulo BCD, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera subtenduntur. æqualis igitur est angulus AEB angulo CDB. est autem & BED angulus angulo BDE æqualis, quoniam & latus BE est æquale lateri BD. totus igitur angulus AED toti CDE est æqualis. Sed angulus CDE angulis, qui sunt ad puncta AC æqualis ponitur. ergo & AED angulus angulis, qui sunt ad AC est æqualis. Eadem ratione & angulus ABC æqualis est angulis, qui sunt ad ACD puncta. æquiangulum igitur est ABCDE pentagonum. quod de monstrare oportebat.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

Si pentagoni æquilateri, & æquianguli duos continuatos angulos subtendant rectæ lineæ, extrema, ac media ratione se mutuo secant. & maiores ipsarum portiones pentagoni lateri sunt æquales.

Pentagoni enim æquilateri, & æquianguli ABCDE duos continuatos angulos, qui sunt ad puncta AB subtendant rectæ lineæ AC BE, quæ sese in puncto H fecerint. Dico utramque ipsarum extrema, ac media ratione secari in puncto H: & maiores earum portiones pentagoni lateri æquales esse. describatur enim circa ABCDE pentagonum circulus ABCDE. & quoniam duæ rectæ lineæ EA AB duabus AB BC æquales sunt, & angulos æquales continent; erit basis BE basi AC æqualis, & ABE triangulum æquale triângulo ABC, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. æqualis igitur est BAC angulus angulo ABE. ergo AHE angulus anguli BAH est duplex; etenim extra triângulum est ABH. est autem & angulus EAC duplex anguli BAC, quod & circumferentia EDC circumferentiæ CB est dupla. ergo HAE angulus æqualis est angulo AHE; & ob id recta linea HE est æqualis ipsi EA, hoc est ipsi AB. et quoniam BA est æqualis AE, erit & angulus ABE angulo AEB æqualis. sed angulus ABE ostensus est æqualis angulo BAH. ergo & BEA angulus æqualis est angulo BAH. & communis duobus triângulis, videlicet triângulo ABE, & triângulo ABH est angulus ABE. reliquus igitur BAE reliquo AHB est æqualis. ergo triângulum ABE æquiangulum est triângulo ABH; ideoque ut EB ad BA, ita est AB ad BH: æqualis autem est BA ipsi EH. ut igitur BE ad EH, ita EH ad HB. Sed BE maiore est quam EH. ergo & EH quam HB est maior. recta igitur linea BE extrema, ac media ratione secata est in H, & maior portio HE pentagoni lateri est

Non æ equalis.

E V C L I D . E L E M E N T .

α qualis. Similiter demonstrabimus & A C extrema, ac media ratione secari in H, & maiorem eius portionem C H pentagoni lateri α qualem esse. quod demonstrare oportebat.

T H E O R E M A IX. P R O P O S I T I O. IX.

Si hexagoni & decagoni latera in circulo descripta componantur, erit tota recta linea extrema, ac media ratione secta, & maior ipsius portio erit hexagoni latus.

Sit circulus ABC, & descriptis in dicto circulo figuris, sit decagoni quidem latus BC, hexagoni vero CD, & in directum sibi ipsis constituantur. Dico totam rectam lineam BD extrema, ac media ratione secari in C, & maiorem eius portionem esse CD. Sumatur enim centrum circuli, quod sit E; iunganturq; EB EC ED, & BE ad A producat. quoniam igitur decagoni α quilateri latus est BC, erit ACB circumferentia circumferentiae BC quintupla; & ob id circumferentia AC. quadrupla est circumferentiae CB. ut autem circumferentia AC ad ipsam CB, ita AEC angulus ad angulum CEB. angulus igitur AEC anguli CEB quadruplus est. & quoniam EBC angulus est α qualis angulo E CB, erit angulus AEC. anguli ECB duplus. est autem recta linea EC α qualis ipsi CD; vtraque enim est α qualis lateri hexagoni, quod in circulo ABC describitur. quare & angulus CED α qualis est angulo CDE. est igitur angulus ECB anguli EDC duplus. fed & angulus AEC duplus ostensus est anguli ECB. angulus igitur AEC anguli EDC est quadruplus. ostensus autem est & angulus AEC quadruplus anguli BEC. ergo EDC angulus angulo BEC α qualis erit, atque est angulus EBD communis duobus triangulis BEC BED. & reliquis igitur BED reliquo ECB est α qualis. ideoq; triangulum EBD triangulo EBC α quiangulum. ergo ut DB ad BE, ita EB ad BC. α qualis autem est EB ipsi CD. ut igitur BD ad DC, ita DC ad CB. atq; est BD maior quam DC. ergo & DC quam CB est maior; ac propterea recta linea BD extrema, ac media ratione secta est in C, & CD est maior ipsius portio: quod demonstrare oportebat.

Vlt. sexti.

5. primi.
32. primi.

5. primi.
32. primi.

32. primi.
4. sexti.

F. C. C O M M E N T A R I J S.

Ex iam demonstratis & alia demonstrare licet, nempe hec.

P R O P O S I T I O I.

Si latus hexagoni extrema, ac media ratione secetur, erit maior eius portio decagoni latus.

Sit recta linea AB, quae secetur in C, ita ut AC sit hexagoni latus, & CB latus decagoni in eodem circulo descripti. ergo AB extrema, ac media ratione secatur in C: atque est AC maior portio. abscindatur ab AC linea CD ipsi CB α qualis. erit AC quoq; extrema, ac media ratione secta in D: atque erit CD portio maior ex ijs, quae a nobis demonstrata sunt ad quintam huius. est autem AC hexagoni latus, & CD latus decagoni. si igitur hexagoni latus extrema, ac media ratione secetur, erit maior eius portio decagoni latus. quod demonstrare oportebat.

Ex antecess.
dante.

Si in circulo rationalem diametrum habente decagonum æquilaterum describatur, erit decagoni latus apotome quinta.

Maneant enim eadem, quæ supra; & sit diametrum AB rationalis. Dico decagoni latus BC esse apotomen quintam. Quoniam enim diametrum AB est rationalis, erit quoque eius dimidia EC , hoc est CD rationalis. atque est DC maior portio rectæ lineæ DB extrema, ac media ratione sectæ; & CB minor portio eiusdem. Quando autem maior portio rectæ lineæ, quæ extrema, ac media ratione secatur sit rationalis, minor portio est apotome quinta. quod à nobis supra demonstratum fuit. ergo latus decagoni BC est apotome quinta. quod oportebat demonstrare.

ad 6. huius.
Propo. 1.

PROPOSITIO. III.

Si latus decagoni æquilateri in circulo descripti, sit rationale, erit circuli diameter ex binis nominibus quinta.

Isdem enim manentibus sit latus decagoni BC rationale. Dico diametrum AB esse ex binis nominibus quintam. Quoniam enim BC , videlicet minor portio rectæ lineæ extrema, ac media ratione sectæ est rationalis, erit maior portio CD ex binis nominibus quinta. quod etiam à nobis demonstratum est: ipsius autem CD dupla est AB ; & quæ longitudine commensurabilis est ei, quæ ex binis nominibus; & ipsa ex binis nominibus est, atque ordine eadem ex 67 decimi libri. ergo et AB ex binis nominibus est quinta. quod demonstrare oportebat.

ad 6. huius.
Propo. 2.

THEOREMA X. PROPOSITIO. X.

Si in circulo pentagonum æquilaterum describatur, latus pentagoni potest, & hexagoni & decagoni latus in eodem circulo descriptorum.

Sit circulus $ABCDE$, & in ipso pentagonum æquilaterum $ABCDE$ describatur. Dico pentagoni $ABCDE$ latus posse latus, & hexagoni, & decagoni in eodem circulo descriptorum. Sumatur enim centrum circuli F , iunctaq; AF ad G producat, & iungatur FB ; deinde à puncto F ad AB perpendicularis agatur FH , & ad K producat, iunganturque AK KB . & rursus à puncto F ad AK perpendicularis agatur FL , & producat, iungaturque AL LB . Quoniam igitur circumferentia $ABCG$ est æqualis circumferentiæ $AEDG$, quarum ABC æqualis est ipsi AED , erit reliqua CG reliquæ GD æqualis.

Sed CD est pentagoni. ergo CG decagoni erit. quod cum AF sit æqualis FB & FH perpendicularis, erit & angulus AFK æqualis angulo KFB . quare & circumferentiæ AK circumferentiæ KB est æqualis. dupla igitur est circumferentiæ AB circumferentiæ BK ; & ob id recta linea AK est decagoni latus. Eadem ratione & AK est dupla KM . & quoniam circumferentiæ AB dupla est circumferentiæ BK , æqualis autem CD circumferentiæ circumferentiæ AB , erit circumferentiæ CD circumferentiæ BK dupla. estque DC dupla ipsius CG . ergo CG est æqualis BK . sed BK ipsius KM est dupla, quoniam &

8 primi.
16. ternij.

Si in circulo rationalem diametrum habente pentagonum æquilaterum describatur, pentagoni latus est linea irrationalis, quæ minor appellatur.

A qua CG reliquę GD æqualis. quod si iungamus
AG, fient anguli ad L recti, & DC dupla ipsius CL. Eadem ratione & anguli ad M re-
cti sunt, & AC dupla CM. Quoniam igitur angulus ALC est æqualis angulo AMF,
communis autem duobus triangulis ALC, & AMF est angulus LAC; reliquus AC
L reliquo MFA æqualis erit; ideoq; triangulum ACL triangulo AMF æquiangulū.
ergo ut LC ad CA, ita MF ad FA; & antecedentium dupla. quare vt dupla ipsius L
C ad CA, ita ipsius MF dupla ad FA. sed vt ipsius MF dupla ad FA, ita est MF ad di-
midia ipsius FA. & vt igitur dupla ipsius LC ad CA, ita MF ad ipsius FA dimidia:
& consequentium dimidia. quare ut dupla LC ad dimidiam ipsius CA, ita MF ad
quartam partem ipsius FA. atque est ipsius quidem LC dupla CD; ipsius vero CA
dimidia

dimidia

dimidia CM; & ipsius FA quarta pars FK. est igitur vt DC ad CM, ita MF ad FK: & componendo vt vtraque DCM ad CM, ita MK ad KF. ergo ut quadratum, quod fit ex vtraque DCM ad quadratum ex CM, ita quadratum ex MK ad id, quod fit ex KF quadratum. & quoniam recta linea, quæ duo pentagoni latera subtendit, vt AC extrema, ac media ratione secta, maior portio est æqualis lateri pentagoni, hoc est ipsi DC; & maior portio affluens dimidium totius quintuplum potest eius, quod fit à totius dimidia; atque est totius AC dimidia CM: erit quadratum ex DCM tanquam ex vna linea, quintuplum eius, quod fit ex CM. vt autem quadratum ex DCM tanquam ex vna linea ad quadratum ex CM, ita ostendimus esse quadratum ex MK ad quadratum ex KF. quintuplum igitur est quadratum ex MK quadrati ex KF: estque quadratum ex KF rationale; quippe cum diameter rationalis sit. ergo & rationale est quadratum ex MK; & ipsa MK rationalis. quadratum enim ex MK ad quadratum ex KF proportionem habet, quam numerus ad numerum. & quoniam BF quadrupla est ipsius FK, erit BK ipsius KF quintupla, & quadratum ex BK vigintiquintuplum quadrati ex KF. quadratum autem ex MK quintuplum est quadrati ex KF. ergo quadratum ex BK quadrati ex KM est quintuplum; ac propterea ad illud proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. incommensurabilis igitur est BK ipsi KM longitudine. atque est vtraque ipsarum rationalis. ergo BK KM rationales sunt potentia solum commensurabiles. si autem à rationali rationalis auferatur potentia solum commensurabilis existens toti, reliqua irrationalis est, quæ apotome appellatur. quare MB est apotome, & ipsi congruës MK. Dico & quæ tam esse. quo enim quadratum ex BK superat quadratum ex KM, illi fit æquale quadratum ex N. ergo BK plus potest, quam KM quadrato ex N. & quoniam commensurabilis est KF ipsi FB, & componendo KB commensurabilis ipsi BF; sed & BF commensurabilis ipsi BH longitudine, erit & KB ipsi BH commensurabilis. quod cum quadratum ex BK quintuplum sit quadrati ex KM, habebit quadratum ex BK ad quadratum ex KM proportionem eam, quam habet quinque ad vnum. Ergo per conversionem rationis quadratum ex BK ad quadratum ex N proportionem habet, quam quinque ad quattuor, & non eam, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. incommensurabilis igitur est BK ipsi N: idcircoque BK plus potest, quam KN quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis. itaque quoniam tota BK plus potest, quam congruens MK, quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis, & tota BK commensurabilis est expositæ rationali BH, erit MB apotome quarta. quod autem rationali, & apotome quarta continetur rectangulum irrationale est, & ipsum potens est irrationale, quæ minor appellatur. sed AB potest id, quod continetur HB BM, propterea quod iuncta AH triangulum ABH est equiangulum triangulo ABM: atque est vt HB ad BA, ita AB ad BM. ergo AB pentagoni lateris est linea irrationalis, quæ minor appellatur. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIUS.

Quod si iungamus AG, sient anguli ad L recti, & DC dupla ipsius CL] *In illis enim AC ALG, si etiam intelligatur iuncta AD, quoniam circumferentia CG est æqualis circumferentiae GD, erit angulus CAG æqualis angulo GAD. duæ igitur CA AL duabus DA AL æquales sunt, & angulus CAL est æqualis angulo DAL, ergo & basis CL basi LD est æqualis, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera subtenduntur. angulus igitur ALC æqualis angulo ALD. & ob id vterque rectus est. & cum CL sit æqualis LD, erit DC ipsius CL dupla.*

Et antecedentium dupla] *Quoniam enim est vt LC ad CA ita MF ad FA, vt autem dupla ipsius LC ad LC, ita dupla ipsius MF ad MF; erit ex æquali vt dupla ipsius LC ad CA, ita dupla ipsius MF ad FA.*

Ergo vt quadratum, quod fit ex vtraque DCM ad quadratum ex CM] *Ex 22. sexti libri.*

Maior portio est æqualis lateri pentagoni, hoc est ipsi DC] *Ex 8. huius.*

totius

E V C L I D . E L E M E N T .

- E** Et maior portio assumens dimidiam totius quintuplum potest eius, quod sit a totius dimidia] *Ex 1. huius.*
- F** Ergo & rationale est quadratum ex MK] *Rationali enim commensurabile, & ipsum rationale est ex nona diffinitione decimi libri.*
- C** Et ipsa MK rationalis] *Ex 8. diffinitione eiusdem libri.*
- H** Et quadratum ex BK viginti quintuplum quadrati ex KF] *Ex 20 sexti libri. est enim 25 ad 5, vt 5 ad 1. quare 25 ad 1. proportionem duplam habet eius, quam 5 habet ad 1. ex 10 diffinitione quinti libri.*
- K** Ergo quadratum ex BK quadrati ex KM est quintuplum] *Nam cum quadratum ex BK ad quadratum ex KF sit vt 25 ad 1, quadratum vero ex MK ad idem quadratum ex KF sit vt 5 ad 1, erit quadratum ex BK ad quadratum ex MK, vt 25 ad 5, hoc est vt 5 ad 1.*
- L** Incommensurabilis igitur est BK ipsi KM longitudine] *Ex nona decimi libri.*
- M** Si autem a rationali rationalis auferatur potentia solum commensurabilis existens toti, reliqua irrationalis est, quæ apotome appellatur] *Ex 74 decimi libri.*
- N** Et quoniam commensurabilis est KF ipsi FB] *Intellige commensurabilis longitudine, quemadmodum & inferius; posita est enim KF quarta pars ipsius FA, hoc est ipsius FB.*
- O** Et componendo KB commensurabilis ipsi BF] *Ex 16 decimi.*
- P** Sed & BF commensurabilis ipsi BH longitudine] *Est enim BF ipsius BH dimidia.*
- Q** Erit & BK ipsi BH commensurabilis] *Ex 12 decimi.*
- R** Erit MB apotome quarta] *Ex quarta tertiarum diffinitionum.*
- S** Quod autem rationali, & apotoma quarta continetur rectangulum irratione est & ipsum potens est irrationalis, quæ minor appellatur] *Ex 95 decimi.*
- T** Sed AB potest id, quod continetur HB BM] *Ex corollario 8 sexti, & 17 eiusdem.*

THEOREMA XII. PROPOSITIO. XII.

Si in circulo triangulum æquilaterum describatur, trianguli latus potentia triplum est eius, quæ ex circuli centro.

Sit circulus ABC, & in ipso triangulum æquilaterum describatur ABC. Dico trianguli ABC latus potentia triplum esse eius, quæ est ex circuli ABC cetro. fumatur enim circuli cetro D, & iuncta AD producat ad E, & BE iungatur. Itaque quoniam æquilaterum est ABC triangulum, erit BEC circumferentia tertia pars circumferentiæ circuli ABC. ergo circumferentia BE est sexta pars circuli circumferentiæ; ideoque recta linea BE est latus hexagoni, & æqualis ipsi DE, quæ est ex circuli centro. & quoniam AE est dupla ipsius ED, erit quadratum ex AE quadrati ex ED, hoc est quadrati ex EB quadruplum. quadratum autem ex AE est æquale quadratis ex AB BE. ergo quadrata ex AB BE quadrupla sunt quadrati ex BE; & diuidendo quadratum ex AB quadrati ex BE triplum; atque est BE æqualis ED. quadratum igitur ex AB triplum est quadrati ex DE. ergo trianguli latus est potentia triplum eius, quæ ex circuli centro. quod demonstrare oportebat.

Corol. 15.
quart.
20. sexti.
47 primi.

F. C. COMMENTARIUS.

Constat etiam latus trianguli æquilateri ad rectam lineam, quæ ab angulo ad basin perpendiculis ducitur, eam potentia proportionem habere, quam habet 4 ad 3.

Sit enim triangulum æquilaterum ABC, cuius basis BC bifariam secetur in D, & AD iungatur. erit AD ad ipsam AC perpendicularis; sunt enim duo latera AD DB duobus lateribus AD DC

DC aequalia, & basis AB est aequalis basi AC. angulus igitur ADB est aequalis angulo ADC. & ideo uterque ipsorum rectus, & AD ad BC est perpendicularis. Dico quadratum ex B A ad quadratum ex AD proportionem habere eandem, quam 4 ad 3. Quoniam enim AB dupla est ipsius BD, erit quadratum ex AB quadrati ex BD quadriplum: atque est quadratum ex A B aequale quadratis ex AD DB, quadratum igitur ex BA ad quadratum ex AD eam proportionem habet, quam 4 ad 3. quod oportebat demonstrare.

20. sextri.
47. primi.

PROBLEMA I. PROPOSITIO. XIII.

Pyramidem constituere, & sphaerę comprehendere data, ac de monstrare sphaerę diametrum potentia sesquialteram esse lateris ipsius pyramidis.

Exponatur enim datae sphaerę diameter AB, & secetur in C, ita ut AC ipsius CB sit dupla: describaturque in AB semicirculus ADB: & a puncto C ipsi AB ad rectos angulos ducatur CD, & DA iungatur. exponatur praeterea circulus EFG aequalem habens eam, quae ex centro ipsi DC, in quo describitur triangulum equilaterum EFG: sumaturque centrum circuli H, & iungantur E H HF HG: atque a puncto H ipsi plano circuli EFG ad rectos angulos erigatur HK, ita ut H K ipsi AC sit equalis, & KE KF KG iungantur. Quoniam igitur HK recta est ad planum circuli EFG, & ad omnes rectas lineas, quae in eodem circuli plano existentes ipsam contingunt, rectos angulos faciet, contingit autem ipsam vnaquamque linearum HE HE HF HG, ergo HK ad vnamquamque ipsarum HE HF HG est perpendicularis, & quoniam AC quidem est aequalis HK, C D vero ipsi HE, & rectos angulos continent, erit basis DA aequalis basi KE. Eadem ratione & vtraque KF KG ipsi DA est equalis. tres igitur KE KF KG inter se aequales sunt. quod cum AC sit dupla CB, erit A B ipsius BC tripla, ut autem AB ad BC, ita quadratum ex AD ad quadratum ex DC, ut deinceps demonstrabitur. triplum igitur est quadratum ex AD quadrati ex DC, est autem & quadratum ex FE quadrati ex EH triplum, atque est DC aequalis EH, ergo & AD ipsi EF est equalis, sed AD ostensa est aequalis vnicuique ipsarum KE KF KG, & vnaquaeque igitur ipsarum EF FC GE vnicuique KE KF KG est equalis, & ob id equaliter sunt quattuor triangu-
la EFG KEF KFG KGE. pyramis igitur constituta est ex quattuor triangulis aequalibus & aequaliteris, cuius basis quidem est triangulum EFG, vertex autem K punctum. Itaque oportet ipsam & sphaera data comprehendere, & ostendere sphaerę diametrum potentia sesquialteram esse lateris pyramidis. producat enim recta linea HL in directum ipsi HK: ponaturque HL

3. diffinitio.
undecimi.

4. primi.

000 ipsi

17. sexti.

8. sexti.

Cor. 8. sexti.

Cor. 10. sexti.

Cor. 8. sexti.

17. sexti.

8. sexti.

17. sexti.

Cor. 8. sexti.

ipsi BC æqualis . & quoniam est vt AC ad CD, ita DC ad CB; æqualis autem AC quidem ipsi KH, CD vero ipsi HE, & CB ipsi KL: erit vt K H ad HE, ita EH ad HL. rectangulum igitur K HL est æquale quadrato ex EH. atque est rectus vergete angulorum K HE EHL. ergo in KL descriptus semicirculus & per punctum E transibit. nam si coniungamus EL, angulus LEK fiet rectus, cum triangulum ELK equiangulum sit vnicuique; triangulorum ELH EKH. si igitur manente KL semicirculus cõuersus in eundem rursus locum restituatur, à quo cepit moueri, etiã per puncta FG transibit, iunctis FL LG; & rectis similiter factis ad puncta FG angulis: atque erit pyramis comprehensa data sphæra; etenim KL sphæræ diameter est æqualis diametro datæ sphæræ AB, quoniam ipsi quidem AC ponitur æqualis KH, ipsi vero CB æqualis HL. Dico igitur sphæræ diametrum potentia sesquialteram esse lateris pyramidis. Quoniam enim AC dupla est ipsius CB, erit AB ipsius BC tripla. ergo per conuersionem rationis BA sesquialtera est ipsius AC. vt autem BA ad AC, ita est quadratum ex BA ad quadratum ex AD, quoniam iuncta BD, est vt BA ad AD, ita DA ad AC ob similitudinem triangulorum DAB DAC, & quod vt prima ad tertiam, ita quadratum ex prima ad quadratum ex secunda. ergo quadratum ex BA sesquialterum est quadrati ex AD. atque est BA quidem datæ sphæræ diameter, AD vero æqualis lateri pyramidis. sphæra igitur diameter sesquialtera est lateris pyramidis. quod demonstrare oportebat.

Itaque demonstrandum est vt A Bad BC, ita esse quadratum ex AD ad quadratum ex DC.

Exponatur enim semicirculi figura; iungaturq; DB: & ex AC describatur quadratum EC, & parallelogrammum FB compleatur. Quoniã igitur est vt BA ad AD, ita DA ad AC, propterea quod triagulum DAB æquiangulum est triagulo DAC; erit rectangulum contentum BAC quadrato ex AD æquale. & quoniam est vt AB ad BC, ita parallelogrammum EB ad parallelogrammum BF; atque est parallelogrammum quidem EB, quod continetur BA AC; est enim EA æqualis AC; parallelogrammum vero BF æquale est ei, quod AC CB continetur: erit ut AB ad BC, ita rectangulum contentum BA AC ad contentum AC CB. est autem contentum BA AC æquale quadrato ex AD; & contentum AC CB quadrato ex DC. æquale: perpendicularis enim DC media est proportionalis inter basis portio-

nes AC CB, cum angulus ADB sit rectus. ex quibus sequitur vt AB ad BC, ita esse quadratum ex AD ad quadratum ex DC. quod demonstrare oportebat.

P. C. COMMENTARIUS.

Vt autem AB ad BC, ita quadratum ex AD ad quadratum ex DC] *Quod deinceps A demonstrabitur, videlicet ad finem huius, sed in scholio aliter demonstratur, hoc modo.*

Quoniam enim est ut BA ad A C, ita quadratum ex D A ad quadratum ex A C, erit per conuersionem rationis vt AB ad BC, ita quadratum ex AD ad quadratum ex DC] *Nam tres rectæ lineæ B A A D A C deinceps proportionales sunt ex corollario 8. sex ti, & quadratum ex AD superat quadratum ex AC, quadrato ex DC, ex 47 primi.*

Est autem & quadratum ex FE quadrati ex EH triplum] *ex antecedente.*

Ergo & DA ipsi EF est æqualis] *Quoniam quadratum ex AD triplum est quadrati ex DC, C et quadrati DC ex FE triplum quadrati ex EH; estq; quadratū ex DC æquale quadrato ex EH, quod DC ipsi EH sit æqualis: erit quadratū ex AD æquale quadrato ex EF ideoq; AD ipsi EF æqualis.*

PROBLEMA II. PROPOSITIO. XIII.

Octaedrum constituere, & sphæ-
ra comprehendere, qua & pyrami-
dem: demonstrareq; sphæræ diame-
trum potentia duplam esse lateris
octaedri.

Exponatur datæ sphæræ diameter AB: & in C bifariam secetur; describaturq; in AB semicirculus ADB; & à puncto C ipsi AB ad rectos angulos ducatur CD; & DB iungatur. exponatur præterea quadratum EFGH habens vnumquodque latus æquale ipsi BD: & iunctis HF EG, erigatur à puncto K ipsi EF GH quadrati plano ad rectos angulos KL; producaturnq; ad alteras partes plani, vt KM: & auferatur ab vtraque rectarum linearum KL KM vni ipsarum KE KF KG KH æqualis vtraque KL XM: & iungantur LE LF LG LH ME MF MG MH. qm̄ igitur KE est æqualis KH, atq; est rectus angulus EKH; erit quadratū ex HE quadrati ex EK duplum: Rursus quoniam LK est æqualis KE, & rectus LKE angulus; erit quadratum ex EL duplum quadrati ex EK. ostensum est autem & quadratum ex HE quadrati ex EK duplum. ergo quadratum ex LE æquale est quadrato ex EH, & LE ipsi EH æqualis. Eadē ratione & LH est æqualis HE. æquilaterū igitur est LEH triangulum. similiter ostendemus & vnumquodque reliquorum triangulorum, quorum bases sunt latera quadrati EFGH, vertices autem LM puncta, æquilaterum esse, octaedrum igitur constitutum est, quod octo triangulis æquilateris continetur: itaq; oportet ipsum & data sphæra comprehendere: demonstrareq; sphæræ diametrum potentia duplam esse lateris octaedri. quoniam enim tres rectæ lineæ LK KM KE inter se æquales sunt, semicirculus in LM descriptus, & per punctum E transibit. & ob eandem causam si manente LM conuerius semicirculus in eundem locum restituitur, à quo exipit

moueri, transibit etiam per puncta FGH: atque erit octaedrum sphaera comprehensum. Dico etiam comprehensum esse data sphaera. quoniam enim LK est equalis KM, communis autem KE, & angulos equales continent; erit basis LE basi EM æqualis. & quoniam rectus est LEM angulus, in semicirculo enim, erit quadratum ex LM quadrati ex LE duplum. rursus quoniam AC est equalis CB, erit AB dupla ipsius BC, ut autem AB ad BC, ita quadratum ex AB ad quadratum ex BD. duplum igitur est quadratum ex AB quadrati ex BD. ostensum est autem & quadratum ex LM quadrati ex LE duplum. atque est quadratum ex BD æquale quadrato ex LE; posita est enim EH ipsi DB equalis. ergo quadratum ex A B est æquale quadrato ex LM; ac propterea ipsa AB est equalis LM. est autem AB diameter datæ sphaeræ. quare LM est æqualis datæ sphaeræ diametro. octaedrum igitur comprehensum est data sphaera: & simul demonstratum est sphaeræ diametrum lateris octaedri potentia duplam esse.

47. primi.

Cor. 2. & 1. s. exi.

PROBLEMA III. PROPOSITIO. XV.

Cubum constituere, & sphaera comprehendere, qua & priores, demonstrareque sphaeræ diametrum lateris cubi potentia triplam esse.

Exponatur enim datæ sphaeræ diameter AB: & secetur in C, ita ut AC ipsius CB sit dupla: describaturque in AB semicirculus ADB, & à puncto C ipsi AB ad rectos angulos ducatur CD, & DB iungatur. deinde exponatur quadratum EFGH, habens unumquodque latus equalis ipsi DB: & à punctis EFGH quadrati EFGH plano ad rectos angulos ducantur EK FL GM HN, & auferatur ab unaquaque rectarum linearum EK FL GM HN uni ipsarum EF FC GH HE æqualis unaquæque EK FL GM HN: & KL L M MN NK iungantur. cubus igitur constitutus est FN, qui sex quadratis equalibus continetur. Itaque oportet ipsum & sphaera data comprehendere, demonstrareque sphaeræ diametrum potentia triplam esse lateris cubi. Iungantur enim KG EG. & quoniam rectus est KEG angulus, propterea quod & KE perpendicularis sit ad EG planum uidelicet, & ad rectam lineam EG: semicirculus in KG descriptus & per punctum E transibit. Rursus quoniam FG perpendicularis ad utramque ipsarum FL FE, & ad FK planum est perpendicularis, quare si iungamus FK ipsa FG & ad FK perpendicularis erit: ac propterea rursus in KG descriptus semicirculus transibit & per punctum F. Similiter autem & per reliqua cubi puncta transibit. si igitur manente KG conuersus semicirculus in eodem rursus locum restituatur, à quo cepit moueri, erit cubus sphae-

3. diff. unde cimi.

4. Vndecimi

ra comprehensus. Dico & data sphaera. Quoniam enim GF est aqualis FE, atque est rectus qui ad F angulus; erit quadratum ex EG quadrati ex EF duplum. equalis autem est EF ipsi EK. quadratum igitur ex EG duplum est quadrati ex EK. ergo quadrata ex GE, EK, hoc est quadratum ex GK triplum est quadrati ex KE. & quoniam AB est ipsius BC tripla: & ut AB ad BC, ita quadratum ex AB ad quadratum ex BD; erit quadratum ex AB quadrati ex BD triplum. ostendit^{ur} enim autem & quadratum ex GK triplum quadrati ex KE: & posita est KE ipsi BD equalis. ergo & KG est equalis AB. atque est AB datae sphaerae diameter. quare & KG aqualis erit diametro datae sphaerae. cubus igitur data sphaera est constructus est sphaerae diametrum lateris cubi potentia & oportebat.

- 47 prima.

Coroll. 2^a
6^{ta}.

PROBLEMA V. PROPOSITIO XVI.

Icosaedrum constituere & sphaera comprehendere, qua & prædictas figuras; demonstrareque icosaedri latus irrationalem esse lineam, que minor appellatur.

Exponatur datæ sphaeræ dia-
meter AB; seceturque in C, ita
ut AC ipsius DB sit quadrupla:
& in AB descripto semicirculo
ADB, ducatur à puncto C ipsi A
B ad rectos angulos recta linea
CD, & DB iungatur. deinde ex-
ponatur circulus EFGHK, cuius
ea, quæ ex centro sit æqualis ipsi
DB: describatur; in circulo E
FGHK pentagonum æquilaterū
& æquiangulum EFGHK: & cir-
cumferentia EF FG GH HK
KE bifariam secentur in LMNX
Opunctis; & iungatur EL LF
FM MG GN NH HX XK K
O OE: & similiter LM MN NX
XO OL. æquilaterum igitur est
LMNXO pentagonum; & recta
linea EO est decagoni latus. de-
inde à punctis EFGHK ipsi pla-
no circuli ad rectos angulos eri-
gantur EP FR GS HT KY æ-
quales existentes ei, quæ ex cen-
tro circuli EFGHK, & iungatur
FR RS ST TY YP: FL LR R
M MS SN NT TX XY YO O
P. Quoniam igitur utraque ipsa
rursus E KY eidem plano est ad
rectos angulos, erit EP ipsi KY

parallel

31 primi.

1077

parallela; atque est ipsi æqualis. quæ autem æquales, & parallelas ad easdem partes coniungunt rectæ linæ, & ipsæ æquales, & parallele sunt. ergo PY ipsi EK & æqualis est, & parallela. sed EK est latus pentagoni æquilateri. ergo & PY est pentagoni æquilateri latus, in circulo EFGHK descripti. Eadem ratione & unaquæque ipsarum PR RS ST TY est latus pentagoni æquilateri in eodem circulo descripti. æquilaterum igitur est PRSTY pentagonum. & quoniam hexagoni quidem latus est PE, de-

B goni uero EO, atque est rectus PEO angulus; erit PO latus pentagoni. etenim la-

1078

tus pentagoni potest & hexagoni, & decagoni latus in eodem circulo descriptum. Eadem ratione & OY est pentagoni latus; est autem & PY latus pentagoni. ergo æquilaterum est triangulum POY. & ob eandem causam unumquodque triangulorum PLR RMS SNT TXY est æquilaterum. & quoniam pentagoni ostensa est utraque ipsarum PL LO, atque est LO pentagoni; erit PLO

æquilaterum triangulum. Eadem ratione & unumquodque triangulorum LRM MSN NTX XYO æquilaterum est. sumatur centrum circuli EFGHK, quod sit punctum V; & à puncto V ipsi circuli plano ad rectos angulos erigatur VN, & ad alteras partes producat, ut VR; & auferatur hexagoni quidem latus VQ; decagoni vero utraque ipsarum VT QZ, & iungantur PQ QY VN EV LV Lr rM. & quoniam utraque ipsarum VQ PE circuli plano est ad rectos angulos, erit VQ ipsi PE parallela. sunt autem & æquales. ergo EV PQ & æquales sunt, & parallele: estq; EV hexagoni latus. hexagoni

6 undecimi

igitur & PQ quod cum hexagoni quidem latus sit PQ, decagoni vero QZ, & rectus PQZ angulus; erit PQ latus pentagoni. Eadem ratione & YZ pentagoni est latus; quoniam si iungamus VK, QY & æquales, & ex opposito erunt. atque est VK ex centro circuli, uidelicet hexagoni latus. ergo & QY est latus hexagoni. decagoni autem QZ, & rectus angulus est YQZ, pentagoni igitur est YZ: estque PY pentagoni. quare æquilaterum est PYZ triangulum. Eadem ratione & æquilaterum est unumquodque reliquorum triangulorum, quorum bases sunt PR RS ST TY rectæ linæ, ueritæ autem à punctum. Rursus quoniam hexagoni est VL, decagoni vero Vr, & angulus LVr rectus; erit Lr pentagoni. Eadem ratione si iungamus MV, quæ est hexagoni, concludetur & Mr pentagoni esse. est autem & LM pentagoni æquilaterum igitur est LMr triangulum. similiter ostendetur & æquilaterum esse unumquodque reliquorum triangulorum quorum bases sunt MN NX XO. OL, uertex autem r punctum. costitutum igitur est icosædrum, uiginti triangulis æquilateris contentum. Itaq; oportet ipsum sphaera data comprehendere, demonstrareque icosædri latus lineam irrationalem esse, quæ minor appellatur. Quoniam enim hexagoni latus est VQ, decagoni vero QZ; recta linea VN extrema, ac media ratione secata est in Q, & VQ est maior portio. est igitur ut VN ad VQ, ita VQ ad QZ. atque est VQ ipsi VL æqualis, &

10. huius.

1079

1080

Quia ipsi $V\Gamma$. quare ut ΩV ad VL , ita LV ad $V\Gamma$. & sunt anguli ΩVL $LV\Gamma$ recti, si igitur iungamus rectam lineam $L\Omega$, erit $\angle L\Omega$ rectus angulus, ob similitudinem triangulorum $\angle L\Omega$ $VL\Omega$. ergo semicirculus in $\angle \Omega$ descriptus etiam per L transibit. Eadem ratione quoniam est ut ΩV ad VQ , ita VQ ad $Q\Omega$; & æqualis est ΩV quidem ipsi ΓQ . VQ uero ipsi $Q\Gamma$; erit ut ΓQ ad $Q\Gamma$, ita ΓQ ad $Q\Omega$; ideoque si rursus iungamus $\Gamma\Gamma$, erit angulus, qui ad P rectus. semicirculus igitur descriptus in $\angle \Omega$ transibit & per P . Quod si manente $\angle \Omega$ conuersus semicirculus in eundem rursus locum restituitur, a quo cepit moueri, etiam per P , & per reliqua icosaedri puncta transibit: atque erit icosaedrum sphaera comprehensum. Dico & data, secetur enim VQ bifariam in Z & quoniam recta linea $V\Omega$ extrema, ac media ratione secta est in Q , & ΩQ est minor ipsius portio, ipsa ΩQ assumens dimidiam maioris portionis, videlicet QZ quintuplum poterit quadrati eius, quod à dimidia maioris portionis describitur. quadratum igitur ex ΩZ quadrati ex ZQ quintuplum est. & ipsius quidem $Z\Omega$ dupla est ΩZ ; ipsius vero AQ dupla QV . ergo quadratum ea ΩZ quintuplum est quadrati ex VQ & quoniam AC quadrupla est ipsius CB , erit AB ipsius BC quintupla. ut autem AB ad BC , ita quadratum ex AB ad quadratum ex BC . quadratum igitur ex AB quadrati ex BC est quintuplum. ostensum autem est & quadratum ex ΩZ quintuplum quadrati ex VQ ; atque est DB æqualis VQ ; utraque enim ipsarum est æqualis ei quæ ex centro circuli $EFGHK$. quare & AB est æqualis $\Gamma\Omega$, estque AB data sphaerae diameter. & $\Gamma\Omega$ igitur erit diameter datae sphaerae. ergo icosaedrum est data sphaera comprehensum. Dico icosaedri latus irrationalem esse lineam, quæ minor appellatur. Quoniã enim rationalis est sphaerae diameter, atque est potentia quintupla eius, quæ ex centro $EFGHK$ circuli; erit & quæ ex centro circuli $EFGHK$ rationalis, quare & diameter ipsius rationalis erit. si autem in circulo rationalis diameter habente pentagonum æquilaterum describatur, erit latus pentagoni linea irrationalis, quæ minor appellatur. sed pentagoni $EFGHK$ latus est icosaedri. ergo icosaedri latus est linea irrationalis, quæ minor appellatur.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum est sphaerae diametrum potentia quintupla esse eius, quæ ex centro circuli, à quo icosaedrum describitur: & sphaerae diametrum compositam esse ex latere hexagoni, & duobus decagoni lateribus, quæ in eodem circulo describuntur.

F. C. COMMENTARIUS.

Quoniam igitur utraq; ipsarum EP KY eidem plano est ad angulos rectos, erit AEP ipsi KY parallela. *Ex 6 undecimi.*

Erit FO latus pentagoni. *Ex 10 huius.*

Quoniam enim hexagoni est VQ decagoni uero $Q\Omega$, recta linea $V\Omega$ extrema, ac media ratione secta est in Q . *Ex 9 huius.*

Quare ut ΩV ad VL , ita LV ad $V\Gamma$: & sunt anguli ΩVL $LV\Gamma$ recti, si igitur iungamus rectam lineam $L\Omega$, erit $\angle L\Omega$ angulus rectus ob similitudinem triangulorum $\angle L\Omega$ $VL\Omega$. Quoniam enim est ut ΩV ad VL , ita LV ad $V\Gamma$, erit ut ΩV ad $V\Gamma$, videlicet ut prima ad tertiam, ita quadratum primæ ΩV ad quadratum VL secundæ: componendoque ut $\Omega\Gamma$ ad ΓV , ita quadrata ex ΩV VL , hoc est quadratum ex ΩL ad quadratum ex LV : & per conuersionem rationis ut $\Gamma\Omega$ ad ΩV , ita quadratum ex $L\Omega$ ad quadratum ex ΩV . quare $L\Omega$ est media proportionalis inter $\Gamma\Omega$ ΩV , quod deinceps demonstrabimus. ut igitur $\Gamma\Omega$ ad ΩL , ita $L\Omega$ ad ΩV , atque est angulus $L\Omega\Gamma$ utrique communis. ergo triangulum $\Gamma\Omega L$ simile est triangulo $L\Omega V$, & angulus $LV\Omega$ rectus est æqualis angulo $\Gamma L\Omega$. angulus igitur $\Gamma L\Omega$ rectus erit. At vero $L\Omega$ inter $\Gamma\Omega$ ΩV mediam esse proportionalem ex his apparebit.

Si sint tres rectæ lineæ, sitque ut prima ad tertiam, ita quadratum secundæ ad quadratum tertiarum, erunt dictæ lineæ deinceps proportionales.

Sint tres rectæ lineæ A B C ; sitque ut A ad C , ita quadratum ex B ad quadratum ex C . Dico ABC

EVCLID. ELEMENT.

ABC deinceps proportionales esse. Sumatur enim inter AC media proportionalis D, erit ut A ad C, ita quadratum ex A ad quadratum ex D, hoc est quadratum ex D ad quadratum ex C. sed ut A ad C, ita positum est quadratum ex B ad quadratum ex C. ergo quadratum ex D aequale est quadrato ex B; ac propterea D ipsi B est aequalis. tres igitur rectae lineae ABC deinceps proportionales sunt. sed licet expeditius demonstrare angulum $\triangle L\Omega$ rectum, esse hoc modo. Quoniam enim est ut ΩV ad VL , ita LV ad $V\Gamma$; suntque anguli ΩVL $LV\Gamma$ recti, erit triangulum ΩVL triangulo $LV\Gamma$ simile, & angulus $\Omega V\Gamma$ equalis angulo VLT . sunt autem anguli $V\Lambda\Omega$ $\Omega V\Gamma$ equals uni recto, cum rectus sit $LV\Omega$: ergo & anguli ΩLV VLT uni recto sunt aequales: & ob id angulus $\triangle L\Omega$ est rectus. quod opo terebat demonstrare.

E Ipsa ΩQ assumens dimidiam maioris portionis videlicet QZ quintuplum poterit quadrati eius, quod à dimidia maioris portionis describitur. Ex 3. huius.

F Ergo quadratum ex ΩT quintuplum est quadrati ex VQ . Ex 15. quinti.

G Ut autem AB ad BC, ita quadratum ex AB ad quadratum ex BD. Ex corollario 2o sexti. est enim ut AB ad ED, ita DB ad BC ex 8. eiusdem.

6. decimi.

H Erit & quæ ex centro circuli EFGHK rationalis. quare & diameter ipsius rationalis erit. Quoniam enim sphaere diameter est potentia quintupla eius, quæ ex centro circuli, habebit quadratum diametri sphaere ad quadratum eius, quæ ex centro circuli proportionem eam, quæ numerus habet ad numerum: & idcirco ipsi commensurabile erit. rationale autem est quadratum diametri sphaere, cum ipsa sit rationalis. ergo & quadratum eius, quæ ex centro circuli, est rationale: idcirco, ea quæ ex centro circuli, & eius diameter rationalis erit; nam quæ rationali commensurabilis est, & ipsa est rationalis.

6. diffi. dec.

K Si autem in circulo rationalem diametrum habeat pentagonum æquilaterum describatur, erit latus pentagoni linea irrationalis, quæ minor appellatur. Ex 11. huius.

L Sed pentagoni EFGHK latus est icosædri. Illud vero ex ea diffinis manifestissime constat.

PROBLEMA VI. PROPOSITION XVII.

Dodecahedrum constituere, & sphaera comprehendere, qua & predictas figuras; demonstrare quæ dodecahedri latus esse irrationalem lineam, quæ apotome appellatur.

Exponantur predicti cubi duo plana ad rectos angulos inter se AB CD CBEF; & secetur vnumquodque ipsorum laterum AB BC CD DA EF EB FC bifariam in punctis GH KLMNX; & GK HL MH NX iungantur: deinde secentur rectæ lineæ NO OX HP extrema; ac media ratione in RST punctis: sintque ipsorum maiores portiones RO OS TP: & à punctis RST ad rectos angulos cubi planis erigantur RY SV TQ ad exteriores partes cubi, quæ ipsis RO OS TP æquales ponantur; iunganturque YB BQ QC CV VY. Dico pentagonum YBQCV æquilaterum esse.

se, & in uno plano, & præterea equi-
gulum. Iungantur enim RB, SB. **V**
B, & quoniam recta linea NO extre-
ma, ac media ratione secta est in R,
& OR est maior ipsius portio, erunt
quadrata ex ON NR tripla quadri-
rati ex OR, equalis autem est ON ipsi
NB, & OR ipsi RY, quadrata igitur
ex BN NR quadrati ex RY sunt tri-
pla. sed quadratis ex BN NR equa-
le est quadratum ex BR. ergo qua-
dratum ex BR triplum est quadrati
ex RY: ac propterea quadrata ex BR
RY quadrati ex RY sunt quadrupla.
quadratis aut ex BR RY æquale est
quadratum ex BY. ergo quadratum ex B
Y quadruplum est quadrati ex YR. &
ob id BY est dupla ipsius YR. atque
VY ipsius YR dupla, quoniam RS est du-
pla ipsius RO, hoc est ipsius RY. ergo BY est equalis YV. similiter demonstrabitur &
unaquæque ipsarum BQ QC CV utrique: BY YV æqualis. equilaterum igitur est BYVCQ
pentagonum. Dico & in uno esse plano. ducatur. n. à puncto O ipsa OZ utrique: ipsarum
RY SV parallela ad exteriores cubi partes: & iungantur ZH HQ. Dico ZHQ rectam
lineam esse: nam cum HP extrema, ac media ratione secetur in T, & ET sit maior ip-
sius portio, erit ut HP ad PT, ita ET ad TH. equalis autem est HP quidem ipsi HO,
ET vero utrique ipsarum TQ OZ. est igitur ut HO ad OZ, ita QT ad TH. atque est
HO parallela ipsi TQ: utraque enim ipsarum plano BD est ad rectos angulos: TH
vero est parallela OZ, quod utraque ipsarum sit ad rectos angulos plano BF. si autem
utroque triangula componantur ad unum angulum, ut ZOH, HTQ, quæ duo latera
duobus lateribus proportionalia habeant, ita ut homologa latera etiam sint paral-
lela, reliqua ipsorum latera, in directum sibi ipsis constituta erunt. ergo ZH est in
directum ipsi HQ. omnis autem recta linea est in uno plano. In uno igitur plano est
YBQCVP pentagonum. Dico & æquiangulum. Quoniam enim recta linea NO extre-
ma, ac media ratione secta est in R, & OR est maior portio, erit ut utraque NO OR
ad ON, ita NO ad OR. æqualis autem est RO ipsi OS. quare ut SN ad NO, ita NO ad
OS: & ob id NS extrema, ac media ratione secta est in O: & maior portio est NO.
quadrata igitur ex NS SO quadrati ex ON sunt tripla. equalis autem est ON ipsi N
B, & OS ipsi SV. ergo quadrata ex NS SV tripla sunt quadrati ex NB: ac propterea
quadrata ex NS SV NB quadrati ex NB sunt quadrupla. sed quadratis ex SN NB
est æquale quadratum ex BS. quadrata igitur ex BS SV, hoc est quadratum ex VB,
quod angulus VSB sit rectus, quadruplum est quadrati ex NB: ideoque ipsa VB ip-
sius BN est dupla. est autem & BC dupla BN. ergo VB est equalis BC. & quoniam
duæ BY YV duabus BQ QC æquales sunt, & basis VB æqualis basi BC, erit angu-
lus BYV angulo BQC æqualis. similiter ostendemus & YVC angulum equalem an-
gulo BQC. tres igitur anguli BQC BYV YVC inter se æquales sunt. si autem pen-
tagonum æquilaterum tres anguli sint æquales, pentagonum æquiangulum erit. æquian-
gulum igitur est pentagonum BYVCQ: ostensum est autem & equilaterum. ergo
pentagonum BYVCQ equilaterum est, & æquiangulum. atque est in uno cubi late-
re BC. si igitur in unoquoque duodecim cubi laterum eadem construas, figura
solida constituetur duodecim pentagonis æquilateralis, & æquiangulis contenta. Ita-
que oportet ipsum & data sphaera comprehendere; demonstrareque dodecahedri
latus esse irrationalem lineam, quæ apotome appellatur. producat enim ZO, & sit
ZO. occurrit igitur ZO diametro cubi, & bifariam se mutuo secant. hoc enim ostensum
est in penultimo theoremate undecimi libri. secant in Ω , ergo Ω est centrum

primi

secundi

B

C

3. primi

D

E

47. primi

20. tertij.

8. primi

F

A

EVCLID. ELEMENT.

sphæræ, quæ cubum comprehendit, & ON dimidium lateris cubi. iungatur YN. & quoniam recta libea NS extrema, ac media ratione secta est in O, & NO est ipsius portio maior, erit quadrata ex NS SO, tripla eius quod fit ex NO, æqualis aut est N ipsi ZO, quoniam & NO ipsi ON est æqualis, & ZO ipsi OS. sed & OS est æqualis Z Y, quoniam & RO. quadrata igitur ex ON ZY tripla sunt quadrati, quod fit ex NO. sed quadratis ex ON ZY æquale est quadratum ex YN. ergo quadratum ex YN triplum est quadrati ex NO. est autem quæ ex cetro sphæræ cubi comprehendens potentia tripla dimidij lateris cubi. prius enim ostensum est cubum constituere, & sphæra comprehendere, demonstrareq; sphæræ diametrum potentia triplam esse lateris cubi. si autem tota totius, & dimidia dimidiæ. atque est NO dimidia lateris cubi. ergo YN est æqualis ei, quæ ex centro sphæræ cubum comprehendens: estque N centrum sphæræ comprehendens cubum. quare punctum Y est ad sphæræ superficiem. similiter demonstrabimus & unumquemque reliquorum angulorum dodecaedri esse ad superficiem sphæræ. dodecaedrum igitur est data sphæra comprehensum. Dico dodecaedri latus irrationalem esse lineam, quæ apotome appellatur. Quoniam enim recta linea NO extrema, ac media ratione secta, maior portio est RO; erit tota NX extrema, ac media ratione secta, maior portio RS. nam cum sit ut NO ad OR, ita OR ad RN: & earum duplæ partes enim eodem modo multiplici eandem habent proportionem, erit ut NX ad RS, ita RS ad vtramque NR SX. maior autem est NX, quam RS. ergo & RS est maior, quam vtræque NR SX. est igitur NX extrema, ac media ratione secta; & RS est ipsius maior portio. æqualis autem est RS ipsi YV. ergo NX extrema, ac media ratione secta, maior portio est YV. & quoniam rationalis est sphæræ diameter, atque est potentia tripla lateris cubi; erit NX rationalis, quæ est cubi latus. si autem recta linea rationalis extrema, ac media ratione secta fuerit, vtræque portio irrationalis est, quæ apotome appellatur. ergo YV, quæ est latus dodecaedri, irrationalis est, quæ apotome appellatur.

C O R O L L A R I U M.

Ex hoc manifestum est latere cubi extrema, ac media ratione secto maiorem portionem esse dodecaedri latus.

F. C. C O M M E N T A R I U S.

- A Erunt quadrata ex ON NR tripla quadrati ex OR] Ex 4. huius.
- B Atque est HO parallela ipsi TQ: vtræque enim ipsarum plano BD est ad rectos angulos] Ex 6. vnde citum.
- C Reliqua ipsorum latera in directum sibi ipsis constituta erunt] Ex 32 sexti.
- D Quoniam enim recta linea NO extrema, ac media ratione secta est in R, & OR est maior portio, erit ut vtræque NO OR ad ON, ita NO ad OR] Ex 5. huius. si enim recta linea extrema, ac media ratione secetur, adijciaturq; ipsi æqualis maiori portioni, erit tota extrema, ac media ratione secta, & maior portio erit ea, quæ a principio recta linea. quare ut vtræque

que NO OR, hoc est ut tota NO una cum maiori portione OR ad totam NO, ita est NO ad OR; si enim tota NO maior portio, & OR minor.

Quadrata igitur ex NS SO quadrati ex ON sunt tripla] Ex 4. huius.

Si autem pentagoni æquilateri tres anguli sint æquales pentagonum æquiangu- lum erit] Ex 7. huius.

Prius enim ostensum est cubum constituere, & sphaera comprehendere] In quin- ta decima huius.

Erit NX rationalis, quæ est cubi latus] Nam cum sphaeræ diameter sit potentia tripla lateris cubi, habebit ad ipsum proportionem, quam numerus habet ad numerum, & ipsi commensurabile erit. quæ autem rationali sunt commensurabiles sine longitudine & potentia, sine potentia solum, rationales sunt, per sextam diffinitionem decimi libri.

Si autem recta linea rationalis extrema, ac media ratione secta fuerit, utraque portio irrationalis est, quæ apotome appellatur] Ex 6. huius.

PROBLEMA VII. PROPOSITIO. XVIII.

Latera quinque figurarum exponere, & inter se comparare.

Exponatur datæ sphaeræ diameter A B, & secetur in C quidem, ita ut AC sit æqualis CB; in D vero ita, ut A D ipsius D B sit dupla: describaturque in AB semicirculus AEB. & à punctis CD ipsi AD ad rectos angulos ducantur CE DF: & A F FB EB iungantur. Itaque quoniam A D dupla est ipsius D B, erit AB ipsius B D tripla: & per considerationem rationis B A sesquialtera ipsius A D. ut autem B A ad A D, ita quadratum ex B A ad quadratum ex A F. est enim triangulum A F B triangulo AFD æquiangulum. ergo quadratum ex B A sesquialterum est quadrati ex A F. est autem & sphaeræ diameter potentia sesquialtera lateris pyramidis; estque A B sphaeræ diameter, ergo A F pyramidis lateri est æqualis. Rursus

quoniam AD dupla est DB, erit AB ipsius B D tripla. Sed ut AB ad B D, ita quadratum ex AB ad quadratum ex B D. quadratum igitur ex AB triplum est quadrati ex B D. est autem & sphaeræ diameter potentia tripla lateris cubi: atque est AB sphaeræ diameter. ergo B D est cubi latus. & quoniam AC est æqualis CB, erit AB ipsius B C dupla. ut autem AB ad B C, ita quadratum ex AB ad quadratum ex B C. quadratum igitur ex AB quadrati ex B C est duplum. atque est sphaeræ diameter potentia dupla lateris octaedri: & AB est diameter datæ sphaeræ. quare B C est octaedri latus. ducatur à puncto A ipsi AB ad rectos angulos AC: ponaturque AC æqualis AB: & iuncta GC à puncto H ad AB perpendicularis ducatur HK. quoniam igitur AG dupla est ipsius AC; etenim GA est æqualis AB; ut autem GA ad AC, ita HK ad KC: erit HK ipsius KC dupla. ergo quadratum ex HK quadruplum est quadrati ex KC. quadrata igitur ex HK KC, quod est quadratum ex HC quintuplum est quadrati ex KC. æqualis autem est H C ipsi C B. ergo quadratum ex B C quintuplum est quadrati ex C K. & quoniam A B est dupla ipsius B C, quarum AD dupla est DB; erit reliqua B D dupla ipsius D C: ideoque B C ipsius C D est tripla. nonuplum igitur est quadratum ex B C quadrati ex C D. sed quadratum ex B C quadrati ex C K est quintuplum. ergo quadratum ex K C maius est quadrato ex C D. & K C ipsa C D maior: ponatur ipsi K C æqualis C L; & à puncto L ipsi A B ad rectos angulos ducatur L M, & M B iungatur. & quoniam quadratum ex B C quintuplum est quadrati ex K C; atque est ipsius quidem C B dupla B A; ipsius uero C K dupla K L: erit quadratum ex A B qua-

3. sexta.

13. huius.

15. huius.

14. huius.

4. sexta.

20. sexta.

19. quinta.

20. sexta.

15. quinta.

E V C L I D . E L E M E N T .

Corol. 16. huius.

Corol. 16. huius.

14. tertij.

10. huius.

16. huius.

Ex corol. an
precedentis.

drati ex KL quintuplum. sed & sphaere diameter potentia quintupla est eius, quæ ex centro circuli, à quo icosaedrum describitur. atque est AB diameter sphaere. ergo KL est hexagoni latus dicti circuli. Præterea quoniam sphaere diameter composita est ex latere hexagoni, & duobus lateribus decagoni in dicto circulo descriptis; atque est AB quidem diameter sphaere, KL vero hexagoni latus, & AK est æqualis LB; erit vtraque ipsarum AK LB latus decagoni descripti in eodem circulo, à quo icosaedrum describitur. & quoniam decagoni est LB, hexagoni vero ML; est enim æqualis ipsi KL, quodd & ipsi HK; namque æqualiter à centro distant; & est vtraque HK KL dupla ipsius HC; erit MB latus pentagoni. quod autem pentagoni idè est, & icosaedri. ergo MB est icosaedri latus. & quoniam FB est latus cubi, secetur extrema, ac media ratione in N, & BN sit maior portio; erit NB dodecaedri latus. quod cum sphaere diameter ostensa sit ipsius quidem AF lateris pyramidis potentia sesquialtera; ipsius vero BE octaedri potentia dupla, & ipsius FB cubi potentia tripla, quarum partium sphaere diameter potentia est sex, earum pyramidis quidem latus erit quattuor; octaedri vero trium, & cubi duarum; ergo latus pyramidis octaedri quidem lateris cubi potentia est sesquialterum. latera igitur trium figurarum iam dicta, videlicet pyramidis, octaedri, & cubi inter se sunt in proportionibus rationalibus: reliqua vero duo, dico autem icosaedri, & dodecaedri, neque inter se, neque ad iam dicta sunt in rationalibus proportionibus, nempe minor, & apotome.

At vero MB latus icosaedri maius esse dodecaedri latere BN, ita demonstrabimus.

§. sexti

Cor. 10. sexti.

20. sexti.

9. huius.

19. primi

Cor. 10. sexti.
§. sexti.

Quoniam enim triangulum FDB equiangulum est triangulo FAB, erit ut DB ad BF, ita FB ad BA: & cum tres rectæ lineæ proportionales sint, ut prima ad tertiam, ita erit quadratum primæ ad quadratum secundæ. est igitur ut DB ad BA, ita quadratum ex DB ad quadratum ex BF: & convertendo ut A B ad B D, ita quadratum ex FB ad quadratum ex BD. tripla autem est AB ipsius BD. ergo quadratum ex FB quadrati ex BD est triplum. atque est quadratum ex AD quadruplum quadrati ex DB; est. n. AD ipsius DB dupla. ergo quadratum ex AD maius est quadrato ex FB; propterea quod AD quàm FB est maior. multo igitur maior est AL quàm FB. & ipsa quidem AL extrema, ac media ratione secta, maior portio est LK, quoniam KL est hexagoni latus, & KA decagoni. ipsa vero FB extrema, ac media ratione secta, maior portio est BN. maior igitur est KL quàm BN, est autem KL ipsi LM æqualis. ergo LM quàm BN est maior. sed B M est maior quàm ML. ergo MB, quæ est latus icosaedri maior erit ipsa BN, dodecaedri latere.

A L I T E R. Quoniam enim AD dupla est DB, erit AB ipsius BD tripla. ut autem AB ad BD, ita quadratum ex AB ad quadratum ex BF, propterea quod triangulum FAB triangulo FBD equiangulum est. triplum igitur est quadratum ex AB quadrati ex BF. Ostensum est autem quadratum ex AB quadrati ex KL quintuplū. ergo quinque quadrata ex KL tribus quadratis ex BF sunt æqualia. sed tria ex FB maiora sunt quàm sex eorum, quæ sunt ex BN. & quinque igitur ex KL, quàm sex eorum, quæ ex BN sunt maiora. ergo & unum ex KL maius est vno ex BN; ac propterea KL quàm BN maior: æqualis autem KL ipsi LM. maior igitur est LM, quàm BN; multo igitur MB quàm BN est maior. quod demonstrare oportebat.

Tria vero, ex FB maiora esse, quàm sex earum, quæ ex BN, hoc modo ostendemus.

Quoniam

Quoniam enim maior est BN quàm NF, erit rectangulum, quod continetur FB BN maius contento BF FN, quod igitur continetur FB BN vnà cum contento BF FN maius est, quàm duplum eius, quod BF FN continetur. sed quod quidem continetur FB BN vnà cum contento BF FN est quadratum ex FB, contentum autem BF FN est æquale quadrato ex BN; etenim FB extrema, ac media ratione secta est in N, & quod extremis continetur est æquale ei, quod sit à media. quadratum igitur ex FB maius est, quàm duplum quadrati ex BN. quare vnum ex FB duobus ex BN est maius; & idcirco tria, quæ ex FB maiora sunt, quàm sex eorum, quæ fiunt ex BN. quod demonstrare oportebat. 2. secundi.
17. sexti.

Dico præter iam dictas quinque figuras non constitui aliam figuram, quæ æquilateris, & æquiangulis inter se æqualibus contineatur.

Ex duobus enim triangulis, vel ex alijs duobus planis non constituetur angulus solidus. ex tribus autem triangulis constituitur angulus pyramidis, ex quattuor octaedri, ex quinque icosaedri: at ex sex triangulis æquilateris, & æquiangulis ad vnum punctum constitutis: non est angulus solidus. cum enim trianguli æquilateri angulus sit duæ tertiæ recti, erunt sex quattuor rectis æquales. quod fieri non potest. omnis enim solidus angulus minoribus, quàm quattuor rectis continetur. Eadem ratione neque ex pluribus, quàm sex angulis planis constituitur solidus angulus. itaque quadratis tribus angulus cubi continetur. ut autem quattuor contineatur fieri non potest; essent enim rursus quattuor recti. pentagonis autè æquilateris, & æquiangulis, tribus quidem continetur angulus dodecaedri, sed vt quattuor contineatur fieri non potest. nam cum pentagoni æquilateri angulus constet ex recto, & quinta recti parte, erunt quattuor anguli quattuor rectis maiores. quod fieri non potest. neque vero alijs polygonis figuris constituetur angulus solidus propter absurda, quæ consequuntur. non igitur præter iam dictas figuras alia figura solida constituitur æquilateris, & æquiangulis contenta. quod oportebat demonstrare. 21. undecimi

Verum enim vero pentagoni æquilateri, & æquianguli angulus constare ex recto, & recti quinta parte. hoc modo ostendemus.

Sit enim pentagonum æquilaterum, & æquiangulum ABCDE, & circa ipsum circulus ABCDE describatur: sumaturque ipsius centrum, quod sit F; & iungantur F A FB FC FD FE, quæ pentagoni ABCDE angulos bifariam secabunt. & quoniam quinque anguli, qui ad F quattuor rectis æquales sunt, & inter se sunt æquales, erit unus ipsorum, ut AFB unius recti, dempta quinta recti parte. ergo reliqui FAB ABF sunt unius recti, & quintæ partis. æqualis autè est angulus FBA angulo FBC. & totus igitur ABC pentagoni angulus constat ex recto, & quinta recti parte. quod oportebat demonstrare.

TERTIIDECEMI LIBRI FINIS.

E V C L I D I S E L E M E N T O R V M

LIBER QVARTVSDECIMVS

ET SOLIDORVM QVARTVS.

vt quidam arbitrantur.

VT VERO ALII HYPsiclis ALEXANDRINI

DE QVINQVE CORPORIBVS LIBER PRIMVS.

Cum Commentarijs Federici Commandini Vrbinatis.

ASILIDES tyrius, Protarche, cum alexandriam venisset, patri quæ nostro ob mathematicarum disciplinarum societatem commendatus fuisset, ipso peregrinationis tempore, cum eo diu, multumque uersatus est. & aliquando expendentes id quod ab Apollonio scriptum est de dodecaedri, & icosaedri in eadem sphaera descriptorum comparatione, quam scilicet

hec inter se proportionem habeant, arbitrati sunt ea non recte tradidisse Apollonium; quæ à se emendata, ut pater meus dicebat, memoriae, ac litteris prodiderunt. Ego vero postea incidi in alium librum ab Apollonio editum, qui propositæ rei demonstrationem recte complectebatur; atque ex eius problematis indagazione magnam cœpi voluptatem. Illud quidem, quod ab Apollonio editum est, quilibet facile perspicere potest, cum in omnium manibus versetur. quod autem nos postea summo, quantum conijci licet, studio lucubrassè videmur, id litteris mandatum tibi dedicandum censeuimus, utpote qui ob excellentem in omnibus disciplinis mathematicis, & præsertim in geometria cognitionem prudenter iudices ea, quæ dicturi sumus: ob eam uero, quæ tibi cum patre meo fuit consuetudinem, & ob beneuolentiam, qua nos complecteris, tractationem ipsam libenter audias. sed iam tempus est ut proæmio finem imponentes id, quod propositum est, aggrediamur.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

Quæ à centro circuli alicuius ad pentagoni latus in eodem circulo descripti, perpendicularis ducitur, dimidia est vtriusque & hexagoni lateris, & decagoni, quæ in eodem circulo describuntur.

Sit circulus ABC, & in eo describatur pentagoni æqui lateri latus BC; sumaturque circuli centrum D: & ad BC ducta DE perpendiculari, producat in directum ipsi DE recta linea EF. Dico DE dimidiam esse vtriusque & hexagoni lateris, & decagoni in eodem circulo descriptorum. Iungantur enim DC, CF: ponaturque EG ipsi EF æqualis: & à puncto G ad C, ducatur GC. Quoniam igitur circumferentia totius circuli quintupla est circumferentiæ BFC: atque est totius quidem circuli circumferentiæ dimidia ACF, ipsius vero BFC dimidia FC, erit & circumferentia ACF quintupla circumferentiæ FC. ideoque circumferentia AC ipsius CF est quadrupla. ut autem AC ad CF, ita est ADC angulus ad angulum CDF. angulus igitur ADC quadruplus est anguli CDF. duplus autem est angulus ADC anguli EFC. ergo & angulus EFC anguli GDC est duplus. est autem & EFC angulus æqualis angulo EGC. duplus igitur est angulus EGC anguli GDC: & idcirco DG ipsi GC est æqualis. sed GC æqualis est CF. ergo & DG ipsi CF. est autem & GE æqualis EF. æqualis igitur est DE utrique EF FC. communis apponatur DE. vtraque igitur DF FC ipsius DE est dupla: atque est DF quidem hexagoni lateri æqualis; FC vero æqualis lateri decagoni. ergo DE est dimidia & lateris hexagoni, & decagoni in eodem circulo descriptorum.

Itaque manifestum est ex theorematibus tertij decimi libri eam, quæ à centro circuli ad latus trianguli æquilateri perpendicularis ducitur, dimidiam esse eius, quæ ex centro circuli.

F. COMMENTARIUS.

Erit & circumferentia ACF quintupla circumferentiæ FC] Ex 15 quinti.

Ut autem AC ad CF, ita est ADC angulus ad angulum CDF] Ex ultima sexti.

Duplus autem est angulus ADC anguli EFC] Ex 20 tertij.

Est autem & EFC angulus æqualis angulo EGC] Posita enim est FE æqualis EG. & EC est vtrique communis: anguliq. ad E recti. basis igitur FC est æqualis basi CG, & triangulum triangulo æquale; & reliqui anguli reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera subtenduntur ex 4. primi.

Et idcirco DG ipsi GC est æqualis] Nam cum angulus EGC exterior sit æqualis duobus interioribus, & oppositis GDC GCD, sitq. duplus ipsius GDC, erit angulus GCD æqualis angulo GDC: & ob id latus DG lateri GC æquale.

Itaque manifestum est ex theorematibus tertij decimi libri eam, quæ à centro circuli ad latus trianguli æquilateri perpendicularis ducitur, dimidiam esse eius, quæ ex centro circuli.

Sit circulus ABC, & in ipso describatur triangulum æquilaterum ABC; sumptoque circuli centro D, ab eo ad BC agatur perpendicularis DF, & ad E producat. Dico DF dimidiam esse ipsius DE. Iungantur enim DB BE. & quoniam BE est latus hexagoni, quod ex 12 tertij decimi libri apparet: & ideo æqualis ei, quæ ex centro: erunt DB BE inter se æquales, & ipsarum quadrata

A

B

C

D

E

F

A

B

C

D

E

32. primi.

6. primi.

F

47. primi

ta aequalia. sed quadratum quidem ex DB est aequale quadratis ex BF FD. quadratum vero ex BE aequale quadratis ex BF FE. ergo quadrata ex BF FD quadratis ex BF FE sunt aequalia; & dempto communiquadrato ex BF, erit quadratum ex DF aequale quadrato ex FE: ac propterea recta in ea DF ipsi FE est equalis, & DF ipsius DE dimidia, quod demonstrare oportebat.

THEOREMA II. PROPOSITIO. II.

Idem circulus comprehendit dodecaedri pentagonum, & icosaedri triangulum in eadem sphaera descriptorum.

Hoc autem conscribitur ab Aristero in libro de quinque figurarum comparatione; & ab Apollonio in secunda editione comparationis dodecaedri cum icosaedro, videlicet ut dodecaedri superficies est ad superficiem icosaedri, ita esse & ipsum dodecaedrum ad icosaedrum; quod perpendicularis ducta à centro sphaerae ad dodecaedri pentagonum eadem sit, quae ad icosaedri triangulum ducitur. Itaque demonstrandum est eundem circulum comprehendere, & dodecaedri pentagonum, & icosaedri triangulum in eadem sphaera descriptorum, hoc praemisso.

Si in circulo pentagonum equilaterum describatur, quod sit ex latere pentagoni, & ex recta linea, quae duobus pentagoni lateribus subtenditur, quintuplum erit eius, quod sit ab ea, quae ex circuli centro.

Sit ABC circulus; & in eo pentagoni latus AC: sumaturque circuli centrum D, & ad AC perpendicularis ducta DF in puncta BE producatur, & iungatur AB. Dico quadrata ex BA AC quadrati ex DE quintupla esse. iuncta enim AE est decagoni latus, & quoniam BE dupla est ipsius ED, erit quadratum ex BE quadrati ex ED quadruplum. quadrato autem ex BE aequalia sunt quadrata ex BA AE. ergo quadrata ex BA AE quadrupla sunt quadrati ex ED: & ob id quadrata ex BA AE & ED sunt quintupla quadrati ex ED. sed quadrata ex DE EA aequalia sunt quadrato ex AC, quadrata igitur ex BA AC quadrati ex ED sunt quintupla.

Hoc demonstrato, demonstrandum est eundem circulum comprehendere & dodecaedri pentagonum, & icosaedri triangulum in eadem sphaera descriptorum.

Exponatur sphaerae diameter AB, & in ipsa sphaera describatur dodecaedrum, & icosaedrum: sitque nunc quidem dodecaedri pentagonum CDEFG: icosaedri vero triangulum KLM. Dico eundem circulum comprehendere pentagonum CDEFG, & KLM triangulum. Iungatur DG. ergo DG est cubi latus. & exponatur recta linea quaedam MN, ita ut quadratum ex AB quadrati ex MN sit quintuplum. est autem & sphae-

ra diameter potentia quintupla eius, quæ est ex centro circuli, à quo icosaëdrum describitur. secetur MN extrema, ac media ratione in X: & sit MX portio maior. ergo MX est decagoni latus. & quoniam quadratum ex AB quintuplum est quadrati ex MN, & triplum quadrati ex DG, erunt tria quadrata ex DG quadratis quinque ex MN æqualia. ut autem tria quadrata ex DG ad quadrata quinque ex MN, ita tria quadrata ex CG ad quinque quadrata ex MX. tria igitur quadrata ex CG quinque quadratis ex MX sunt æqualia. quinque autem quadrata ex KL æqualia sunt quinque quadratis ex MN, & quinque quadratis ex MX. ergo quinque quadrata ex KL tribus quadratis ex DG, & tribus quadratis ex CG sunt æqualia. sed tria quadrata ex DG, & tria quadrata ex CG æqualia sunt quindecim quadratis eius, quæ est ex centro circuli descripti circa pentagonum CDEFG. antea enim demonstratum est quadrata ex DG. CG quintupla esse quadrati eius, quæ est ex centro circuli circa pentagonum CDEFG descripti. quinque autem quadrata ex KL sunt æqualia quindecim quadratis eius, quæ est ex centro circuli descripti circa triangulum KLH. etenim demonstratum est quadratum ex KL triplum esse quadrati eius, quæ est ex centro circuli circa triangulum KLH descripti. quindecim igitur quadrata eius, quæ est ex centro circuli quindecim quadratis eius, quæ est ex centro circuli sunt æqualia; ac propterea diameter diametro est æqualis. ergo idem circulus comprehendit & dodecaedri pentagonum, & icosaedri triangulum in eadem sphaera descriptorum.

F. C. COMMENTARIUS.

Sed quadrata ex DE EA æqualia sunt quadrato ex AC] Ex decima tertij decimi. A
Ergo DG est cubi latus] Sella enim DG extrema DG extrema, ac media ratione, maior B
portio erit æqualis lateri pentagoni CD ex 8 tertij decimi. si aut latus cubi extrema, ac media ratione
secetur, maior portio erit dodecaedri latus, ex corollario 17 tertij decimi. sed CD ponitur latus dodecaedri. ergo DG est cubi latus. nam si duæ rectæ lineæ extrema, ac media ratione secentur, erit tota ad totam, & portio maior ad maiorem portionem. quod ad finem huius libri demonstrabitur.

Secetur MN extrema, ac media ratione in X, & sit MX portio maior. ergo MX est C
decagoni latus] Ex ante dictis sequitur MN esse eam, quæ ex centro circuli, à quo icosaëdrum
describitur, hoc est hexagoni latus. si autem hexagoni latus extrema, ac media ratione secetur, erit
maior portio latus decagoni. quod nos supra ad novam tertij decimi demonstravimus.

Et triplum quadrati ex DG] Ex 15 tertij decimi libri.

Ut autem tria quadrata ex DG ad quadrata quinque ex MN, ita tria quadrata ex D
CG ad quinque quadrata ex MX] Est enim CG maior portio ipsius DG extrema, ac media ratione
sectæ. & similiter MX maior portio ipsius MN: & ut tota DG ad totam MN, ita est ipsius
DG maior portio ad maiorem portionem ipsius MN. quod deinceps demonstrabitur.

Quinque autem quadrata ex KL æqualia sunt & quinque quadratis ex MN, & quin F
que quadratis ex MX] Ex 10 tertij decimi. est enim KL latus pentagoni descripti in circulo, à
quo icosaëdrum describitur, & cuius ea, quæ ex centro est MN.

Antea enim demonstratum est] Videlicet proxime ad principium huius theoremat.

Etenim demonstratum est quadratum ex KL triplum esse quadrati eius, quæ ex G
centro circuli] In duodecima tertij decimi libri.

THEOREMA III. PROPOSITIO. III.

Si fuerit pentagonum æquilaterum, & æquiangulum, & circa
ipsum circulus; à centro autem ad vnum latus perpendicularis ducta fuerit: quod tricies vno latere, & perpendiculari continetur
superficiæ dodecaedri est æquale.

EVCLID. ELEMENT.

Sit pentagonum æquilaterum, & æquiangulum AB
 CDE, & circa ipsum circulus: sumatur autem centrum
 F, & ab F ad CD perpendicularis ducatur FG. Dico
 quod tricies CD FG continetur duodecim pentago-
 nis ABCDE æquale esse. Iungatur enim CF FD, & quo-
 niam quod CD FG continetur duplum est trianguli
 FCD, erit quod quinquies continetur CD FG decem
 triangulis æquale. decem autem triangula duo penta-
 gona sunt, & eorum sextupla æqualia. ergo quod tri-
 ces CD FG continetur est æquale duodecim penta-
 gonis. sed duodecim pentagona sunt dodecaedri super-
 ficiei. ergo quod tricies continetur CD FG superficiei
 dodecaedri æquale erit.

Similiter demonstrabimus, si fuerit triangulum æquilaterum,
 vt ABC, & circa ipsum circulus, cuius centrum D, & ab eo per-
 pendicularis DE, quod tricies BC DE continetur superficiei
 icosaedri æquale esse.

Quoniam enim rursus quod BC DE contine-
 tur duplum est trianguli DBC, erunt duo triangu-
 la equalia ei, quod continetur BC DE, & eorum tri-
 pla. sex igitur triangula DBC æqualia sunt tribus,
 quæ BC DE continentur. at sex triangula vt DBC
 sunt æqualia duobus ABC triangulis. & eorum de-
 cupla. ergo quod tricies BC DE continetur est æ-
 quale viginti triangulis ABC, hoc est icosaedri su-
 perficiei. erit igitur vt dodecaedri superficies ad
 superficiem icosaedri, ita quod continetur CD
 FG ad id, quod BC DE continetur.

COROLLARIUM.

Ex hoc perspicuum est vt dodecaedri superficies ad superficiem
 icosaedri, ita esse quod continetur latere pentagoni, & recta li-
 nea, quæ à centro circuli circa pentagonum descripti, in ipsum la-
 tus perpendicularis ducitur, ad id, quod continetur latere icosae-
 dri, & perpendiculari, quæ à centro circuli circa triangulum de-
 scripti in ipsum latus ducta fuerit, nimirum dodecaedro, & ico-
 saedro in eadem sphaera descriptis.

F. C. COMMENTARIUS.

- Et quoniam quod CD FG continetur duplum est trianguli FCD] Ex 41 primi,
 ex quo sequitur duo triangula FCD equalia esse ei, quod CD FG continetur.
 Decem autem triangula duo pentagona sunt] Vnde quodque enim pentagonum quin-
 que eiusmodi triangula continet.
 At sex triangula vt DBC sunt equalia duobus ABC triangulis] Nam triangulum
 ABC ex tribus triangulis DBE constat.
 Erit igitur vt dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita quod conti-
 netur CD FG ad id, quod BC DE continetur] Quoniam enim quod tricies continetur CD
 FG est æquale superficiei dodecaedri; & quod tricies continetur BC DE æquale superficiei ico-
 saedri,

Ergo DM est latus trianguli æquilateri] Perpendicularis enim ducta à centro circuli ad O
trianguli æquilateri latus est dimidia eius, quæ ex circuli centro, ut nos demonstrabimus ad fi-
nem primæ huius.

Et quoniam rectangulum quidem contentum AG BH est æquale pentagono] P
Ex his, quæ proxime demonstravit.

Contentum vero AGD æquale triangulo ADM] Ex demonstratis in 42 primi.

Vt autem rectangulum contentum AG BH ad rectangulum AGD, ita BH ad R
DG] Parallelogramma enim, quæ eandem habent altitudinem inter se sunt vt bases, ex pri-
ma sexti.

Et vt igitur duodecim BH ad uiginti DG, ita duodecim pentagona ad uiginti S
triangula] Sequitur enim ex antedictis vt BH ad DG, ita esse pentagonum ad triangulum.

Et duodecim quidem BH sunt decem BC, etenim BH quintupla est ipsius HC, T
& BC ipsius CH sextupla] Quoniam enim BH est quintupla ipsius HC, & BC est eiusdem H
C sextupla, habebit HB ad BC proportionem eam, quam habet quinque ad sex. sed quinque multi-
plicans duodecim producit 60, & sex multiplicans decem producit similiter 60. ergo duodecim
BH sunt æquales decem BC.

Hoc est vt BC ad DM] Ex 15 quinti.

Atque est BC quidem cubi latus] Hoc à nobis superius demonstratū est in secundâ huius. X

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

Ostendendum est & qualibet recta linea extrema, ac media ra-
tione secta, quam proportionem habet potens quadratum totius
& quadratum maioris portionis ad eam, quæ potest quadratum
totius & minoris portionis, eandem habere cubi latus ad latus
icosaedri.

Sit circulus AB comprehendens & dodecaedri
pentagonum & icosaedri triangulum in eadē spha-
ra descriptorum: sumaturque circuli centrum C; &
& ab eo producaturs recta linea utcumque CB: & se-
cetur extrema, ac media ratione in D, ita vt CD sit
maior portio. quare CD est latus decagoni in eodē
circulo descripti. exponatur icosaedri latus E, dode-
caedri F, & cubi G. ergo E est trianguli æquilateri
latus, F pentagoni in eodem circulo descripti: atque
est F ipsius G maior portio. & quoniam E est æqua-
lis lateri trianguli æquilateri: trianguli autem æqui-
lateri latus est potentia triplum ipsius BC. ergo qua-
dratum ex E quadrati ex BC est triplum: suntque qua-
drata ex CB BD quadrati ex CD tripla, & permuta-
do. vt igitur quadratum ex E ad quadrata ex CB B
D, ita quadratum ex BC ad quadratum ex CD. sed

vt quadratum ex BC ad quadratum ex CD, ita est quadratum ex G ad quadratum
ex F: est enim F maior portio ipsius G. & ut igitur quadratum ex E, ad quadrata ex
CB BD, ita quadratum ex G ad quadratum ex F: & permutando; conuertendoque.
ergo vt quadratum ex G ad quadratum ex E, ita quadratum ex F ad quadrata ex C
B BD. quadrato autem ex F æqualia sunt quæ ex BC CD quadrata; etenim latus
pentagoni potest & hexagoni, & decagoni latus. ut igitur quadratum ex G ad qua-
dratum ex E, ita quadrata ex BC CD ad quadrata ex CB BD. sed vt quadrata ex
BC CD ad quadrata ex CB BD, ita qualibet recta linea extrema, ac media ratio-
ne secta, quadratum totius, & maioris portionis ad quadratum totius, & minoris
portionis. & ut igitur quadratum ex G ad quadratum ex E, ita qualibet recta linea
extrema

EVLID. ELEMENT.

extrema, ac media ratione secta quadratum totius & maioris portionis ad quadratum totius, & minoris portionis. atque est G quidem cubi latus, E vero icosaedri. si igitur recta linea extrema, ac media ratione secetur, erit ut potens totam & maiorē portionem ad eam, quā potest totam & minorem portionem, ita cubi latus ad latus icosaedri, in eadem sphaera descriptorum.

F. C. COMMENTARIUS.

- A** Quare CD est latus decagoni] Si enim latus hexagoni extrema, ac media ratione secetur maior portio est decagoni latus, in eodem circulo descripti, ut nos supra demonstrauimus ad nonam tertijdecimi.
- B** Atque est F ipsius G maior portio] Ex corollario 17 tertijdecimi, nimirum ipsa G extrema, ac media ratione secta.
- C** Trianguli autem aquilateri latus est potentia triplum ipsius BC] Ex duodecima tertijdecimi.
- D** Suntque quadrata ex CB BD quadrati ex CD tripla] Ex 4. tertijdecimi.
- E** Etenim latus pentagoni potest & hexagoni & decagoni latus] Ex decima tertijdecimi.
- F** Sed ut quadrata ex BC CD ad quadrata ex CB BD, ita qualibet recta extrema, ac media ratione secta quadratum totius, & maioris portionis ad quadratum totius & minoris portionis] Grecus codex corruptus est qui sic habet ὡς δ' ἔσται τὸ ἀπὸ ἡ πρὸς τὸ ἀπὸ εἰ, οὕτως τὰ ἀπὸ βγ γδ πρὸς τὰ ἀπὸ γδ βδ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ βγ γδ πρὸς τὰ ἀπὸ γδ βδ, οὕτως εὐθείας ἢς ἀπὸ τῆς δ' λης, καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μέγιστος τμήματος πρὸς τὴν ἀνναμένην τὸ ἀπὸ τῆς δ' λης, καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. corrige ὡς δ' ἔσται τὸ ἀπὸ ἡ πρὸς τὸ ἀπὸ εἰ, οὕτως τὰ ἀπὸ βγ γδ πρὸς τὰ ἀπὸ γδ βδ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ βγ γδ πρὸς τὰ ἀπὸ γδ βδ, οὕτως εὐθείας ἢς ἀπὸ τῆς δ' λης, καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. & ita corrige paulo post. etc. enim haec uoces ἢ ἀνναμένη. & τὴν ἀνναμένην hoc loco superuacanea sunt.

THEOREMA VI. PROPOSITIO. VI.

Ostendendum nunc est ut latus cubi ad icosaedri latus, ita esse

A dodecaedri solidum ad solidum icosaedri.

2 huius.

- Quoniam enim aequales circuli comprehendunt & dodecaedri pentagonum, & icosaedri triangulum in eadem sphaera descriptorum, in sphaeris autem aequales circuli aequaliter à centro distant. nam quæ à centro sphaeræ ad plana circulorum perpendiculares ducuntur & aequales sunt, & in centra circulorum cadunt. ergo quæ à centro sphaeræ ducuntur ad centrum circuli comprehendentis, & dodecaedri pentagonum & icosaedri triangulum aequales sunt, videlicet perpendiculares ipsæ : & ob id pyramides, quæ bases habent dodecaedri pentagona, & icosaedri triangula, & quæ altæ sunt, pyramides autem aequæ altæ inter se sunt uti bases. ut igitur pentagonum ad triangulum ita pyramis, cuius basis est dodecaedri pentagonum, & vertex centrum sphaeræ ad pyramidem, cuius basis est icosaedri triangulum, vertex autem sphaeræ centrum, ergo & ut duodecim pentagona ad uiginti triangula, ita duodecim pyramides pentagonales bases habentes ad uiginti pyramides, quæ triangulares bases habent. sed duodecim pentagona sunt dodecaedri superficies, & uiginti triangula superficies icosaedri. est igitur ut dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita duodecim pyramides pentagonales bases habentes ad uiginti pyramides, quæ triangulares bases habent. & duodecim pyramides pentagonales bases habentes sunt dodecaedri solidum: uiginti autem pyramides, quæ triangulares habent bases sunt solidum icosaedri. quare & ut dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita solidum dodecaedri ad icosaedri solidum. ut autem dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita ostensum est esse latus cubi ad icosaedri latus & ut igitur

faciendi, erit ut superficies dodecaedri ad id, quod tricies continetur CD FG, ita superficies ico-
saedri ad id, quod tricies continetur BC DE : & permutando ut dodecaedri superficies ad su-
perficiem icosaedri, ita quod tricies continetur CD FG ad id, quod tricies BC DE continetur.
sed ut quod tricies continetur CD FG ad id, quod tricies BC DE continetur, ita quod semel con-
tinetur CD FG ad id, quod semel BC DE continetur ex 15 quinti. ut igitur dodecaedri super-
ficies ad superficiem icosaedri, ita quod continetur CD FG ad id, quod BC DE continetur.

THEOREMA IIII. PROPOSITIO. IIII.

Hoc probato demonstrandum erit, ut dodecaedri superficies
ad superficiem icosaedri, ita esse latus cubi ad icosaedri latus.

Exponatur circulus ABC comprehensens &
dodecaedri pentagonum, & icosaedri trian-
gulum in eadem sphaera descriptorum : & in ip-
so describatur trianguli quidem equilateri latus
CD: pentagoni vero AC: sumptoque circuli cen-
tro E, ab eo ad DC CA perpendiculares ducan-
tur EF EG, & producat in directum ipsi EG
recta linea GB: iungaturq; BC, & exponatur cu-
bi latus H. Dico ut dodecaedri superficies ad
superficiem icosaedri, ita esse H ad ipsam CD.
quoniam enim utraque simul EB BC extrema,
ac media ratione secta, maior portio est EB, &
est utriusque quidem dimidia EG, ipsius vero
BE dimidia EF: erit & ipsius EG extrema, ac media ratione secta maior portio EF.
est autem & ipsius H extrema, ac media ratione secta maior portio CA, ut in dode-
caedro ostensum fuit. ut igitur H ad CA, ita est GE ad EF; ideoque contentum H
FE est æquale ei, quod CA EG continetur. & quoniam est ut H ad CD, ita quod co-
tinetur H EF ad contentum CD EF; ei uero, quod H EF continetur est æquale co-
tentum CA EG: erit ut H ad CD, ita contentum CA EG ad id, quod CD EF conti-
netur, hoc est ut dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita H ad CD.

A
B
C
D
E
F
G
H
K
L

Aliter demonstrare ut dodecaedri superficies ad superficiem
icosaedri, ita esse latus cubi ad icosaedri latus, hoc præmissis.

Sit circulus ABC, & in eo describantur equilateri pentagoni
latera AB AC: & iungatur BC; sumatur autem circuli centrum
D, & iuncta AD producat ad E: ponaturq; ipsius AD dimidia
DF, & GC ipsius CH tripla. Dico quod AF BH continetur pen-
tagono æquale esse.

Iungatur enim BD. & quoniam AD dupla est ip-
sius DF; erit FA ipsius AD sesquialtera. rursus quo-
niam G C tripla est ipsius CH, erit G H ipsius H C
dupla. sesquialtera igitur est CG ipsius GH. quare
ut FA ad AD, ita CG ad GH. ideoq; contentum AF
GH est æquale ei, quod AD CG continetur: sed CG
est æqualis GB. ergo contentum AD BG est æqua-
le ei, quod AF GH continetur. contentum autem
AD BG est duo triangula, ut A B D. quod igitur
AF GH continetur & duo triangula A B D. ergo
quinque rectangula contenta AF GH decem sunt
triangula. decem autem triangula duo pentagona sunt, quinque igitur rectangula

16. sexa

M

Q. 99 2 conten-

E V C L I D . E L E M E N T .

contenta AF GH duobus pentagonis sunt aequalia. & quoniam GH est dupla HC, erit contentum AF GH duplum eius, quod AF HC continetur. ergo duo rectangula contenta AF HC sunt aequalia vni, quod continetur AF GH, & eorum quintupla. decem igitur rectangula contenta AF HC sunt aequalia quinque, quae AF GH continentur, hoc est duobus pentagonis. ergo quinque contenta AF HC vni pentagono sunt aequalia. quinque autem contenta AF HC sunt aequalia ei, quod continetur AF BH, quoniam BH quintupla est ipsius HC, & communis altitudo est AF. quod igitur AF BH continetur uni pentagono est euale.

Hoc demonstrato nunc exponatur circulus comprehensens & dodecaedri pentagonum, & icosaedri triangulum in eadem sphaera descriptorum; & in circulo ABC describantur aequilateri pentagoni latera BA AC: & iungatur BC. sumatur praeterea circuli centrum E, & iuncta A E ad F producat: sitq; AE quidem dupla ipsius EG; KC vero ipsius CH tripla: & per G ipsi AF ad rectos angulos ducatur DM. ergo DM est latus trianguli aequilateri; P & aequilaterum est ADM triangulum. & quoniam Q rectangulum quidem contentum AG BH est euale pentagono, contentum vero AGD aequale triangulo ADM; erit vt rectangulum R contentum AG BH ad rectangulum AGD, ita pentagonum ad triangulum. vt autem S tem rectangulum contentum AG BH ad rectangulum AGD, ita BH ad DG. & vt igitur duodecim BH ad viginti DG, ita duodecim pentagona ad viginti triangula, hoc est dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri. & duodecim quidem BH sunt decem BC: etenim BH quintupla est ipsius HC; & BC ipsius CH sextupla: ideoq; duodecim BH sunt aequales decem BC: viginti autem DG sunt decem DM; V dupla enim est DM ipsius DG. vt igitur decem BC ad decem DM, hoc est vt BC X ad DM, ita dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri. atque est BC quidem cubi latus, DM vero latus icosaedri. & vt igitur dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita BC ad DM, hoc est cubi latus ad latus icosaedri.

F . C . C O M M E N T A R I V S .

- A Quoniam enim vtraque simul EB BC extrema, ac media ratione secta maior portio est EB] *Ex nona tertijdecimi.*
 B Et est vtriusque dimidia EG] *Ex prima huius.*
 C Ipsius vero BE dimidia EF] *Ex ijs, quae nos demonstrauimus ad finem primae huius.*
 D Erit & ipsius EF extrema, ac media ratione secta maior portio EF] *Ex 15 quinti.*
 E Est autem & ipsius H extrema, ac media ratione secta maior portio CA, vt in dodecaedro ostensum fuit] *In 17 tertijdecimi.*
 F Vt igitur H ad CA, ita est GE ad EF.] *Hoc autem ita esse ad finem huius libri demonstrabitur.*
 G Ideoque contentum H FE est euale ei, quod CA EG continetur] *Ex 16 sexti.*
 H Et quoniam est vt H ad CD, ita quod continetur H EF ad contentum CD EF] *Ex prima sexti.*
 K Ei vero quod H EF continetur est aequale contentum CA EG] *Quod proxime demonstratum fuit.*
 L Hoc est vt dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita H ad CD] *Superius enim demonstratum est vt dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita esse quod continetur CA EG ad id, quod CD EF continetur.*
 M Contentum autem AD BG est duo triangula vt ABD] *Hoc est contentum AD BG est aequale duobus triangulis ABD. est enim trianguli ABD duplum ex 41 primi libri.*
 N Quinque autem contenta AF HC sunt aequalia ei, quod continetur AF BH, quoniam BH est quintupla ipsius HC: & communis altitudo est AF] *Ex prima sexti.*

Ergo

igitur latus cubi ad icosaedri latus, ita dodecaedri solidum ad solidum icosaedri.

F. C. COMMENTARIUS.

In sphaeris autem aequales circuli aequaliter à centro distant] *Ex 6. propositione primi libri sphaericorum Theodosii.*

Et in centra circulorum cadunt] *Ex 2 corollario primae eiusdem libri sphaericorum Theodosii.*

Pyramides autem aequae altae sunt inter se, uti bases] *Ex quinta & sexta duodecimi.*

THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

At vero duas rectas si extrema, ac media ratione sectae fuerint, in subiecta esse analogia, ita demonstrabimus.

Secetur enim AB extrema, ac media ratione in C, cuius maior portio sit AC: & similiter DE extrema, ac media ratione secetur in F, ut DF sit portio maior. Dico ut tota AB ad maiorem portionem AC, ita esse totam DE ad DF maiorem portionem.

Quoniam enim rectangulum quidem ABC est a-

quale quadrato ex AC; rectangulum vero DEF aequale quadrato ex DF: erit ut rectangulum ABC ad quadratum ex AC, ita rectangulum DEF ad quadratum ex DF: & ut rectangulum, quod quater continetur AB BC ad quadratum ex AC, ita quod quater continetur DE EF ad quadratum ex DF: componendoque ut quod quater continetur AB BC una cum quadrato ex AC ad quadratum ex AC, ita quod quater continetur DE EF una cum quadrato ex DF ad quadratum ex DF. ergo & ut quadratum ex utraque AB BC ad quadratum ex AC, ita quadratum ex utraque DE EF ad quadratum ex DF: & longitudine ut utraque AB BC ad AC, ita utraque DE EF ad DF: & componendo ut utraque AB BC una cum AC ad AC, hoc est duae AB ad AC, ita utraque DE EF una cum DF ad DF, hoc est duae DE ad DF. & antea dictum dimidia, videlicet ut AB ad AC, ita DE ad DF.

COROLLARIUM.

Itaque hoc demonstrato videlicet qualibet recta linea extrema, ac media ratione secta, quam proportionem habet potens quadratum totius, & maioris portionis ad eam, quae potest quadratum totius & minoris portionis, eandem habere cubi latus ad latus icosaedri. atque hoc demonstrato ut latus cubi ad icosaedri latus, ita esse dodecaedri superficiem ad superficiem icosaedri in eadem sphaera descriptorum. & insuper hoc cognito ut dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita esse dodecaedrum ad ipsum icosaedrum, propterea quod idem circulus comprehendit, & dodecaedri pentagonum, & icosaedri triangulum: constat, si in ipsa sphaera describatur & dodecaedrum, & icosaedrum, eandem inter se proportionem habere, quam si recta linea extrema, ac media ratione secetur, habet potens quadratum totius & maioris portionis ad eam, quae potest quadratum totius, ac minoris portionis.

Quoniam

E V C L I D . E L E M E N T .

Quoniam enim est vt dodecaedrum ad icosaedrum , ita dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri , hoc est latus cubi ad icosaedri latus . vt autem latus cubi ad icosaedri latus , ita qualibet recta linea extrema , ac media ratione secta , potens quadratum totius & maioris portionis ad eam , quæ potest quadratum totius & minoris portionis . ergo vt dodecaedrum ad icosaedrum , quæ in eadem sphaera describuntur , ita qualibet recta linea extrema , ac media ratione secta , potens quadratum totius , & maioris portionis ad eam , quæ potest quadratum totius & minoris portionis .

F . C . C O M M E N T A R I V S .

- A** Ergo & ut quadratum ex utraq; AB BC ad quadratum ex AC , ita quadratum ex utraq; DE EF ad quadratum ex DF] *Ex 8 secundi , est enim quod quater continetur AB BC vna cum quadrato ex AC aequale quadrato ex AB BC tamquam ex vna linea . & similiter quod quater continetur DE EF vna cum quadrato ex DF aequale quadrato ex DE EF tamquam ex vna linea .*
- B** Et longitudine ut utraq; AB BC ad AC , ita utraq; DE EF ad DF] *Ex 22 sexti .*
- C** Eadem habere cubi latus ad latus icosaedri] *Ex 5 huius .*
- D** Ita esse dodecaedri superficiem ad superficiem icosaedri in eadem sphaera descriptorum] *Ex quarta huius .*
- E** Ita esse dodecaedrum ad ipsum icosaedrum] *Ex 6 huius .*

Q V A R T I D E C I M I L I B R I F I N I S .

E V C L I D I S E L E M E N T O R V M

LIBER QVINTVSDICIMVS

ET SOLIDORVM QVINTVS.

vt quidam arbitrantur.

VT AVTEM ALII HTPSICLIS ALEXANDRINI
DE QVINQVE CORPORIBVS LIBER SECVNDVS.

*Cum Scholijs antiquis, & Commentarijs Federici
Commandini Vrbinatis.*

PROBLEMA I. PROPOSITIO. I.

N dato cubo pyramidem describere.

Sit datus cubus A
BCDEFGH, in
quo oporteat pyra-
midem describere.
iungantur AC AE
CE AH EH HC.
itaque perspicuum
est triangula AEC
AHE AHC CHE
equilatera esse. qua

drorum enim diametri sunt latera. pyramis igitur est AECH, & descripta est in dato cubo.

PROBLEMA II. PROPOSITIO II.

In data pyramide octaedrum describere.

Sit data pyramis A B C D, cuius latera secantur
bisaria in punctis EFGHKL, & HK HL EF FG iun-
gantur, & reliqua. quoniam igitur AB dupla est
vtriusque HK FG, erit HK ipsi GF æqualis, & pa-
rallela. Similiter & HG æqualis, & parallela ip-
si FK. æquilaterum igitur est HKFG. Dico & re-
ctangulum esse. si enim ab ipsa KL perpendiculari-
res ducantur ad plana EFBG FCEG EFHG
HKFG similiter demonstrabimus quæ in quadra-
to HKFG æquilatera esse.

F. C. COMMENTARIVS.

Quoniam igitur AB dupla est vtriusque HK GF, erit HK ipsi GF æqualis & pa-
rallela. Est enim HK ipsi AB parallela; namque ut DH ad HA, ita est DK ad KB. & eadem ra-
tione

Rrr tina

9. undecimi. tione demonstrabitur GF parallela ipsi AB. quae autem uni, & eidem sunt parallelae, & inter se parallelae sunt. ergo HK ipsi GF est parallela. triangula autem DAB DHK aequiangula sunt. namque angulus quidem DHK est aequalis angulo DAB; angulus vero DKH aequalis ipsi DEB. & BAD virique communis. ut igitur AD ad DH, ita AB ad HK. estq; AD dupla ipsius DH. ergo & AB ipsius HK est dupla. & eadem ratione erit AB dupla ipsius GF. quare HK ipsi GF est aequalis, atque est parallela, ut demonstratum fuit. quae autem aequales & parallelas coniungunt & ipsae aequales sunt, & parallelae. aequalis igitur & parallela est HG ipsi KF. suntq; HK KF inter se aequales, cum aequalium sint dimidia, ergo HKFG aequilaterum est.

Dico & rectangulum esse ut hoc facile demonstretur duo lemmata praemittenda sunt.

LEMMA PRIMUM.

Si a vertice pyramidis ad basin perpendicularis ducatur, cadet ea in centrum circuli, qui circa basis triangulum describitur.

Sit pyramis ABCD, cuius basis triangulum ABC, & vertex D punctum. ducaturq; a puncto D ad basin perpendicularis DE. Dico E centrum esse circuli circa triangulum ABC descripti. Iungantur enim AE BE CE. & quoniam DE perpendicularis est ad planum trianguli ABC, & ad omnes rectas lineas, quae ipsam contingunt, quae in eodem sunt plano rectos angulos faciet. recti igitur anguli sunt DEA DEB DEC; ac propterea quadratum ex AB est aequale quadratis ex AE ED. & quadratum ex BD aequale quadratis ex BE ED. sunt autem quadrata ex AD DB aequalia, quod aequales sint AD DB. ergo quadrata ex AE ED aequalia sunt quadratis ex BE ED. & dempto communi quadrato ex ED, relinquentur quadrata ex AE EB inter se aequalia. ideoq; rectae lineae AE EB aequales sunt. similiter demonstrabimus CE aequalem esse ipsis AE EB. quare punctum E centrum est circuli circa triangulum ABC descripti. quod demonstrare oportebat.

LEMMA SECVNDVM.

Recta linea ab angulo trianguli aequilateri ducta per centrum circuli, qui circa triangulum describitur, basin bifariam secat.

Sit triangulum aequilaterum ABC, & circa ipsum circulus ABC, cuius centrum D: & ducta AD secet basin in puncto E. Dico BE ipsi EC aequalem esse: producat enim AE usque ad circuli circumferentiam in F. quoniam igitur AF per centrum transit, circuli erit diameter: ideoq; circumferentia ABF circumferentiae ACF est aequalis. circumferentia autem AB aequalis est circumferentiae AC, quod recta linea AB sit aequalis ipsi AC. ergo & reliqua circumferentia BF reliquae circumferentiae FC, & angulus BAE angulo EAC aequalis erit. itaque trianguli ABE duo latera BA AE aequalia sunt duobus lateribus CA AE trianguli AEC; & angulus BAE aequalis est angulo EAC. ergo & basis BE basi EC est aequalis. quod oportebat demonstrare.

Potest etiam hoc probari ex tertia sexti libri, cum BA sit equalis ipsi AC.

COROLLARIUM.

Ex quibus, & ex tertia tertij constat rectam lineam ab angulo trianguli aequilateri ductam per centrum circuli, qui circa triangulum describitur, ad basin perpendicularem esse.

His demonstratis ducatur à vertice pyramidis ABCD ad basim planū perpendicularis, quae sit DO. erit O centrum circuli circa triangulum ABC descripti, ex primo lemmate eorum, quae nos premisimus. Itaque per latus pyramidis BD, et per DO ducatur planum pyramidem secans. erit illud rectum ad planum basis ABC, atque erit eius, & trianguli ABC communis sectio BO, quae ulterius protrahā cadet in G ex secundo lemmate premisorum; & erit ad ipsam AC perpendicularis. Eadem ratione si per latus pyramidis AD, & per DO intelligatur ductum aliud planum, ad basim rectum erit, & communis ipsorum sectio erit recta linea AOF ad ipsam BC perpendicularis. ducantur à punctis KH ad planum trianguli AEC perpendiculares KM HN. cadent hae in communes planorum sectiones ex 38 undecimi, hoc est K M cadet in BO, & HN in ipsam AO; & BO AO in punctis MN bifariam dividuntur. Quoniam enim DO KM perpendiculares sunt ad idem planum inter se parallelae erunt. quare ut BK ad K D, ita est BM ad MO, sed BK est aequalis KD, ergo & BM ipsi MO aequalis erit. Eadem ratione demonstrabitur AN aequalis NO. & quoniam perpendiculares à circuli centro ducta ad latus trianguli aequilateri dimidia est eius, quae ex centro circuli, ut ad primam quar tidesimi libri demonstravimus, erit OF dimidia ipsius OA, & OG dimidia ipsius OB. & cum FO OG sint aequales, quoniam et ipsae AO OB quae ex circuli centro, omnes AN NO OF BM MO OG inter se aequales erunt, centro igitur O, & intervallo una ipsarum FO OG circulus descriptus etiam per puncta MN transibit, describatur, & NM MF iungantur. quod cum triangula EDO BKM sint aequiangula, propterea quod linea KM parallela est ipsi DO, erit ut DB ad BK, ita DO ad KM: estq; DB dupla ipsius BK, ergo & DO ipsius KM dupla erit: & ita demonstrabitur DO dupla ipsius HN, quare KM HN inter se aequales sunt, & sunt parallelae, quippe quod ad idem planum sint perpendiculares, quae autem aequales, & parallelas coniungunt, & ipsae aequales, & parallelae sunt, aequalis igitur est & parallela MN ipsi KH, sed FG demonstrata est aequalis, & parallela eidem KH, ergo MN FG aequales sunt, & parallelae. angulus autem NMK est rectus: & similiter rectus NMF, quod in semicirculo, quare cum NM duabus rectis lineis KM MF se invicem secantibus in eorū sectione ad rectos angulos constitat, et ducto per ipsas plano ad rectos angulos erit, ergo NM perpendicularis est ad planū trianguli KMF. Sed demonstrata est FG parallela ipsi MN, quare & FG ad idem planū perpendicularis erit, ideo, angulus GFK est rectus, sunt autem anguli GFK FGH duobus rectis aequales, ergo & rectus est FGH: & similiter recti, qui ipsi oppositi sunt. ex quibus sequitur HK FG & aequilaterum esse, & rectangulum, quod oportebat demonstrare.

ALITER. Ductis KM HN perpendicularibus, ut in antecedenti figura, iungantur HF KG. & quoniam perpendicularis BG est aequalis ipsi AF, est enim AB ad utramque ipsarū, ut 4 ad 3, quod nos demonstravimus ad 12

12. undecimi

6. undecimi,
2. sexti.

4. sexti

9. quinti,
6. undecimi,
33. primi.

4. undecimi

3. undecimi

29. primi.

34. primi.

EVCLID. ELEMENT.

tertydecimi libri. sed & BM est equalis AN: erit & reliqua MG reliquae NF equalis: atque est KM aequalis HN. trianguli igitur KMG duo latera GM MK equalia sunt duobus lateribus FN NH trianguli HNF: & angulus GMK rectus est aequalis recto FNH. ergo et basis KG basi FH est aequalis. rursus. quoniam duo latera FK KH equalia sunt duobus lateribus GH HK, & basis FH est aequalis basi GK; erit angulus FKH aequalis angulo GHK. & sunt duobus rectis aequales. uterque igitur ipsorum est rectus; itemque rebus qui ipsis opponuntur. ergo HKFG rectangulum est. quod oportebat demonstrare.

PROBLEMA III. PROPOSITIO. III.

In dato cubo octaedrum describere.

- A Sit datus cubus ABCDEFGH: & sumantur centra insistentium quadratorum KLMN. Dico
 B KLMN quadratum esse. ducantur per KLMN
 C parallelae PO OX XT TP. Quoniam igitur P
 O quidem dupla est ipsius OK, XO autem dupla ipsius OL, suntque aequales PO OX; erunt
 D & KO OL inter se aequales. quadratum igitur
 E ex KL duplum est quadrati ex OL. eadem ratione & quadratum ex ML duplum est quadrati
 F ex LX. ergo quadratum ex KL quadrato ex LM est aequale. aequilaterum igitur est KLMN, & constat rectangulum esse. sumantur duo quadrata
 H BD EG; ipsorumque centra R S, & iungantur RK RL RM RN SK SL SM SN.
 K perspicuum est triangula, quae octaedrum efficiunt aequilatera esse. quod eadem ratione demonstrabimus.

F. C. COMMENTARIUS.

- A Et sumantur centra insistentium quadratorum] videlicet quadratorum CA AE EC
 CG; centra autem quadratorum dicit centra circulorum, qui circa quadrata describuntur.
 B Ducantur per KLMN parallelae PO OX XT TP] Hoc est ducatur PO parallela alterutri ipsarum DA GH: & OX parallela alterutri ipsarum AB HE, & sic in alijs.
 C Quoniam igitur PO quidem dupla est ipsius OK, XO autem dupla ipsius OL] Centrum enim eas bisariam secat, ut monstrabitur.

Sit quadratum ABCD, & ducantur diametri AC BD convenientes in puncto E: perque E ducatur FG alterutri ipsarum AD BC parallela. Dico FE ipsi EG equallem esse.

Angulus enim FAE est aequalis angulo GCE, et angulus AEF angulo CEG: ad verticem enim sunt. reliquis igitur reliquo aequalis, & triangulum triangulo simile. quare ut AE ad EF, ita est CE ad EG: & permutando ut AE ad EC, ita FE ad EG.

29. primi
 15. primi.

atque

atque est AE aequalis EC , quodd AE sit circuli diameter, & E centrum eiusdem, ergo FE ipsi EG equalis erit, centrum autem non solum ipsam FG bisariam secat, sed & alias omnes, quae in quadrato per ipsum ducuntur, quod eodem modo demonstrabimus.

Suntq; aequales PO OX Est enim PO aequalis DA , & OX aequalis AB ex 34 primi. D quare PO ad OX est ut DA ad AB : & sunt DA AB inter se aequales, ergo & PO OX aequales erunt.

Quadratum igitur ex KL duplum est quadrati ex OL Est enim quadratum ex KL ε - E quale quadratis ex KO OL ex 47 primi.

Ergo quadratum ex KL quadrato ex LM est ε quale Ex quo sequitur & rectam lineam F KL ipsi LM aequalem esse, sed & aliter demonstrare possumus. Quoniam enim duo latera KO OL sunt aequalia duobus lateribus LX XM , & angulus ad O rectus est aequalis recto ad X ; erit & basis KL basi LM aequalis ex 4 primi, et eodem modo demonstrabitur LM aequalis MN , et OK aequalis KN , quare omnes inter se aequales sint necesse est.

Et constat rectangulum esse Quoniam enim KO est aequalis OL , & angulus KOL est re- G ctus, erit angulus KLO recti dimidius; & ob eandem causam angulus MLX est dimidius recti, reliquus igitur KLM rectus est, sunt enim tres anguli duobus rectis aequales. Eadem ratione & unusquisque aliorum angularum LMN MNK NKL rectus demonstrabitur.

Petiscipicum est triangula, quae octaedrum efficiunt ε quilatera esse, quod eadem H ratione demonstrabimus Iisdem enim argumentis probabimus $KSMR$ $NSLR$ ε quilatera esse, & latera eorum ipsi KL LM N KL LM N aequalia.

PROBLEMA IIII. PROPOSITIO. IIII.

In dato octaedro cubum describere.

Sumantur centra circulorum, quae sunt circa triangula ABE ABC ACD ADE , quae sint G HKL , & GH GK LK LH iungantur. Dico $GHKL$ quadratum esse, ducantur per $GHKL$ ipsi EB BC CD DE parallelae OM MN NX XO . quoniam igitur ε quilaterum est ABC triangulum, recta linea, quae a puncto A ducitur ad H centrum circuli circa triangulum ABC descripti bisariam secat trianguli angulum, qui est ad A . equalis igitur est MH ipsi HN . Eadem ratione & MG est aequalis GO . quoniam autem MN est equalis MO , & MO ipsi OX ; erit & HM equalis MG , & GO ipsi OK ; suntq; anguli HMG GOK recti, ergo HG ipsi GK est equalis. Eadem ratione & reliquae aequales erunt, cum igitur parallelogrammum sit $GHKL$ in uno erit plano. & cum uterque angularum MGH OGK sit dimidius recti, reliquus HGK rectus erit, simili- F liter & reliqui, quadratum igitur est $GHKL$. possumus autem a principio sumentes centra $GHKL$, ducentesq; parallelas MN NX XO OM iungere GH HL LK KG , & dicere $GHKL$ quadratum esse, quod si sumentes reliquorum triangulorum centra, ipsa iungamus, ostendentur & reliqua quadrata esse, habebimusq; in dato octaedro descriptum cubum, quod facere oportebat.

F. C. COMMENTARIUS.

Quoniam igitur ε quilaterum est ABC triangulum, recta linea, quae a puncto A A ducitur ad H centrum circuli circa triangulum ABC descripti bisariam secat trian- C guli angulum, qui est ad A . equalis igitur est MH ipsi HN Superius enim demonstratū est rectam lineam ab angulo trianguli ε quilateri ductam per centrum circuli, qui circa triangulum describitur

- describitur basim bifariam secare. sequitur etiam hoc ex demonstratis in decima primi libri. quod si per centrum H ducatur MN ipsi BC parallela, demonstrabitur eadem ratione MH aequalem esse ipsi HN, cum MA ipsi AN sit aequalis, sunt enim triangula BAC MAN inter se similia.
- B Quoniam autem NM est aequalis MO, & MO ipsi OX, erit & HM aequalis MG, & GO ipsi OK. Cum enim rectae lineae NM MO parallelae sint ipsi CB BE, erit triangulum AMN triangulo ABC simile, & triangulum AMO simile triangulo ABE. ut igitur CB ad BA, ita est NM ad MA. Et ut AB ad BE, ita AM ad MO. quare ex aequali ut CB ad BE, ita NM ad MO. sed CB est aequalis ipsi BE; ponitur enim BCDE quadratum. ergo & MN ipsi MO est equalis. Et eadem ratione MO ipsi OX aequalis demonstrabitur. est autem HM dimidia ipsius MN, & MG dimidia ipsius MO. quare sequitur HM ipsi MG aequalem esse, & ita GO equalem ipsi OK.
- C Suntque anguli HMG GOK recti. Quoniam enim rectae lineae NM MO parallelae sunt ipsi CB BE, atque est angulus CBE rectus; & NMO angulus rectus erit, ex 10 undecimi.
- D Ergo HG ipsi GK est aequalis. Ex 4 primi.
- E Cum igitur parallelogrammum sit GHKL in vno erit plano. Omne enim parallelogrammum est in vno plano.

Sit parallelogrammum ABCD, & iungantur AC BD, quae se in puncto E secent. erit triangulum ABC in vno plano ex 1 undecimi. itaque, in vno plano triangulum AC D. sed et triangulum BCD est in vno plano. quare triangulum DEC, hoc est totum triangulum ACD est in eodem plano, in quo triangulum BEC, hoc est ipsum ABC. totum igitur parallelogrammum ABCD in vno plano erit. quod oportebat demonstrare.

- F Et cum uterque angulorum MGH, O GK sit dimidius recti, reliquus HCK rectus erit. Sunt enim triangula HMG GOK aequicrura, et anguli ad M, et O recti; ut demonstratum iam est.
- Ex iam demonstratis apparet quomodo in dato octaedro pyramis describatur.
- Si enim in dato octaedro cubum, et rursus in cubo pyramidem describamus, et pyramis in dato octaedro descripta erit.

PROBLEMA V. PROPOSITIO V.

In dato icosaedro dodecaedrum describere.

- A Exponatur pentagonum icosaedri ABCDE, & sumantur centra circulorum, qui sunt circa triangula AFE AFB BFC CFD DFE, unde licet GHKLM, iunganturque; GH HK KL LM MG, & rursus iuncta FG FH FK producantur ad punctum XNO, quae rectas lineas EA AB BC in XNO punctis bifariam secabunt: atque erit ut XN ad NO, ita GH ad HK. equalis igitur est & HN ipsi KO. similiter autem & reli-

qua pentagoni GHKLM latera aequalia ostenduntur. Dico & æquiangulum esse. Quoniam enim duæ XN NO parallelæ duabus GH HK æquales angulos continent, & reliqua manifesta sunt. Intellegatur à puncto F ad planum pentagoni ABCDE ducta perpendicularis, quæ cadet in centrū circuli circa pentagonū descripti. si igitur à puncto N ad punctum, in quod dicta perpendicularis cadit, rectam lineam ducamus, & per H ducamus ipsi parallelam, perspicuum est eam perpendiculari occurrere, & cum ipsa rectum angulum continere. Rursus si à punctis XO ad cetrum circuli circa pentagonum descripti rectas lineas iungamus, & à puncto, in quo linea per H ducta perpendiculari occurrit ad G K rectas lineas ducamus, manifestū est ipsas cum eadem perpendiculari rectos angulos continere. Ex quo perspicue cōstat pentagonum GHKLM in vno esse plano.

F. C. COMMENTARIUS.

Exponatur pentagonum i cosaedri ABCDE] Hoc est pentagonum descriptum in circulo, à quo i cosaedrum ortum habet, ut in 16 tertijdecimi.

Quæ rectas lineas EA AB BC in X N O punctis bifariam secabunt] Ex ijs, quæ nos in antecedente demonstrauimus.

Atque erit ut XN ad NO, ita GH ad HK] Quoniam enim triangula AFE AFB BFC æquilatera sunt, & aequalia; erunt perpendiculares, quæ ab angulo F ad basim ducuntur, vide licet EX FN FO inter se æquales. Latus enim trianguli æquilateri ad perpendicularem, quæ ab angulo ad basim ducitur, eam proportioem habet, quam 4 ad 3, ut nos demonstrauimus ad 12 tertijdecimi. Rursus quoniam GHK sunt centra circulorum, qui circa triangula describuntur, erunt & ipsæ, quæ ex centris FG FH FK æquales. ergo & reliquæ æquales sunt, nempe GX HN KO. sunt autem æquales EA AB BC; & earum dimidiæ EX XA AN NB BO OC. cū igitur duo latera trianguli ANX, videlicet XA AN æqualia sint duobus lateribus NB BO trianguli BON; & anguli ad AB sint æquales, ponitur enim pentagonum ABCDE æquilaterum, & æquiangulum; erit & basis XN basi NO æqualis, sed ut FG ad GX, ita est FH ad HN: est enim utraque utriusque dupla, ut ad primam quartodecimi demonstratum est. ergo GH parallela est ipsi XN. & eadem ratione HK ipsi NO est parallela. triangulum igitur FGH simile est triangulo FXN, & triangulum FHK simile ipsi FNO: ideoque ut NX ad HG, ita est NF ad FH. ut autem NF ad FH, ita NO ad HK. quare ut NX ad HG, ita NO ad HK: & permutando ut XN ad NO, ita GH ad HK. sunt autem æquales XN NO. ergo & GH HK æquales sunt necesse est.

Æqualis igitur est & HN ipsi KO] Vide ne potius legendum sit æqualis igitur est & GH ipsi HK propter ea, quæ sequuntur.

Quoniam enim duæ XN NO parallelæ duabus GH HK æquales angulos continent: & reliqua manifesta sunt] Nam cum duæ XN NO se se contingentes duabus GH HK se se contingentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano; æquales angulos continebunt. ergo angulus GHK est æqualis angulo XNO. & similiter bifariam secta CD in T, & iuncta OT, erit angulus HKL æqualis angulo NOT. sed anguli XNO NOT sunt æquales, ut monstrabitur. ergo & GHK HKL anguli æquales erunt. & similiter reliqui. Quoniam enim triangula AXN BON CTO æquicurvum sunt similia, & aequalia, erunt anguli AXN ANX BNO BON COT inter se æquales. ergo reliquus ex duobus rectis XNO est æqualis reliquo NOT: itemque reliqui æquales ostendentur.

Quæ cadet in centrum circuli circa pentagonū descripti] Cadat enim in punctum V, F

9. dif. unde-
cimi.
47. primi.

9. tertij.

G
2. undecimi.

H
2. sexti.
11. quinti.

Et interligatur unctae AV BV CV . Quoniam igitur FV perpendicularis est ad planum pentagoni, erunt anguli AVF BVF CVF recti; Et ob id quadratum ex AF aequale duobus quadratis ex AV VF : Et quadratum ex BF aequale duobus ex BV VF . sed quadratum ex AF est aequale quadrato ex BF , quod AF ipsi BF sit aequalis. ergo quadrata ex AV VF quadratis ex BV VF sunt aequalia, Et dempto communi quadrato ex VF , erit reliquum quadratum ex AV aequale reliquo ex VB , Et recta linea AV ipsi VB aequalis. Eadem ratione Et recta linea CV aequalis ostendetur ipsis AV VB . ergo V est centrum circuli circa pentagonum descripti. quod demonstrare oportebat.

Perpicuum est eam perpendiculari occurrere, & cum ipsa rectum angulum continere. Nam cum triangulum FNV sit in uno plano, si recta linea a puncto H ducta non occurreret perpendiculari, parallela non esset ipsi NV , quod non ponitur. sunt enim parallele in eodem plano ex 35 diffinitione primi libri. Occurrit autem perpendiculari in puncto Z . cum igitur angulus NVF sit rectus ex 3. diffi. undecimi, erit ex 29 primi Et HZF rectus.

Manifestum est ipsas cum eadem perpendiculari rectos angulos continere. Quoniam enim HZ est parallela ipsi NV , erit ut FZ ad ZV , ita FH ad HN . sed ut FH ad HN , ita FG ad GX . ut igitur FZ ad ZV , ita FG ad GX . quare GZ est parallela ipsi XV , angulusque GZF est rectus, nempe ipsi recto XVF aequalis. Et eadem ratione angulus KZF rectus erit: similisque LZ MZ similiter demonstrabitur angulos LZF MZF esse rectos.

Ex quo perspicue constat pentagonum $GHLKM$ in uno esse plano. Ex quinta undecimi. nam recta linea FZ tribus rectis lineis se se tangentibus ZG ZH ZK ad rectos angulos insit. Si igitur reliquis icosaedri angulis eodem modo pentagona subindemus in dato icosaedro dodecaedrum descriptum erit.

A
De quinque figurarum lateribus, Et angulis.

Oportet autem scire, si quis interroget nos, quot latera icosaedrum habeat, ita respondendum esse. Patet icosaedrum contineri viginti triangulis, & vnum quodque triangulum ex tribus rectis lineis constare. multiplicabimus igitur viginti triangula per numerum laterum trianguli. fient sexaginta; cuius dimidium triginta. si militer autem & in dodecaedro. quoniam enim duodecim pentagona dodecaedrum continent, & vnum quodque pentagonum habet quinque rectas lineas, multiplicabimus decies quinque, & erunt sexaginta, cuius rursus dimidium triginta. dimidium autem idcirco accipimus, quod singula latera siue sit triangulum, siue pentagonum, siue quadratum, ut in cubo, bis sumuntur. Eadem via, & ratione vtentes & in cubo, & in pyramide, & in octaedro latera inueniemus. si vero singularum quinque figurarum anguli inueniendi sint, rursus eadem facientes partiemur per numerum planorum, quae vnum solidi angulum continent; ut quoniam icosaedri angulum continent quinque triangula, partiemur per quinque. erunt duodecim anguli in icosaedro. quoniam autem tria pentagona dodecaedri continent angulum, partiemur per tria, & habebimus angulos viginti in dodecaedro. similiter in reliquis figuris anguli inuenientur.

De inclinatione planorum, quæ a singulis quinque figuras continent.

Quæsitum est quo modo in vnaquaque solidarum quinque figurarum quolibet plano dato eorum, quæ ipsam continent, inclinatio inueniatur. Inuentio autem, vt narrauit Isidorus magnus præceptor hoster, hoc modo se habet. In cubo quidem plana, quæ ipsum continent, ad rectos inter se angulos inclinari manifestum est. In pyramide vero exposito vno triangulo centris quidem terminis vnius lateris, interuallo autem recta linea, quæ à vertice trianguli ad basim perpendicularis ducitur, circumferentiæ descriptæ se mutuo secant; & à sectione ad centra iunctæ rectæ lineæ continebunt inclinationem planorum, quæ pyramidem comprehendunt. At in octaedro à latere trianguli descripto quadrato, & centris quidem terminis diametri, in interuallo autem similiter perpendiculari, quæ à vertice trianguli ad basim ducitur; describantur circumferentiæ; & rursus rectæ lineæ à communi sectione ad centra iunctæ continebunt angulum, qui ex duobus rectis relinquitur, inclinationis eius, quam inquirimus. In icosaedro autem à latere trianguli descripto pentagono, iungatur recta linea, quæ duobus lateribus subtenditur; & centris quidem terminis eius, interualloq; perpendiculari ipsius trianguli descriptis circumferentijs rectæ lineæ à communi sectione ad centra iunctæ continebunt similiter angulum, qui ex duobus rectis relinquitur, inclinationis planorum ipsius icosaedri. Denique in dodecaedro exposito vno pentagono, & iuncta similiter recta linea, quæ duobus lateribus subtenditur, centris quidem terminis ipsius, interuallo autem perpendiculari, quæ à bipartita sectione ad latus pentagoni ipsi parallelum ducitur; describantur circumferentiæ; & à puncto, in quo conueniunt ad centra similiter iunctæ rectæ lineæ continebunt reliquum ex duobus rectis, inclinationis planorum dodecaedri.

Cubi planorum inclinatio.

Pyramidis.

Octaedri planorum inclinatio.

Icosaedri planorum inclinatio.

Dodecaedri planorum inclinatio.

Hunc quidem vir ille clarissimus de prædictis sermonem habuit, cum demonstratio eorum sibi manifesta videretur. sed vt contemplatio demonstratiua perspicue appareat, sermonem in vnoquoque explicabo, & primum in pyramide.

Intelligatur pyramis quattuor triangulis æquilateris contenta ABCD, cuius basis ABC, & vertex D punctum. secto autem latere AD bifariam in E, iungantur BE EC. Et quoniam æquilatera sunt ADB ADC triangula, & bifariam secta est AD, erunt BE EC ad ipsam AD perpendiculares. Dico angulum BEC acutum esse.

sss Quoniam

47. primi.

Quoniam enim AC dupla est ipsius AE, erit quadratum ex AC quadrati ex AE quadruplum. Sed quadratum ex AC æquale est quadratis ex AE EC, quorum
B quadratum ex AC ad quadratum ex CE proportionem
C habet, quam 4 ad 3: atque est CE ipsi EB æqualis. quadratum igitur ex BC minus est quadratis ex BE EC; ideoque angulus BEC est acutus. quod cum duorum planorum ABD ADC communis sectio sit AD, & communi sectioni ad rectos angulos occurrant in vitroque planorum rectę lineę BE EC, quę acutum angulum continent. erit angulus BEC planorum inclinatio, atque est data; datur enim BC latus existens trianguli, & utraq; ipsarum BE EC est perpendicularis trianguli æquilateri. centris igitur BC, hoc est terminis vnus lateris, & intervallo trianguli perpendiculari descriptę circumferentię se inuicem secant in puncto E: & ab eo ad BC iuncta recta lineę planorum inclinationem continebunt. hoc autem est, quod dicebatur. atque illud (centris quidem BC, inter uallo autem trianguli perpendiculari descripti circuli se mutuo secens,) manifestum est. vtraque enim BE EC maior est, quā dimidia ipsius BC: & centris BC, & intervallo ipsius BC dimidia descripti circuli se se tangunt. si autem minor sit, neque se tangunt, neque secant: quod si maior omnino secant; & ita de pyramide sermo & manifestus, & demonstrationibus congruens apparet.

Intelligatur rursus in quadrato ABCD pyramis verticem habens punctum E, & continentia ipsam præter basim triangula æquilatera. erit autem ABCDE pyramis dimidia octaedri. secerur latus vnus trianguli AE bifariam in F: & BF FD iungantur. sunt igitur BF FD & æquales inter se, & ad ipsam AE perpendiculares. Dico angulum BFD obtusum esse. iungatur enim BD; & quoniam quadratum est AC, cuius diameter BD, erit quadratum ex BD quadrati ex DA duplum. quadratum autem ex DA ad quadratum ex DF proportionem habet, vt proxime dictum est, quam 4 ad 3. ergo & quadratum ex BD ad quadratum ex DF proportionem habebit, quam 8 ad 3. est autem DF æqualis FB. quadratum igitur ex BD maius est quadratis ex BF FD, ac propterea angulus BFD est obtusus. & quoniam duorum planorum ABE ADE se inuicem secantium communis sectio est AE, & ipsi ad rectos angulos in vitroque plano duę sunt BF FD, angulum obtusum continentes; erit angulus BFD reliquus ex duobus rectis, inclinationis planorum ABE ADE. si igitur angulus BFD datus sit, & dicta inclinatio dabitur. Itaque quoniam triangulū octa-

H dri datum est, & unum eius latus est AD, a quo quadratum AC describitur; datur & BD diameter existens quadrati. sed & BF FD trianguli perpendiculares datę sunt. ergo & angulus BFE dabitur. descripto igitur quadrato a latere trianguli, ut AC, & iuncta diametro BD, si centris quidem BD; intervallo autem perpendiculari trianguli circulos describamus, se mutuo secabunt in F: & rectę lineę a puncto F ad centra ductę continebunt inclinationem. BFD, quę quidem est reliqua ex duobus rectis, vt dictum est, inclinationis planorum. & hoc loco patet vtramque ipsarum BF FD maiorem esse, quā ipsius BD dimidiam. ideoque in constructione organica necesse est circulos se mutuo secare. constat etiam ex demonstratione ipsam BD ad DF potentia proportionem habere. quam habet 8 ad 3, & dimidię eius potentia esse quadruplam. ergo utraq; ipsarum BF FD ma-

ior

ior est quàm dimidia ipsius BD. & hæc quidem de octaedro dicta sunt.

In icosaedro autem intelligatur pentagonum æquilaterum ABCDE, & in hoc pyramis uerticē habens punctum F, ita ut continentia ipsam triangula sint æquilatera. erit ABCDE pyramis figuræ icosaedri pars. secetur latus unius trianguli FC bifariam in G, & BG GD iungantur. erunt utique & æquales, & ad ipsam FC perpendiculares. Dico angulum BGD obtusum esse, quod per se se manifesto constat. Iuncta enim BD obtusum angulum BCD pentagoni subtrédit: hoc autem maior est angulus BGD: nam BG GD ipsi BC CD sunt minores. similiter ijs, quæ proxime dicta sunt, patet angulum BGD esse eum, qui relinquitur ex duobus rectis inclinationis BFC GFD triangulorum. hoc autem dato, dabitur & planorum icosaedri inclinatio. à latere enim trianguli icosaedri descripto pentagono, & recta linea, quæ duobus pentagoni lateribus subtréditur, ut in figura est BD data: & similiter datis BG GC perpendicularibus triangulorum, dabitur & BGD angulus. nam si centris quidem terminis ipsius BD, quæ duobus pentagoni lateribus subtréditur, interuallo autem construatursi trianguli circuli describantur, se inuicem secabunt, ut in G: & rectæ lineæ à puncto G ad centra BD ductæ continebunt angulum, qui ex duobus rectis relinquitur, inclinationis planorum. & hoc loco ex figura manifestum est utramque BG GD maiorem esse, quàm dimidiam ipsius BD. quamquam ita esse ex constructione organica demonstrari potest. intelligatur enim seorsum triangulum æquilaterum HKL, & ab ipsa KL pentagonum describatur KMNXL: iunctaque ML ducatur HO perpendicularis trianguli HKL. Dico HO maiorem esse dimidia ipsius ML, quæ inclinationē planorum subtrédit. quia enim à puncto K ad ML perpendiculari KP, quoniā angulus KLP maior est tertia parte recti, hoc est maior angulo KHO; constituatur angulo KHO æqualis angulus PLR. ergo PL est perpendicularis æquilateri trianguli, cuius latus est RL; ac propterea quadratum ex RL ad quadratum ex LP proportionem habet, quàm 4 ad 3. sed maior est KL quàm LR. ergo quadratum ex KL ad quadratum ex LP maiorem habet proportionem, quàm 4 ad 3. habet autem & ad quadratum ex HO proportionem eam, quàm 4 ad 3. ergo KL ad LP maiorem proportionem habet, quàm ad HO. maior igitur est HO quàm LP.

In dodecaedro autem hoc modo. intelligatur unum cubi quadratum, à quo dodecaedrum describitur ABCD, & duo plana dodecaedri AEBFG GDHCF. Dico & sic datam esse duorum pentagonorum inclinationem. secetur FG bifariam in K; & à puncto K ipsi FG ad rectos angulos ducantur in utroque planorum KL KM: & ML iungatur. Itaque primum dico angulum MKL obtusum esse. ostensum enim est in tertiodécimo libro elementorum, & in constitutione do-

decaedri, rectam lineam, quæ à puncto
K ad quadratum ABCD perpendiculari-
s ducitur, dimidiam esse lateris penta-
goni. quare minor est quàm dimidia ip-
sius ML. ideoque angulus MKL est obtu-
sus. simul autem demonstratum est in eo-
dem theoremate, quadratum quidè ex
KL aequale esse & dimidij lateris penta-
goni, ita ut KL & KM inter se æquales
maiores sint, quàm dimidia ipsius ML. angulo igitur MKL dato reliquus ex duobus
rectis, hoc est inclinatio planorum data erit. Itaque quoniam latus quadrati ABC
D duobus lateribus pentagoni subtenditur, & datū est pentagonum; erit & ML da-
ta. data autem est & utraque ipsarum MK KL; perpendiculares enim sunt à bipar-
tita sectione rectæ lineæ AB, quæ duobus lateribus subtenditur ad latus pentago-
ni ipsi parallelinm, ut ad FG. ergo angulus LKM datus est, nempe reliquus ex duo-
bus rectis, ut dictū est, inclinationis eius, quā inquirimus. pulchre igitur in constru-
ctione organica dixit, oportere dato pentagono iungere rectam lineam duobus
lateribus subtensam, quæ lateri cubi est æqualis: & centris quidem terminis ip-
sius, interuallo autem perpendiculari, quæ à bipartita sectione ad latus pentagoni
parallelum agitur, ut in figura sunt KL KM, describere circumferentias, atque à pū-
cto, in quo conveniunt ad centra rectas lineas ducere, quæ continent angulum reli-
quum ex duobus rectis, inclinationis planorum. at vero perpendicularem KM ma-
iorem esse dimidia ipsius ML iam dictū est, ut in elemētis simul est demonstratū.

F. C. COMMENTARIUS.

- A** Et quoniam æquilatera sunt ADB ADC triangula, & bifariam secta est AD, erūt
BE EC ad ipsam AD perpendiculares] *Ex ijs, quæ nos ad 12. tertijdecimi libri demon-
stravimus.*
- B** Quorum quadratum ex AC ad quadratum ex CE proportionem habet, quam
4 ad 3] *Ex demonstratis in eodem loco.*
- C** Quadratum igitur ex BC minus est quadratis ex BE EC] *Est enim quadratum ex B
C ad quadrata ex BE EC, ut 4 ad 6.*
- D** Erit angulus BEC planorum inclinatio] *Ex 6. diffinitione vndecimi libri.*
- E** Et utraque ipsarum BE EC est perpendicularis trianguli æquilateri] *Dato autem
latere trianguli æquilateri, & perpendicularis dabitur ex secunda libri datorum. est enim latus
trianguli æquilateri ad perpendicularem, ut 4 ad 3.*
- F** Quadratum igitur ex BD maius est quadratis ex BF FD] *Est enim quadratum ex B
D ad quadrata ex BF FD, ut 8 ad 6.*
- G** Erit angulus BFD reliquus ex duobus rectis inclinationis planorum ABE AD
E] *Est enim plani ad planum inclinatio acutus angulus rectis lineis contentus, quæ ad rectos an-
gulos communi planorum sectioni ad unum ipsius punctum in utroque planorum ducuntur. quare
dempto BFD angulo obtuso ex duobus rectis relinquetur acutus angulus, qui est inclinationis pla-
norum ABE ADE. & cum angulus BFD datus sit, & inclinatio planorum detur necesse est
ex quarta libri datorum.*
- H** Datur & BD diameter existens quadrati] *Ex 26 libri datorum.*
- K** Iuncta enim BD obtrufum angulum BCD pentagoni subtendit] *Angulus namque
pentagoni constat ex recto, & quinta recti parte.*
- L** Hoc autem maior est angulus BGD, nam BG GD ipsi BC CD sunt minores]
Ex 21 primi. sunt enim BG GD minores, sed maiorem angulum continent.
- M** Quoniam angulus KLP maior est tertia parte recti] *Angulus enim pentagoni MKL
continet rectum, & recti quintam, ut dictum est. ergo anguli KML KLM sunt quattuor quin-
tae*

tae recti, & ipse KLM duae quintae. duae autem quintae ad tertiam recti proportionem habent eam, quam 6 ad 5.

Sed maior est KL quam LR] Iuncta enim MR, erunt duae MK KL maiores MR RL ex N 21 primi. ergo & dimidia KL quam dimidia LR maior erit.

Maiores igitur est HO quam LP] Ex 10 quinti.

Intelligatur unum cubi quadratum, a quo dodecaedrum describitur] Ad constitutionem enim dodecaedri ratiur ipsius cubi quadratis, ut in 17 tertijdecimi apparet.

Ex ijs autem quae proxime tradita sunt, & ex demonstratis in 17 tertijdecimi libri constat, quomodo in dato dodecaedro cubus describatur.

Quoniam enim in dodecaedri constitutione cubi planis utimur, & ad singula eius latera singula pentagona dodecaedri describimus, si in dodecaedro iam facto apposite ducamus rectas lineas, quae duobus cuiusque pentagoni lateribus subtendantur, cubus ipse constitutus erit, ut in sequenti figura apparere potest.

Ex quibus iam perspicuum est quomodo in dato dodecaedro tum pyramis ipsa, tum octaedrum describatur.

Nam si in dodecaedro cubum, & rursus in cubo pyramidem vel octaedrum describamus, & pyramis, & octaedrum in dato dodecaedro descripta sint necesse est.

In dato icosaedro cubum describere.

Primum in icosaedro dodecaedrum describimus, ut in 5 huius dictum est; deinde in dodecaedro cubum, & ita cubus in dato icosaedro descriptus erit.

In dato icosaedro pyramidem describere.

Si enim describamus ex antecedenti in icosaedro cubum, & in cubo pyramidem ex prima huius, erit pyramis quoque in icosaedro descripta.

In dato dodecaedro icosaedrum describere.

Exponatur dodecaedri angulus aliquis A, contentus tribus pentagonis ABCDE AFGHE, AFKLB: sumanturque centra circulorum, qui circa pentagona describuntur MNO, & ab ipsis ad latera pentagonorum perpendiculares ducantur MP OP NQ OQ MR NR: & MN NO OM iungantur. erunt ex iam demonstratis MPO OQN NRM anguli inclinationis planorum ipsius dodecaedri, & idcirco inter se aequales:

item

4. primi.

itemq; æquales perpendiculares ipsae. quare trianguli
 MOP duo latera MP PO æqualia sunt duobus lateri-
 bus MR RN trianguli MNR: & angulus MPO est æ-
 qualis angulo MRN. basis igitur OM est æqualis basi
 MN. & ita demonstrabitur basis ON ipsi NM æqua-
 lis. ex quibus constat triangulum MNO æquiangulum
 esse. ergo si reliquis dodecaedri angulis triangula æqui-
 latera eodem modo substantur, descriptum erit icosae-
 drum. sunt enim omnes anguli ipsius dodecaedri mane-
 ro viginti: quot sunt icosaedri triangula. In dato igitur
 dodecaedro icosaedrum descriptum est. quod facere opor-
 tebat.

EVCLIDIS ELEMENTORVM FINIS.

P I S A V R I.

CVM LICENTIA SVPERIORVM.

APVD CAMJLLVM FRANCJFSCHJXVM.

M. D. LXXII.

Smithsonian Libraries

Adopt-a-Book

Gift of

Linda Blancato

In honor of
Charles R. Rothe
Master Bookbinder